

悬索桥主缆线形确定的常用精确解析算法比较及电算高效实现方法研究

景天虎^{1,2}, 李 桅¹, 李青宁^{1,3}, 张品乐¹

(1. 西安建筑科技大学土木工程学院, 陕西 西安 710055; 2. 桂林理工大学土木与建筑学院, 广西 桂林 541004;
3. 西部建筑科技国家重点实验室(筹), 陕西 西安 710055)

摘 要:以悬索桥主缆线形确定的常用精确数值解析算法为研究对象, 通过对它们的比较分析和公式推导发现: 在主缆理想柔性、忽略泊松比效应的最基本假定下, 主缆线形确定的精确数值解析法可归结为主缆自重集度按其有、无应力长度计算作为已知条件的两大类算法; 并且证明了在每大类解析算法中的所有方法是完全等价的。研究还表明: 第二类解析算法为“全精确解析算法”, 第一类为“准精确解析算法”; 在第一类算法中, 主缆无应力长度公式的计算值偏小。仅就悬索桥主缆成桥态线形确定而言, 主缆线形确定的两大类数值解析算法都具有很高的工程精度, 但第二类算法的主缆自重集度的确定更为精确、更接近实际情况, 实际计算时应优先使用它。另外, 针对两类解析算法涉及到大量的超越方程求解和递推迭代计算的情况, 提出了基于MATLAB软件的高精度电算实现方法。最后, 给出一个超大跨径悬索桥的中跨主缆线形确定的验证算例。

关键词:桥梁工程; 悬索桥; 数值解析算法; 主缆线形确定; MATLAB

中图分类号: U448.25

文献标志码: A

文章编号: 1006-7930(2011)06-0821-10

悬索桥是跨越能力最大的一种桥型, 到目前为止它是 1 000 m 以上的大跨度桥梁的首选桥型之一^[1-3]。缆索系统, 是悬索桥的主要承重结构, 也是悬索桥设计的一个关键构件。主缆线形的正确与否, 将直接影响到主缆的下料长度、各索夹的安装位置以及相应的吊索长度等参数的正确与否。这些参数的误差又将直接影响悬索桥的成桥线形和受力状况, 最终关系到桥面线形, 影响使用功能, 因此缆索系统计算也是大跨度悬索桥施工控制中的一项重要内容。在分析悬索桥主缆线形时, 一种方法是采用能考虑结构大位移和初应力影响的非线性有限元法, 另一种方法是采用数值解析法, 根据主缆自身的平衡条件自动考虑各种非线性因素的影响, 或者将二者结合起来。而用数值解析法可以比较简单地处理有限元法难以处理的诸如主缆与鞍座的接触问题和鞍座的顶推等问题, 当吊索力确定时, 其解答便是精确的, 而且还有输入数据少、计算速度快等优点^[3]。因而主缆线形的数值解析法在悬索桥分析理论中倍受重视, 也有多位研究者对此方法进行了许多发展和研究。

在主缆线形确定的数值解析法中, 传统的计算方法假定自重作用下主缆线形为抛物线(后文简称为抛物线近似法), 它与实际线形相差较大^[4-5]。再通过对悬索桥结构体系受力特点的深入研究和大量计算分析论证发现, 悬索桥在上述荷载下的成桥各跨线形并非理想的抛物线, 也不是理想的悬链线, 而是主缆在吊索之间的各索段在自重作用下呈悬链线(即分段悬链线, 非全跨悬链线)。该计算方法除了将悬索桥主缆简化为理想柔性索和忽略截面泊松比效应的一些最基本假定外, 推导过程中没有任何近似, 因此是一种用数值迭代计算解决给定的问题、且精确的解析方法。在后文中把这种方法简称为悬链线解析法。综观现有文献可知, 它们介绍的悬索桥主缆线形确定方法的计算步骤基本一致, 其基本依据都是悬链线参数方程, 但悬链线参数方程的形式有较大差异。进一步仔细研究后发现, 这些精确解析算法又可分为两大类: ①稍早文献提出的、主缆自重集度按其有应力长度计算作为已知条件的解析算法; ②稍后

收稿日期: 2010-10-15 修改稿日期: 2011-10-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51078306); 教育部高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20106120110004); 西安建筑科技大学重大科技项目创新基金资助项目(ZX0901)

