

## 碳纤维材料双层索的非线性共振特性

吴 晓, 杨立军, 孙 晋

(湖南文理学院, 湖南 常德 415000)

**摘 要:** 为了指导碳纤维材料双层索网抗风和抗震设计, 采用连续化理论研究了其共振特性. 在考虑温度影响的基础上, 建立了碳纤维材料双层索在外激励作用下的振动控制方程, 采用 Galerkin 原理及 KBM 法求得了双层索的非线性共振近似解及对应的定解. 在把碳纤维双层索与钢丝双层索比较的基础上, 讨论分析了温度、外激励、谐调参数、外阻尼等因素对双层索非线性共振的影响.

**关键词:** 碳纤维; 双层索; 非线性; 共振

**中图分类号:** O322

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1006-7930(2011)01-0070-05

由于碳纤维增强复合材料的徐变和松弛等重要指标均优于钢材, 且碳纤维材料还具有耐久性好、抗腐蚀、自重轻、富有柔性、高强度等优点, 因此在土木建筑、机械、航天航空等实际工程中得到了广泛应用, 如采用碳纤维材料对土木工程结构进行加固等. 在大跨度空间结构中, 一般多采用钢丝绳网屋顶, 而钢丝绳网屋顶一个致命弱点是耐腐蚀性差, 且受温度影响大, 如果腐蚀严重而进行更换是极为困难的. 随着科学技术的发展, 碳纤维材料由于具有钢铁材料所不具备的优点, 未来空间结构有采用碳纤网替代钢丝绳网的趋势, 可以预见在不远的将来, 碳纤维材料将会很快推广应用到大跨度空间结构中. 文献[1-5]研究了单层索网体系的非线性振动, 文献[6-7]研究了碳纤维双层索及索网的非线性自振特性. 文献[8-9]从斜拉桥的结构刚度、极限强度等静力特性方面对碳纤维增强复合材料拉索在大跨度斜拉桥中的应用可能性进行了分析, 文献[10-11]对碳纤维增强复合材料拉索斜拉桥和钢索斜拉桥的自振特性和在交通荷载作用下的动力响应进行了分析比较. 但是, 至今未见到研究碳纤维双层索非线性共振的文献. 本文则首次研究了碳纤维材料双层索的非线性共振问题.

## 1 双层索的近似解

对于图 1 所示双层索, 为了研究其非线性共振, 可做如下基本假设: ①索是理想柔性的; ②索的变形是小垂度的; ③承重索、稳定索网之间的连杆绝对刚性; ④连杆对承重索、稳定索网形成的层间接触力为连续分布; ⑤索材料符合虎克定律.

由弹性振动理论可知, 在外激励作用下双层索的非线性振动方程为

$$\begin{cases} H_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Delta H_1 \left( \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - q(x, t) + P(x, t) = m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu_1 \frac{\partial w}{\partial t} \\ H_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Delta H_2 \left( \frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + q(x, t) = m_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu_2 \frac{\partial w}{\partial t} \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $H_1$ 、 $H_2$  分别为承重索、稳定索初始水平张力;  $\Delta H_1$ 、 $\Delta H_2$  分别为承重索、稳定索水平拉力增量;  $z_1(x)$ 、 $z_2(x)$  分别为承重索、稳定索的初始形状函数;  $w(x, t)$  为双层索的横振位移;  $q(x, t)$  为双层索的层间接触力;  $P(x, t)$  为外激励;  $m_1$ 、 $m_2$  分别为双层索的承重索、稳定索的单位长度质量;  $\mu_1$ 、 $\mu_2$  分别为承

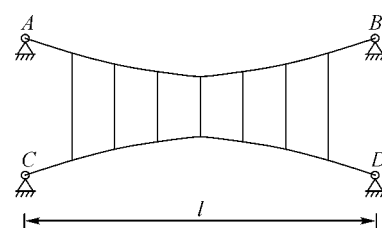


图 1 双层索计算模型

Fig. 1 The calculating model of double-layer cable system

收稿日期: 2009-05-20 修改稿日期: 2010-11-25

基金项目: 湖南省科技计划项目资助(2008FJ3067); 湖南十一五重点建设学科资助(湘教通[2006]180 号)

作者简介: 吴 晓(1965-), 男, 湖南常德人, 教授, 主要从事结构振动理论研究.

