

任意梯度分布功能梯度板条平面裂纹分析

程站起, 金建洲

(郑州大学土木工程学院, 河南 郑州 45001)

摘要: 提出一种可以分析任意梯度功能梯度材料的分层模型, 并采用该模型研究功能梯度板条平面裂纹问题. 采用 Fourier 变换和传递矩阵法将该混合边值问题化为奇异积分方程组, 通过数值求解获得应力强度因子. 考察了分层模型的有效性, 还讨论了材料梯度变化形式、结构几何尺寸和材料梯度参数对裂纹应力强度因子的影响, 发现结构几何尺寸、材料梯度变化形式、以及材料梯度参数均对应力强度因子有显著影响.

关键词: 功能梯度材料; 分层模型; 裂纹; 应力强度因子

中图分类号: O 341

文献标志码: A

文章编号: 1006-7930(2011)05-0741-06

1 引言

功能梯度材料是一种新型的功能复合材料, 由于其在降低应力集中、释放残余应力以及提高黏接性能等方面的优异性能, 已经在许多领域得以应用. 在功能梯度材料与结构的设计中, 断裂行为是一个非常重要的因素. 材料的非均匀性造成功能梯度材料的断裂行为非常复杂. 并且由于功能梯度材料性能的非对称性, 使得功能梯度材料的断裂形式通常为混合型的. 因此对于功能梯度材料的断裂分析来说, 最重要的任务也许是获得应力强度因子的解. 在过去的二十年中, 关于功能梯度材料断裂的研究已经做了很多工作. 例如, Delale 和 Erdogan^[1] 采用指数函数模型研究功能梯度材料的断裂问题, 结果发现裂纹尖端应力场仍然具有负平方根奇异性, Eischen^[2]、Jin 和 Noda^[3] 也证明只要材料弹性模量的变化形式为连续函数, 功能梯度材料的裂纹尖端应力场的主项就仍然具有负平方根奇异性, 而与其弹性模量的具体函数变化形式无关. 已有的文献(如 Delale 和 Erdogan^[4]; Jin 和 Batra^[5], Erdogan, Kaya 和 Joseph^[6]) 研究了功能梯度材料的一些典型裂纹问题, 研究发现, 弹性模量对应力强度因子有显著的影响, 而泊松比的影响几乎可以忽略. 也有一些学者(Craster 和 Atkinson^[7], Gerasoulis 和 Srivastav^[8]) 采用其他函数形式, 比如幂函数, 来模拟材料弹性模量的变化. 其他学者还发展了一些半解析方法来研究具有任意函数形式变化的功能梯度材料的断裂问题. 例如, Wang 等^[9] 采用的均匀分层模型, 即每一子层中的材料参数假定为常数. 黄干云和汪越胜等^[10] 提出的分层线性模型, 即每一子层中弹性模量为坐标的线性函数. 他们分别采用这两种模型分析了一系列典型断裂问题.

程站起和仲政^[11-12] 假设梯度材料的柔度模量为坐标的线性函数, 研究了功能梯度板条和涂层的平面裂纹问题. 本文根据文献[11, 12] 所得基本解, 提出一种可以分析任意梯度功能梯度材料平面裂纹问题的分层模型. 在该模型中将功能梯度材料分为若干子层, 在每一子层中材料柔度模量为坐标的线性函数, 在子层界面处保持连续. 采用本分层模型考虑功能梯度材料板条的平面裂纹问题, 通过 Fourier 变换和传递矩阵方法, 将混合边值问题化为奇异积分方程组, 进而数值求解奇异积分方程获得应力强度因子, 验证了本文模型的有效性, 同时考察了功能梯度材料梯度参数及其变化形式与结构的几何尺寸等对应力强度因子的影响.

2 分层模型

考虑一厚度为 $2h$ 的功能梯度板条, 其剪切模量和泊松比分别从下表面的 μ_1 和 ν_1 变化到 μ_2 和 ν_2 , 其

收稿日期: 2010-03-12 修改稿日期: 2011-07-26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10802078); 中国博士后科学基金资助项目(20100471006); 河南省优秀青年骨干教师资助项目(2010GGJS-023)

作者简介: 程站起(1973-), 男, 河南人, 副教授, 博士, 研究方向: 新型材料力学行为研究.