作者简介: 景天虎(1972-), 男, 陕西富平县人, 博士, 讲师, 主要从事大跨度桥梁的结构分析理论研究。

文献提出的、主缆自重集度按其无应力长度计算作为已知条件的解析算法。

既然这些方法都是精确解析算法,那么,各文献所提出的方法之间到底存在什么关系,从数学物理本质上看是否等价,各方法的优、缺点是什么,以及精度如何?另外,悬链线解析法的实现过程中要求解超越代数方程,涉及到大量数值迭代、递推迭加运算。对于超大跨径悬索桥主缆而言,因其吊索分割的主缆索段数量较常规悬索桥的大许多。如何保证电算程序求解非线性方程(组)的精度,以及如何尽量减少计算累积误差?限于篇幅,本文仅以绝大部分已建悬索桥所采用的平面缆索、且吊索竖直的主缆为例,对上述问题进行探讨;但分析结论对采用倾斜吊索、空间缆索的悬索桥主缆也是适用的。最后用一个主跨 3 300 m 的超大跨径悬索桥的中跨主缆确定的算例来验证本文的分析结论。

1 总说明和基本参数声明

因各个文献进行公式推导时所采用的坐标系和变量符号不统一。本文规定:如图 1 和图 2 所示,局部坐标系以两吊点间悬索段的左端点为原点, x 轴、 y 轴分别向右、向下为正方向;整体坐标系以左主塔的主鞍座处主缆的理论交点 I_P^L 为原点, X 轴、 Y 轴分别向右、向下为正方向;索端力以图中所示方向为正。 q 和 q_0 分别为按主缆有、无应力长度计算的自重集度; E 为主缆材料弹性模量; A 为横截面积; S_i 和 S_{i0} 为第 i 段两吊点间整段悬链线的有、无应力长度, S 和 S_0 为全跨两理论交点间整段主缆的有、无应力长度^[6]。

在图 2 中, P_i 为第 i 根吊杆的张力; I_P^L, I_P^R 分别为成桥态的主缆左、右端主缆的理论交点,由设计拟定,为已知量。 H_i, V_i 分别为主缆节点处索力的水平、竖直分量。由于吊索竖直,故全跨主缆索力的水平分量相等,即可令 $H_i = H$; l_i 和 h_i 分别为两吊点间整段悬链线的水平和竖直投影长度,其中 l_i 由设计拟定,为已知量。

在局部坐标系中(见图 1),悬链线上任意 M 点的笛卡尔坐标为 (x, y) , Lagrange 坐标为 (s) 或 (s_0) (s 和 s_0 分别为从原点起算的悬链线有应力长度和无应力长度), $T(s)$ 和 $\theta(s)$ 分别为主缆 M 点的轴力及其与 x 轴的夹角; T_i 和 θ_0 分别为原点处的主缆轴力及其与 x 轴的夹角。因为假定主缆为完全理想柔性索,悬链线上任意点处的主缆轴力方向与该点的曲线切线方向相同。 x_{ai} 为第 i 段悬链线上最低点的水平轴坐标, α_i 和 β_i 为计算参数。它们的表达式如下:

$$x_{ai} = \frac{l_i}{2} + \frac{H}{q} \operatorname{arcsch} \left(\frac{\beta_i \cdot h_i}{l_i \cdot \operatorname{sh}(\beta_i)} \right); \quad (0a)$$

$$\beta_i = \frac{q \cdot l_i}{2 \cdot H}; \alpha_i = \operatorname{arcsch} \left(\frac{\beta_i \cdot h_i}{l_i \cdot \operatorname{sh}(\beta_i)} \right) + \beta_i \quad (0b, 0c)$$

为便于分析比较,首先对原文献的坐标系和变量符号进行了统一,并对因坐标轴方向调整引起的原公式表达式中个别变量前面的正负号作了相应调整。

2 主缆自重集度 q 按其有应力长度计算作为已知条件的悬链线解析法分析

2.1 对本文未加详细分析的两种算法的简要说明

(1) 文献[7] (2004 年) 的作者在其多篇公开发表的论文中详尽阐述的主缆线形确定的解析法实际上是一种近似解法。该文将主缆自重看作是沿弧长均布,加劲梁、吊索、索夹和桥面等其余恒载看作是沿桥长均布,它所依据的主缆曲线竖直方向的平衡微分方程,在文献[8] (1996 年) 的“(三) 近似计算方法

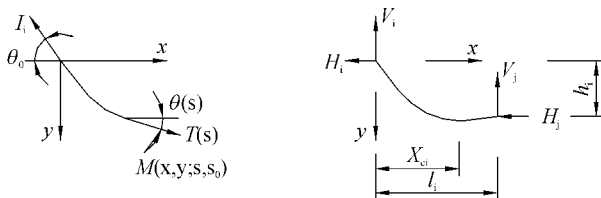
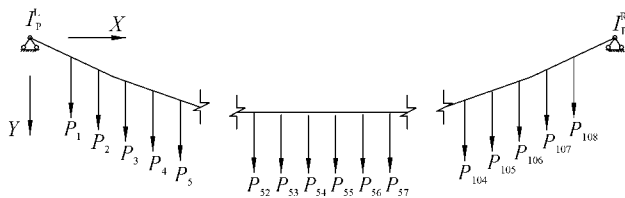