重索、稳定索的阻尼系数.

由虎克定律可知承重索、稳定索在均匀温度场中的伸长为

$$\begin{cases} \Delta H_1 = \frac{EA_1}{l} \int_0^l \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx - \alpha_s EA_1 \Delta T \\ \Delta H_2 = \frac{EA_2}{l} \int_0^l \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial z_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx - \alpha_s EA_2 \Delta T \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $A_1$ 、 $A_2$  分别为承重索、稳定索网的横截面积;  $\alpha_s$  为热膨胀系数;  $\Delta T$  为温度增量.

$$\begin{cases} w(x, t) = T(t) \left( \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right), P(x, t) = P \left( \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) \cos \Omega t \\ z_1(x) = 4f_1 \left( \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right), z_2(x) = 4f_2 \left( \frac{x^2}{l^2} - \frac{x}{l} \right) \end{cases} \quad (3)$$

把承重索、稳定索的初始形状函数  $z_1(x)$ 、 $z_2(x)$  的表达式代入式(2) 可得

$$\begin{cases} \Delta H_1 = \frac{EA_1}{6l^2} (T^2 + 8f_1 T) - \alpha_s EA_1 \Delta T \\ \Delta H_2 = \frac{EA_2}{6l^2} (T^2 - 8f_2 T) - \alpha_s EA_2 \Delta T \end{cases} \quad (4)$$

把式(1) 的两个分式相加消去  $q(x, t)$  后得

$$(H_1 + H_2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Delta H_1 \left( \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \Delta H_2 \left( \frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + P(x, t) = M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial w}{\partial t} \quad (5)$$

式中:  $M = m_1 + m_2$ ,  $\mu = \mu_1 + \mu_2$ .

把以上有关各式代入式(5) 中利用伽辽金原理得

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \epsilon \eta \frac{dT}{dt} + \omega_0^2 T + \epsilon \alpha T^2 + \epsilon \beta T^3 = \epsilon F_0 + \epsilon F \cos \Omega t \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{式中: } \omega_0^2 &= \frac{160}{13ml^4} (EA_1 f_1^2 + EA_2 f_2^2) - \frac{10}{ml^2} \alpha_s E \Delta T (A_1 + A_2), \epsilon \eta = \frac{\mu}{m}, \epsilon F = \frac{P}{m}, \epsilon \alpha = \frac{20}{ml^2} (EA_1 f_1^2 - \\ &EA_2 f_2^2), \epsilon \beta = \frac{5}{3ml^4} (EA_1 + EA_2), \epsilon F_0 = \frac{40\alpha_s E \Delta T}{ml^2} (A_1 f_1 - A_2 f_2). \end{aligned}$$

$$\text{设} \quad \omega_0^2 = \Omega^2 + \epsilon \sigma \quad (7)$$

其中,  $\sigma$  为谐调参数.

引入固有振动与外激励之间的相位差

$$\phi = \theta + \Omega t \quad (8)$$

由文献[12] 中的 KBM 法, 可设

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \epsilon A_1(a, \theta) + \epsilon^2 A_2(a, \theta) + \dots \\ \frac{d\phi}{dt} = \Omega + \epsilon B_1(a, \theta) + \epsilon^2 B_2(a, \theta) + \dots \end{cases} \quad (9)$$

同样, 由文献[12] 可把式(6) 的解表示为如下形式

$$T(t) = a \cos(\theta + \Omega t) + \epsilon T_1(a, \theta + \Omega t) + \epsilon^2 T_2(a, \theta + \Omega t) + \dots \quad (10)$$