变化形式可以是坐标的任意函数,如图 1 所示。板条内部含有长度为 $2a$ 且平行于板条上下表面的贯穿裂纹。

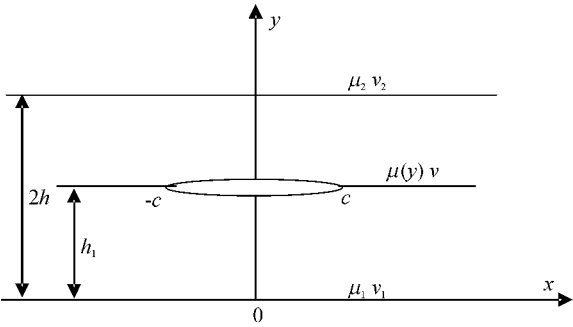


图 1 功能梯度板条中的平面裂纹
Fig. 1 The geometric condition of plane crack in functionally graded strip

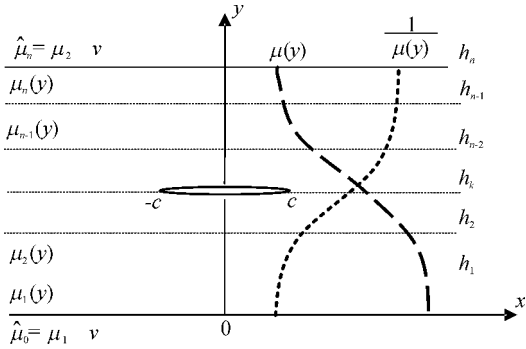


图 2 分层模型示意图
Fig. 2 Schematic map of the multi-layered model

在进行平面裂纹分析时可以按下述方式来建立梯度材料的分层模型: 将功能梯度板条分成若干子层(设共分 n 层), 在每一子层中, 材料柔度模量按相同的线性函数变化, 在任意两个子层界面上, 剪切模量及柔度模量连续且等于材料实际值, 如图 2 所示。假设其位于第 k 个子层界面上, 根据该模型在各子层中有

$$\zeta(y) = \frac{1}{\mu(y)} \approx \zeta_J(y) = \frac{1}{\hat{\mu}_J}(c_J + d_J y) = \frac{\hat{\zeta}_J}{\hat{\mu}_J}(c_J + d_J y) \quad (h_{J-1} \leq y \leq h_J) \tag{1}$$

其中 $\hat{\mu}_J$ 和 $\hat{\zeta}_J$ 分别为材料在子层界面 $y = h_J$ 的剪切模量及柔度模量, 即 $\hat{\mu}_J = \mu(h_J)$, $\hat{\zeta}_J = \zeta(h_J) = \frac{1}{\hat{\mu}_J} = \frac{1}{\mu(h_J)}$ 。而

$$c_J = \frac{h_J \zeta_{J-1}}{h_J - h_{J-1}}, \quad d_J = \frac{1 - \frac{\zeta_{J-1}}{\zeta_J}}{h_J - h_{J-1}} \tag{2}$$

在许多文献中均已证明泊松比对应力强度因子的影响很小^[1, 4], 因此本文中假设泊松比 $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ 为常量。

根据图 2 所示的直角坐标系, 引入应力函数 $F(x, y)$, 根据弹性体物理方程、几何方程与变形协调方程, 可以得到用应力函数 $F(x, y)$ 表示的任意第 J 层($J = 1, 2, 3, \dots, n$) 的平面应变问题控制方程为

$$\nabla^4 F_J + \frac{2d_J}{c_J + d_J y} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 F_J) = 0 \tag{3}$$

该混合边值问题的边界条件为

$$\sigma_{yy,1}(x, 0) = \sigma_{yy,1}(x, 0) = \sigma_{yy,n}(x, 2h) = \sigma_{yy,n}(x, 2h) = 0 \tag{4}$$

而梯度材料的各个子层界面处的连续性条件为

$$\sigma_{yy,J}(x, h_J) - \sigma_{yy,J+1}(x, h_J) = 0, \quad \sigma_{xy,J}(x, h_J) - \sigma_{xy,J+1}(x, h_J) = 0 \tag{5}$$

$$u_{x,J}(x, h_J) - u_{x,J+1}(x, h_J) = 0, \quad u_{y,J}(x, h_J) - u_{y,J+1}(x, h_J) = 0 \tag{6}$$