图 1 悬索桥主缆确定的局部坐标系计算模型

Fig. 1 Calculation model in the local coordinate system for shape-finding of main cables in suspension bridges



……2. 线悬链线的组合曲线”部分已经提出. 文献[8] 把该近似方法简称为组合索法(即主缆自重以外的恒载对应的抛物线与主缆自重沿弧长均布对应的悬链线的组合), 并认为该非线性微分方程难以直接求解, 假定了满足边界条件的近似解. 文献[7] 只是通过引入一个参变量, 来求解该参数方程的. 另外, 文献[7] “加劲梁、吊索、索夹和桥面等其余恒载看作是沿桥长均布”的做法, 与抛物线近似法是相同的: 即把微分索段单独拿出来建立竖直方向的平衡微分方程时, 主缆自重以外的恒载没有直接作用在主缆微分段上, 文献[7] 隐含使用了悬索桥分析的理论挠度理论(即古典膜理论, 该方法属于近似解析法) 的假定, 即把沿主缆离散分布的吊索看成沿主缆连续分布的膜; 通过该连续膜主缆自重以外的恒载传递到主缆上. “组合索法”较“抛物线近似法”精确之处在于考虑了主缆自重沿弧长均布的实际情况.

(2) 文献[9](1999 年) 提出的虚拟梁法是一种主缆线形确定的精确解析法, 其原始思想在文献[8] (1996 年, 文中称为简支梁弯矩比拟法, 简称为简比法) 和文献[10] (1992 年, 文中称为简支梁等代梁法) 已有说明. 虚拟梁精确之处在于: 摒弃了文献[8] 和文献[10] 的“将主缆沿索长均布的恒载近似为沿水平跨度均布”的做法, 将主缆自重看作是沿弧长均布; 两吊点间悬索段看作悬链线, 主缆自重以外的恒载通过吊索集中力作用到主缆上. 然后所有吊点处的竖向线形坐标和主缆水平分量先被假定出来, 这样所有两吊点间悬索段的悬链线方程唯一确定. 据此精确确定虚拟梁在各节点处的等效弯矩. 最后根据索上任意点 y 坐标与等效弯矩间的关系建立 $n+1$ 阶超越代数方程组(n 为吊点总数), 即虚拟梁法要求解与吊点数目多 1 的一组非线性方程, 列式和求解的工作量较大. 超大跨径的悬索桥因吊索数目较常规跨径的悬索桥大很多, 应用该法更显繁琐. 可能基于这个原因, 文献[9] 的作者在其参编的文献[11] 中只介绍了文献[12] 的方法, 并未介绍虚拟梁法.

2.2 各种解析算法的比较

2.2.1 各算法的要点列举

(1) 文献[8] (1996 年) 的方法(下文简称为 96 算法)

在图 1 所示的局部坐标系中, 索曲线为悬链线, 满足边界条件的索曲线方程为

$$y_i(x) = \frac{H}{q} \left[\operatorname{ch}(\alpha_i) - \operatorname{ch}\left(\frac{2\beta_i \cdot x}{l_i} - \alpha_i\right) \right] \quad (1)$$

悬索段高差 h_i 应满足如下几何边界条件:

$$\sum_{i=1}^m h_i = f, \quad \sum_{i=1}^{n+1} h_i = \Delta y \quad (2)$$

式中: m, n 分别为左鞍座到跨中(或任意已知吊点)的吊索数和整跨吊索总数; f 为主缆跨中(或任意已知吊点的)矢高; Δy 为两个主鞍座理论交点 IP 点的 y 坐标之差.

各吊点处力的平衡条件为

$$H_i = H, \quad H \frac{dy_{i-1}}{dx_{i-1}} \Big|_{x_{i-1}=l_{i-1}} - H \frac{dy_i}{dx_i} \Big|_{x_i=0} = P_{i-1} \quad (3a, 3b)$$

迭代计算过程简介:

① 定一个 I_p^L 点的主缆索力水平和竖向分量的迭代初始值为 H_0 和 V_0 ; ② 在紧邻 I_p^L 点的第 1 个悬索段中, 由(1)式有 $H \cdot \operatorname{sh}(\alpha_1) = V_0$, 于是可求得 α_1 和 β_1 ; 同时, 第 1 个的索段高差为 $h_1 = H[\operatorname{ch}(\alpha_1) - \operatorname{ch}(2\beta_1 - \alpha_1)]/q$, $H \cdot dy_1/dx_1|_{x_1=l_1} = -H \cdot \operatorname{sh}(2\beta_1 - \alpha_1)$. 后续步骤是在其他悬索段上按步骤②的方法循环求解各段的 h_i , 最后检查几何条件是否满足, 并依据误差情况修正初始值 H_0 和 V_0 .