把式(7)—式(10) 代入(6) 中可得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_1}{dt^2} + \Omega^2 T_1 &= F_0 + (F \sin \theta + 2\Omega A_1 + a\eta\Omega) \sin \theta - \frac{\alpha a^2}{2} - \frac{\alpha a^2}{2} \cos 2\theta \\ &+ (F \cos \theta + 2a\Omega B_1 - a\sigma - \frac{3\beta a^3}{4}) \cos \theta - \frac{\beta a^3}{4} \cos 3\theta \end{aligned} \quad (11)$$

由式(11) 可以求得

$$\begin{cases} A_1 = -\frac{a\eta}{2} - \frac{F \sin \theta}{2\Omega} \\ B_1 = \frac{3\beta a^2}{8\Omega} + \frac{\sigma}{2\Omega} - \frac{F \cos \theta}{2a\Omega} \end{cases} \quad (12)$$

$$T_1(t)=\frac{2F_0-\alpha a^2}{2\Omega^2}+\frac{\alpha a^2}{2\Omega^2}+\frac{\alpha a^2}{4-\sigma^2}\cos 2\vartheta+\frac{\beta a^3}{4(9-\Omega^2)}\cos 3\vartheta \tag{13}$$

由以上有关各式可知索网的振动位移为

$$w(x,t)=\left[\frac{2\varepsilon F_0-\varepsilon \alpha a^2}{2\Omega^2}+a\cos \vartheta+\frac{\varepsilon \alpha a^2}{4-\Omega^2}\cos 2\vartheta+\frac{\varepsilon \beta a^3}{4(9-\Omega^2)}\cos 3\vartheta\right]\left(\frac{x}{l}-\frac{x^2}{l^2}\right) \tag{14}$$

把式(12)代入式(9)中,参阅文献[12]可令 $\frac{da}{dt}=0,\frac{d\vartheta}{dt}=0$ 可以得到幅频响应方程和相频响应方程为

$$\begin{cases} \left(\frac{\alpha \varepsilon \eta}{2}\right)^2+\left(\frac{3\varepsilon \beta a^3}{8\Omega}+\frac{\alpha \varepsilon \sigma}{2\Omega}\right)^2=\left(\frac{\varepsilon F}{2\Omega}\right)^2 \\ \operatorname{tg} \vartheta=-\frac{\varepsilon \eta \Omega}{\varepsilon \sigma+3 \varepsilon \beta a^2 / 4} \end{cases} \tag{15}$$

## 2 算例分析及讨论

为了讨论分析碳纤维双层索的非线性共振特性,以便把碳纤维双层索与钢丝双层索进行研究比较,本文按照等轴向刚度准则、等强度准则分别构造了碳纤维比较结构,双层索结构的计算参数可见表 1。其中,1# 为钢丝绳网,2# 为与 1# 等截面的碳纤维索网,3# 为按照等轴向刚度准则构造的碳纤维索网,4# 为按照等强度准则构造的碳纤维索网。四种结构相同的计算参数为: $f_1=4\text{ m},f_2=3.5\text{ m},l=67\text{ m},H_1=700\text{ kN},H_2=800\text{ kN}$ 。

表 1 结构材料和截面特性

Tab. 1 The property of material and section

Strucuture	$E/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$	$A_1/\text{m}^2$	$A_2/\text{m}^2$	$m_1/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-1})$	$m_2/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-1})$	$\alpha_s/^{\circ}\text{C}$
1#	$1.7 \times 10^{11}$	$3.354 \times 10^{-3}$	$1.677 \times 10^{-3}$	374.15	187.07	$12 \times 10^{-6}$
2#	$1.47 \times 10^{11}$	$3.354 \times 10^{-3}$	$1.677 \times 10^{-3}$	280.62	140.29	$0.68 \times 10^{-6}$
3#	$1.47 \times 10^{11}$	$3.879 \times 10^{-3}$	$1.939 \times 10^{-3}$	324.62	162.31	$0.68 \times 10^{-6}$
4#	$1.47 \times 10^{11}$	$2.775 \times 10^{-3}$	$1.388 \times 10^{-3}$	252.19	116.09	$0.68 \times 10^{-6}$