其中在裂纹面上的应力条件和位移间断以及连续性条件为

$$\sigma_{yy,k}(x, h_k) = -\sigma_1(x), \quad \sigma_{xy,k}(x, h_k) = -\sigma_2(x) \quad |x| \leq c \tag{7}$$

$$u_{x,k}(x, h_k) - u_{x,k+1}(x, h_k) = \Delta u_{xk}, \quad u_{y,k}(x, h_k) - u_{y,k+1}(x, h_k) = \Delta u_{yk} \quad |x| \leq c \tag{8}$$

$$u_{x,k}(x, h_k) - u_{y,k+1}(x, h_k) = 0, \quad u_{y,k}(x, h_k) - u_{y,k+1}(x, h_k) = 0 \quad |x| > c \tag{9}$$

3 求解过程

采用 Fourier 变换方法, 可以得到方程(2) 在变换域内的通解为:

$$F_J = A_{J1} \phi_{J1} + A_{J2} \phi_{J2} + A_{J3} \phi_{J3} + A_{J4} \phi_{J4} \tag{10}$$

其中 $F(s, y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) e^{-isx} dx$

$$\begin{aligned}\phi_{J1} &= e^{\xi_J} & \phi_{J2} &= e^{-\xi_J} \\ \phi_{J3} &= e^{\xi_J} Ei(-2\xi_J) - e^{-\xi_J} \ln \xi_J & \phi_{J4} &= e^{-\xi_J} Ei(2\xi_J) - e^{\xi_J} \ln \xi_J\end{aligned}\quad (11)$$

这里 $\xi_J = \frac{s(c_J + d_J y)}{d_J}$, $Ei(x) = -\int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$ 为指数积分函数, 而 A_{J1} , A_{J2} , A_{J3} 和 A_{J4} 待

定常数, 可以由功能梯度板条的边界条件确定. 相应地, 可以得到变换域内任一子层的应力和位移为

$$\{S_J\} = [T_J(y)]^T \{A_J\} = [T_{J1}(y), T_{J2}(y), T_{J3}(y), T_{J4}(y)]^T \{A_J\} \quad (12)$$

其中 $\{S_J\} = [\tilde{u}_{xJ}, \tilde{u}_{yJ}, \tilde{\sigma}_{yyJ}, \tilde{\sigma}_{xyJ}]^T$, $\{A_J\} = [A_{J1}, A_{J2}, A_{J3}, A_{J4}]^T$ 以及

$$[T_J(y)] = [T_{J1}(y), T_{J2}(y), T_{J3}(y), T_{J4}(y)]^T$$

其中: $T_{J1}(y) = \frac{1-\nu_J}{2is} \zeta_J \frac{d^2 \phi_{Jl}(y)}{dy^2} + \frac{\nu_J \zeta_J}{2i} \phi_{Jl}(y)$

$$T_{J2}(y) = \frac{1-\nu_J}{2s^2} \zeta_J \frac{d^3 \phi_{Jl}(y)}{dy^3} + \frac{1-\nu_J}{2s^2} d_J \frac{d^2 \phi_{Jl}(y)}{dy^2} + \frac{\nu_J-2}{2} \zeta_J \frac{d \phi_{Jl}(y)}{dy} + \frac{\nu_J}{2} d_J \phi_{Jl}(y)$$

$$T_{J3} = -s^2 \phi_{Jl}, T_{J4}(y) = -is \frac{d \phi_{Jl}}{dy}, l = 1, 2, 3, 4.$$

利用边界条件(4)–(9)得

$$\{S_J\} - \{S_{J+1}\} = \{\Delta S_k\} \hat{w} \quad y = h_J, J = 1, 2, \dots, n-1 \quad (13)$$