把有关参数代入以上相关各式中,即可算得双层索网幅频曲线,具体计算结果如图 2—图 5 所示。其中,考虑阻尼影响时以参数 $\xi=\frac{\mu}{2M\omega_0}$ 表征,时程曲线图中 $x=\frac{1}{2},a=0.05\text{ m}$ 。

对图 2—图 5 的索幅频曲线进行分析可以知道:

(1) 当阻尼、外激励、温度一定时,随着谐调参数的增大索的共振区域及振幅也增大,2#、4# 索的共振区域及振幅均大于 1# 索的共振区域及振幅,3# 索的共振区域及振幅则小于 1# 索的共振区域及

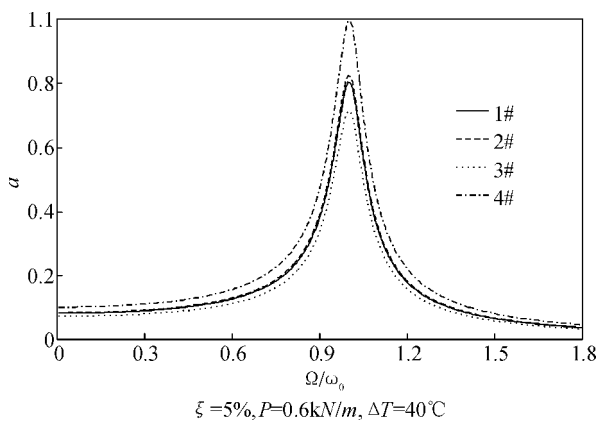


图 2 索幅频曲线

Fig. 2 The frequency curve of cable net

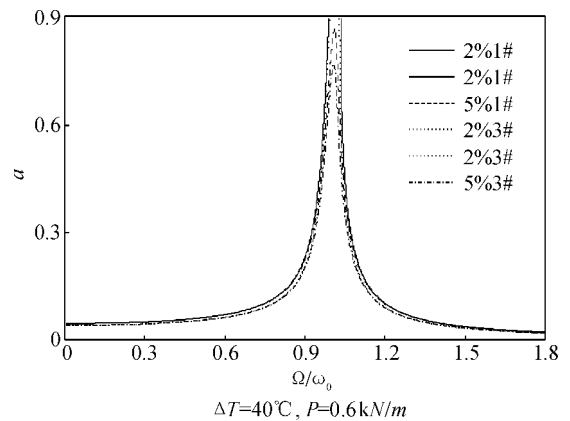


图 3 索幅频曲线

Fig. 3 The frequency curve of cable net

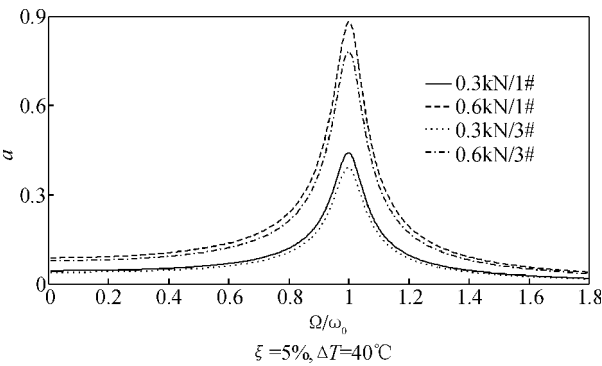


图 4 索幅频曲线

Fig. 4 The frequency curve of cable net

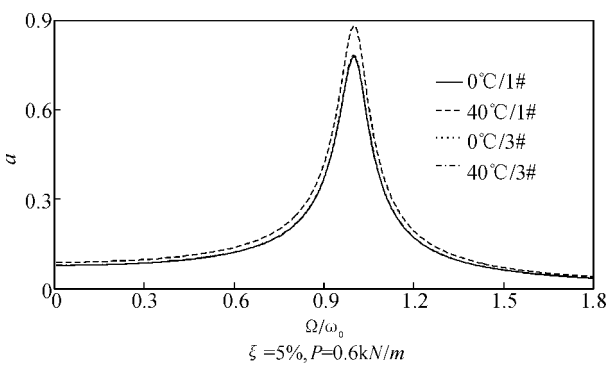


图 5 索幅频曲线

Fig. 5 The frequency curve of cable net

振幅,这表明横截面积较小的索具有起振速度快、振幅大的特点,且按照等轴向刚度准则设计的碳纤维索的共振区域及振幅均最小。

(2) 当阻尼及外激励一定时,温度升高会使索的共振区域及振幅增大,钢丝绳的共振区域及振幅大于按照等轴向刚度准则设计的碳纤维索的共振区域及振幅。且钢丝绳与碳纤维索相比,其共振区域及振幅受温度的影响更大些。

(3) 外激励及温度一定时,索的共振区域及振幅受阻尼的影响较大,随着阻尼的增大索的共振区域及振幅减小的很快,但是按照等轴向刚度准则设计的碳纤维索的共振区域及振幅低于钢丝绳的共振区域及振幅。

(4) 当阻尼及温度一定时,索的共振区域及振幅受外激励的影响较大,随着外激励的增大索的共振区域及振幅增大得很快,但是按照等轴向刚度准则设计的碳纤维索的共振区域及振幅低于钢丝绳的共振区域及振幅。

通过以上分析可知,当轴向刚度相同时,碳纤维索抗振性能优于钢丝绳。

3 结 论

(1)按照等轴向刚度准则设计的碳纤维索的共振区域及振幅均最小;当轴向刚度相同时,碳纤维索抗振性能优于钢丝绳。