其中 $\Delta S_k = [\Delta \tilde{u}_{xk}, \Delta \tilde{u}_{yk}, 0, 0]^T$, $\Delta \tilde{u}_{xk}$ 和 $\Delta \tilde{u}_{yk}$ 为变换域内在裂纹面上的位移间断. 方程(13)实际上是一个递推公式, 利用它和式(4)–(6)可以得到任一子层中待定常数 $\{A_J\}$ 关于 $\{\Delta S_k\}$ 的表达式

$$\{A_J\} = [[\bar{L}_{Jk}] + [\bar{K}_{Jk}] H(J-k)] \{\Delta S_k\} \quad (14)$$

其中 $[\bar{L}_{Jk}] = [\bar{V}_{J-1}]^{-1} [E_k]$, $[E_k] = [\bar{V}_{n-1}] \{D_2\}^T \{D_1\} [\bar{W}]^{-1} [L_k]$, $[\bar{V}_J] = [V_1] [V_2] \cdots [V_J]$, $[\bar{W}] = \{\{Q_1\}\{Q_2\}\}^T$, $\{Q_1\} = [D_1] [T_n(h)]$, $\{Q_2\} = [D_1] [T_1(0)]$, $[L_k] = [\bar{V}_{k-1}]^T [T_k(h_k)]^{-1}$, $[V_J] = [T_J(h_J)]^{-1} [T_{J+1}(h_J)]$, $[\bar{K}_{Jk}] = -[\bar{V}_{J-1}]^{-1} [L_k]$, $[D_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $[D_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

将方程(14)代入(12), 并进行 Fourier 逆变换, 同时根据裂纹面边界条件(7)可得

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(s, h_k) \{\Delta \tilde{u}_{xk}, \Delta \tilde{u}_{yk}\}^T \exp(isx) ds = \{-\sigma_1(x), -\sigma_2(x)\}^T \quad |x| \leq c \quad (15)$$

其中 $\omega(s, h_J) = [D_1] [M_{Jk}] [D_2]^T$, 由位移连续性条件(9)得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{\Delta \tilde{u}_{xk}, \Delta \tilde{u}_{yk}\}^T \exp(isx) ds = 0, \quad |x| > c \quad (16)$$

则方程(15)和(16)即为采用本分层模型得到的功能梯度板条问题的对偶积分方程. 为得到奇异积分方程组, 引入如下位错密度函数:

$$\eta_l(x) = \frac{\partial}{\partial x} (\Delta u_{xl}) \quad \eta_b(x) = \frac{\partial}{\partial x} (\Delta u_{yb}), \quad |x| \leq c \quad (17)$$

根据 Fourier 积分变换的性质, 方程(15)和(16)化为

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} s^{-1} \tilde{\omega}(s, h_k) \int_{-c}^c \{\eta_l(\alpha), \eta_b(\alpha)\}^T e^{is(x-\alpha)} d\alpha = \{\sigma_1(x), \sigma_2(x)\}^T \quad (18)$$

$$\int_{-c}^c \{\eta_l(\alpha), \eta_b(\alpha)\}^T d\alpha = 0 \quad (19)$$

考虑指数积分函数的渐近性质, 可以证明如下性质:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^{-1} \tilde{\omega}(s, h_k) = -\beta [I] \quad (20)$$

其中 $\beta = \frac{\mu(h_k)}{2(1-\nu)}$, $[I]$ 为 2×2 单位矩阵. 并且 $\omega(s, h_l)$ 具有下面的性质:

$$\tilde{\omega}(-s, h_k) = (-1)^{j+l} \tilde{\omega}(s, h_k) \quad j, l = 1, 2 \quad (21)$$

利用解析函数的性质可以将方程(18)转化为 Cauchy 奇异积分方程, 然后采用 Erdogan^[13] 发展的

方法数值求解, 注意到位错密度函数具有平方根奇异性, 假设它们的形式为

$$\eta_l(\alpha) = \frac{f_l(\alpha)}{\sqrt{1 - (\frac{\alpha}{c})^2}}, \quad \eta_p(\alpha) = \frac{f_p(\alpha)}{\sqrt{1 - (c)^2}} \tag{22}$$

利用 Chebyshev 多项式性质, 将方程(22) 代入方程(18) 和(19) 得到如下线性代数方程组

$$\frac{c}{M} \sum_{n=1}^M \left\{ \frac{f_l(\alpha_n)}{\alpha_n - x_r} + \sum_{l=1}^2 f_l(\alpha_n) Z_{ll}(\alpha_n, x_r) \right\} = -\frac{1}{\beta} \sigma_j(x_r) \quad j = 1, 2 \tag{23}$$

$$\frac{1}{M} \sum_{n=1}^M f_j(\alpha_n) = 0 \quad j = 1, 2 \tag{24}$$

这里

$$Z_{jl}(\alpha, x) = \frac{1}{\beta} \int_0^\infty (is)^{-1} \omega_{jl}(s) \cos(s(\alpha - x)) ds, \quad j \neq l, \quad j, l = 1, 2$$
$$Z_{jl}(\alpha, x) = - \int_0^\infty (\frac{s^{-1} \omega_{jl}(s)}{\beta} + 1) \sin(s(\alpha - x)) ds, \quad j = l, \quad j, l = 1, 2$$

其中 $\alpha_n = c \cos(\frac{(2n-1)\pi}{2M})$, $x_r = c \cos \frac{\pi r}{M}$, $r = 1, 2, \dots, M-1$, 而 M 是 $f_j(\alpha)$ 在 $(-c, c)$ 中的离散点总数.

通过求解上述代数方程组可得离散点上的值 $f_j(\alpha_n)$, 而其他点上的 $f_j(\alpha)$ 值可以通过插值得到.

裂纹尖端的应力强度因子定义为

$$K_I^\pm = \lim_{x \rightarrow \pm c} \sqrt{2|x \pm c|} \sigma_{yy}(x, h_1), \quad K_{II}^\pm = \lim_{x \rightarrow \pm c} \sqrt{2|x \pm c|} \sigma_{xy}(x, h_1) \tag{25}$$

利用 Chebyshev 多项式的性质, 再由方程(18) 可以得到应力强度因子

$$K_I^\pm = \mp \beta \sqrt{c} f_2(\pm c), \quad K_{II}^\pm = \mp \beta \sqrt{c} f_1(\pm c) \tag{26}$$

4 算例与讨论

如果已知梯度材料剪切模量的变化形式、板条的厚度、裂纹尺寸、以及外载荷, 即可利用上述公式求解裂纹应力强度因子. 为了验证本模型的有效性, 先考虑材料的剪切模量以指数函数形式变化的情况, 即

$$\mu(y) = \mu_1 e^{\beta y} \tag{27}$$

其中 $\beta = \frac{1}{2h} \ln(\frac{\mu_1}{\mu_2})$. Erdogan^[1] 最早用这种变化形式研究功能梯度材料的裂纹问题, 并且黄干云等^[10] 将其称为 Erdogan 模型, 本文也称为 Erdogan 模型.

一般认为 Erdogan 模型不需要分层模拟, 其所得结果被认为是精确的, 采用本文所发展的分层模型计算的结果与其相比较可以证明本文模型正确与否. 为了与 Erdogan 模型进行比较, 图 3 给出了 $\frac{\mu_1}{\mu_2} = 10$, $\nu = 0.3$ 时, 分别采用 Erdogan 模型和分层数目 N 取值为 6 时本分层模型, 计算剪切模量以指数函数形式变化的功能梯度板条中线裂纹($h_k = h$) 所得无量纲应力强度因子随 c/h 变化的情况. 从图中可以看出, 在法向载荷作用下, 本模型所得 $\frac{K_I}{\sigma_0 c^{1/2}}$ 与 Erdogan 模型所得结果非常接近, 而 $\frac{K_{II}}{\sigma_0 c^{1/2}}$ 与 Erdogan 模型所得结果有些偏差. 考虑到法向载荷作用下 $\frac{K_{II}}{\sigma_0 c^{1/2}}$ 比较小, 且偏差也不大, 因此认为本文所发展的分层模型是比较有效的. 同时在图中也给出了分层数目 N 取值为 6 时层合板模型(PWML) 所得结果. 从图中可以发现, 在法向载荷作用下, 层合板模型所得的 $\frac{K_I}{\sigma_0 c^{1/2}}$ 和 $\frac{K_{II}}{\sigma_0 c^{1/2}}$ 与 Erdogan 模型所得结果均有一定的偏差, 且随着 c/h 的增大, 偏差也越大, 而本模型所得结果均更接近 Erdogan 模型的结果. 这就说明, 在相同的分层数目下, 采用本模型所得结果比层合板模型更接近于 Erdogan 模型的结果, 即要达到相同的计算精度, 层合板模型比本文模型需划分更多的层数, 因此本文模型比层合板模型更有效.