(2)钢丝绳与碳纤维索相比,其共振区域及振幅受温度的影响更大些。

参考文献 References

[1] 杨庆山,孙学东. 椭圆平面双曲抛物面索网的自振特性[J]. 哈尔滨建筑大学学报,1997,30(4):35-40.  
YANG Qing-shan, SUN Xue-dong. Free vibration analysis of hyperbolic parabolic cable nets with ellipse planes[J]. Journal of Harbin University of C. E. & Architecture, 1997,30(4):35-40.

[2] 贾乃文. 线性强化材料索网的振动分析[J]. 力学与实践,2001,23(3):46-47.  
JIA Nai-wen. Vibration analysis of suspension network with linear hardening material [J]. Mechanics and engineering,2001,23(3):46-47.

[3] 石永久,吴丽丽,王元清. 单层正交索网非线性自振特性研究[J]. 振动工程学报,2006,19(2):173-178.  
SHI Yong-jiu, WU Li-li, WANG Yuan-qing. Analysis on nonlinear natural frequencies of cable net[J]. Journal of Vibration Engineering, 2006,19(2):173-178.

[4] 冯若强,武  岳,沈世钊. 单层平面索网结构非线性频率简化计算方法研究[J]. 工程力学,2007,24(10): 87-91.  
FENG Ruo-qiang, WU Yue, SHEN Shi-zhao. Study on simplified calculation method of nonlinear frequency of single-layer cable-net[J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(10):87-91 .

[5] 尚仁杰,李  谦,吴转琴,等. 基于最小能量原理的矩形平面预应力索网结构大变形自由振动研究[J]. 振动与冲击, 2007,26(9):158-161.