正如前文所述, 本文模型可以用来求解材料参数具有任意变化形式的的功能梯度材料的断裂问题, 作为一个验证, 考虑材料的剪切模量为下面这两种变化形式:

$$\mu = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1) \sin(\frac{\pi y}{4h}) \tag{28}$$

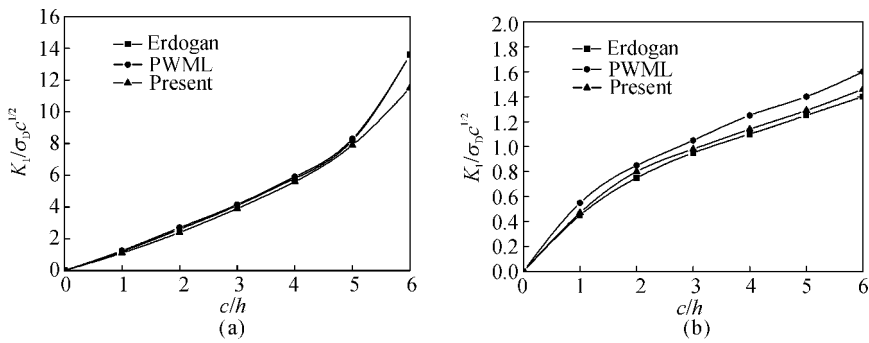


图 3 法向载荷作用下 $\frac{\mu_1}{\mu_2} = 10, \nu = 0.3$ 时功能梯度板条中线裂纹

无量纲应力强度因子: (a) I 型; (b) II 型

Fig. 3 Normalized SIFs of midline crack in a FGMs strip with exponential variation under normal loading

($\frac{\mu_1}{\mu_2} = 10, \nu = 0.3$): (a) mode I and (b) mode II

$$\mu = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1) \left(\frac{y}{2h} \right)^2 \tag{29}$$

这两个梯度变化形式是不能用 Erdogan 模型求解的, 但可以采用本文模型求解. (28) 和 (29) 式分别称为 Sinusoidal 模型和 Parabolic 模型, 同时为了比较, 在图中均绘出均匀材料板条 (Homogeneous) 和指数函数形式 (Exponential) 梯度材料板条的应力强度因子的曲线, 取 $\frac{\mu_1}{\mu_2} = 10, \nu = 0.3$, 图 4 给出了法向载荷作用下功能梯度板条中线裂纹 ($h_k = h$) 无量纲应力强度因子随 c/h 变化的情况. 从图中可以发现, 对于相同的 $\frac{\mu_1}{\mu_2}$, 当 c/h 很小时, 剪切模量的变化形式对应力强度因子的影响并不大, 但随着 c/h 的增大, 剪切模量的变化形式对应力强度因子的大小具有一定的影响. 因此可以通过选择合适的材料梯度变化形式提高功能梯度材料的断裂性能.

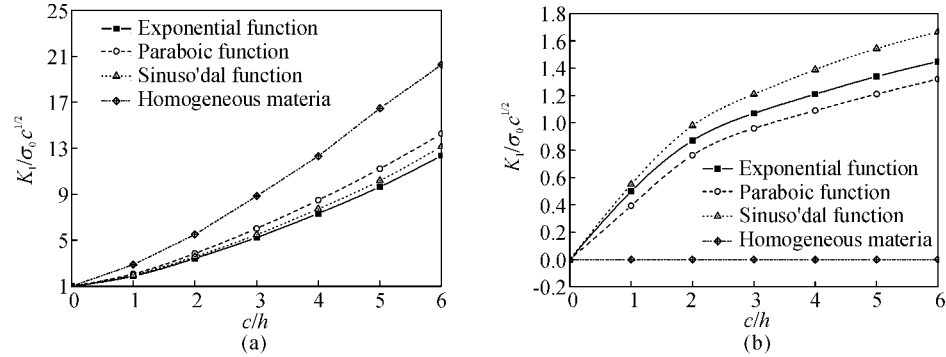


图 4 法向载荷作用下 $\frac{\mu_1}{\mu_2} = 10, \nu = 0.3$ 时梯度函数形式对功能梯度板条

中线裂纹无量纲应力强度因子: (a) I 型; (b) II 型

Fig. 4 The influence of the variation manner of shear modulus on the normalized SIFs of midline crack in

a FGMs strip under normal loading ($\frac{\mu_1}{\mu_2} = 10, \nu = 0.3$). (a) mode I and (b) mode II