- SHANG Ren-jie, LI Qian, WU Zhuan-qin, et al. Large deformation vibration of a planar rectangular prestressed cable-net structure based on principle of minimum potential energy[J]. Journal of Vibration and Shock, 2007, 26(9): 158-161.
- [6] 吴 晓. 碳纤维材料双层索非线性自振的温度响应[J]. 西安建筑科技大学学报: 自然科学版, 2008, 40(2): 155-160.
- WU Xiao. The influence of temperature on the nonlinear free vibration of double-layer cable system with carbon fiber reinforced polymer [J]. J. Xi'an Univ. of Arch. & Tech.: Natural Science Edition, 2008, 40(2): 155-160.
- [7] 吴 晓. 碳纤维矩形双层索网屋盖体系非线性自振研究[J]. 西安建筑科技大学学报: 自然科学版, 2008, 40(4): 515-520.
- WU Xiao. Nonlinear vibration feature of rectangular two-layer cable net roof system using carbon fiber cables [J]. J. Xi'an Univ. of Arch. & Tech.: Natural Science Edition, 2008, 40(4): 515-520.
- [8] 苟昌焕, 谢 旭, 高金盛, 等. 应用碳纤维索的大跨度斜拉桥静力学特性分析[J]. 浙江大学学报: 工学版, 2005, 39(1): 137-142.
- GOU Chang-huan, XIE Xu, GAO Jin-sheng, et al. Static behavior of long-span cable-stayed bridges using carbon fiber composite cable[J]. Journal of Zhejiang University: Engineering Science, 2005, 39(1): 137-142.
- [9] 张治成, 谢 旭. 大跨度斜拉桥拉索设计方法以及碳纤维索的应用[J]. 浙江大学学报: 工学版, 2007, 41(9): 39-46.
- ZHANG Zhi-cheng, XIE Xu. Study on safety factor of cables and application of CFRP cables in long-span cable-stayed bridges[J]. Journal of Zhejiang University: Engineering Science, 2007, 41(9): 39-46.
- [10] 谢 旭, 朱越峰, 申永刚. 大跨度钢索和 CFRP 索斜拉桥车桥耦合振动研究[J]. 工程力学(增 D), 2007(24): 53-61.
- XIE Xu, ZHU Yue-feng, SHEN Yong-gang. Study on vibration of long-span cable-stayed bridge with steel and CFRP cables due to moving vehicles[J]. Engineering Mechanics(Suppl. D), 2007(24): 53-61.
- [11] 谢 旭, 高金盛, 苟昌焕, 等. 应用碳纤维索的大跨度斜拉桥结构振动特性[J]. 浙江大学学报: 工学版, 2005, 39(5): 728-733.
- XIE Xu, GAO Jin-sheng, GOU Chang-huan, et al. Dynamic characteristics of long-span cable-stayed bridge as using carbon fiber composite cables[J]. Journal of Zhejiang University: Engineering Science, 2005, 39(5): 728-733.
- [12] 季文美, 方 同, 陈松洪. 机械振动[M]. 北京: 科学出版社, 1985: 492-507.
- JI Wen-mei, FANG Tong, CHEN Song-hong. Mechanical vibration[M]. Beijing: Science Press, 1985: 492-507.

## Nonlinear resonance properties of the double-layer carbon fiber cable

WU Xiao, YANG Li-jun, SUN Jin

(Hunan University of Arts and Science, Changde 415000, China)

**Abstract:** For the purpose of guiding anti-wind and anti-earthquake design of this structure, i. e. the double-layer cable structure using CFRP, the resonance characteristics were studied, with the support system assumed as a continuum member. Its nonlinear vibration equation was presented under external excitation on the basis of considering temperature variations. And the approximate solution of nonlinear vibration and corresponding stationary solution of double-layer cable system using carbon fiber cables was given by adopting Galerkin principle and KBM method. Factors affecting this nonlinear resonance, are the amount of temperature variations, external excitation, harmonic parameters, as well as external damping that were discussed by comparing steel cable with carbon fiber cable.

**Key words:** carbon fiber cables; double-layer cable system; nonlinearity; resonance