5 结 论

本文给出了一个能够分析任意梯度功能梯度材料平面裂纹问题的分层模型, 并通过该模型研究了功能梯度板条平面裂纹问题. 数值求解奇异积分方程得到功能梯度板条裂纹应力强度因子. 考察了本模型的有效性和精确性, 以及材料梯度形式和结构尺寸对应力强度因子的影响. 研究表明本文所提分层模型能够有效研究任意梯度功能梯度材料断裂问题, 材料梯度变化形式和结构几何尺寸对裂纹应力强度因子均有一定影响.

参考文献 References

- [1] DELALE F, ERDOGAN F. The crack problem for a nonhomogeneous plane [J]. ASME J. App. Mech., 1983, 50: 609-614.
- [2] EISCHEN J W. Fracture of nonhomogeneous material[J]. Int. J. Fracture, 1987, 34: 3-22.
- [3] JIN ZH, NODA N. Crack tip singular fields in nonhomogeneous materials [J]. ASME J. App. Mech., 1994, 61: 738-740.
- [4] DELALE F, ERDOGAN F. On the mechanical modeling of the interfacial region in bonded half-planes [J]. ASME J. App. Mech., 1988, 55: 317-324.
- [5] JIN ZH, BATRA RC. Some basic fracture mechanics concepts in functionally graded materials [J]. Journal of the Mechanics and Physics Solids, 1996, 44: 1221-1235.
- [6] ERDOGAN F, KAYA AC, JOSEPH P F. The crack problem in bonded nonhomogeneous materials [J]. ASME J. App. Mech., 1991, 58: 410-418.
- [7] Craster RV, Atkinson C. Mixed boundary value problems in non-homogeneous elastic materials [J]. Quar. J. Math., 1994, 47: 183-206.
- [8] GERASOULIS A, SRIVASTAV R P. A Griffith crack problem for a nonhomogeneous medium [J]. Int. J. Enging. Sci., 1980, 18: 239-247.
- [9] WANG BL, HAN JC, DU SY. Cracks problem for nonhomogeneous composite material subjected to dynamic loading [J]. Int. J. of Solids and Structures, 2000, 37: 1251-1274.
- [10] 黄干云, 汪越胜, 余寿文. 功能梯度材料的平面断裂力学分析[J]. 力学学报, 2005, 37(1): 1-8.
HUANG GY, WANG YS, YU SW. A new multi-layered model for in plane fracture analysis of functionally graded materials (FGMs)[J]. Chinese Journal of Theoretical and applied Mechanics, 2005, 37(1): 1-8.
- [11] 程站起, 仲 政. 功能梯度板条断裂分析[J]. 力学季刊, 2005, 26(4): 544-548.
CHENG ZQ, ZHONG Z. Fracture analysis of functionally graded strip[J]. Chinese Quarterly Journal of Mechanics, 2005, 26(4): 544-548.
- [12] 程站起, 仲 政. 功能梯度涂层平面裂纹分析[J]. 力学学报, 2007, 39(5): 685-691.
CHENG ZQ, ZHONG Z. Fracture analysis of functionally graded coating under plane deformation[J]. Chinese Journal of Theoretical and applied Mechanics, 2007, 39(5): 685-691.
- [13] ERDOGAN F. Complex function technique[M]. Continuum Physics, Vol. XII. New York : Academic Press, 1975.

Plane crack problem for functionally graded strip with arbitrarily distributed properties

CHENG Zhan-qi, JIN Jian-zhou

(School of Civil Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China)

Abstract In this paper, a multi-layered model is developed and the plane elasticity problem for a functionally graded strip containing a crack has been considered by using this model. By utilizing the Fourier transformation technique and the transfer matrix method, the mixed boundary problem is reduced to a system of singular integral equations that are solved numerically. The influences of the graded variation of material parameters and geometric parameters on the stress intensity factors are investigated. The numerical results show that the graded variation of material parameter has significant effects on the stress intensity factors.

Key words: *functionally graded materials; multi-layered model; crack; stress intensity factors*