(2) 文献[12] (1998 年) 的方法(下文简称为 98 算法)

在图 1 所示的局部坐标系中, 任意自由索段端点力与索上任意点 M 的坐标间的函数关系为

$$x_i(s) = \frac{H}{q} \left[\operatorname{arcsch}\left(\frac{V_i}{H}\right) - \operatorname{arcsch}\left(\frac{V_i - q \cdot s}{H}\right) \right] \quad (3)$$

$$y_i(s) = \frac{H}{q} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{V_i}{H}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{V_i - q \cdot s}{H}\right)^2} \right] \quad (4)$$

吊点间任一索段整段悬链线应满足如下关系:

$$l_i = \frac{H}{q} \left[\operatorname{arcsch} \left(\frac{V_i}{H} \right) - \operatorname{arcsch} \left(\frac{V_i - q \cdot S_i}{H} \right) \right] \quad (5)$$

$$h_i = \frac{H}{q} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{V_i}{H} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{V_i - q \cdot S_i}{H} \right)^2} \right] \quad (6)$$

h_i 应满足的几何边界条件同式(2). 各吊点处力的平衡条件为

$$H_i = H, V_i = V_{i-1} - (P_{i-1} + q \cdot S_{i-1}) \quad (7a, 7b)$$

迭代计算过程简介:

① 同 96 算法; ② 在紧邻 I_P^l 点的第 1 个悬索段中, 求解超越代数方程式(5) 得出 S_1 ; 把 S_1 代入式(6) 得到 h_1 . 后续步骤是在其他悬索段上按步骤 ② 的方法循环求解各段的 h_i , 最后检查几何条件是否满足, 并依据误差情况修正初始值 H_0 和 V_0 . 为了加快迭代收敛, 该文献提出, 让索端力产生单位增量求得影响矩阵, 用影响矩阵推求 I_P^l 点的主缆索力水平和竖向分量的修正值^[12-13].

(2) 文献[13] (2008 年) 的方法(下文简称为 08 算法)

在图 1 所示的局部坐标系中, 索曲线为悬链线, 满足边界条件的索曲线方程为

$$y_i(x) = \frac{H}{q} \left[\operatorname{ch} \left(\frac{q \cdot x_{ci}}{H} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{q \cdot (x - x_{ci})}{H} \right) \right] \quad (8)$$

h_i 应满足如下几何边界条件和各吊点处力的平衡条件同 96 算法.

迭代计算过程简介:

① 同 96 算法; ② 在紧邻 I_P^l 点的第 1 个悬索段中, 根据原点处曲线切线方向与索轴力的竖向、水平分量间的关系由(1) 式有 $H \cdot \operatorname{sh}(q \cdot x_{c1}/H) = V_0$, 即 $x_{c1} = (H/q) \cdot \operatorname{arcsch}(V_0/H)$. 同时 $h_1 = H[\operatorname{ch}(q \cdot x_{c1}/H) - \operatorname{ch}(q \cdot (l_1 - x_{c1})/H)]/q$, $H \cdot dy_1/dx_1|_{x_1=l_1} = -H \cdot \operatorname{sh}[q \cdot (l_1 - x_{c1})/H]$. 后续步骤同 98 算法.

2.2.2 对各算法的比较分析

(1) 把式(0_a, 0_b, 0_c) 代入 08 算法的式(8) 即可得到 96 算法的式(1). 由此可见, 二者所依据的悬链线曲线方程完全等价. 同理, 迭代计算过程计算得到的 h_i 也完全相等, 故 08 算法和 96 算法是完全等价的.

(2) 利用理想柔索微段的平衡关系可得, $V_i/H = \operatorname{tg}(\theta_0)$, $(V_i - q \cdot s)/H = \operatorname{tg}(\theta(s))$ (见图 1). 那么, 98 算法的式(4) 可化成如下形式

$$y_i(s) = \frac{H}{q} \{ \sec(\theta_0) - \sec[\theta(s)] \} \quad (9)$$

再由 96 算法的式(1) 得, $\operatorname{tg}(\theta_0) = \operatorname{sh}(\alpha_i)$, $\operatorname{tg}[\theta(s)] = -\operatorname{sh}(2\beta_i \cdot x/l_i - \alpha_i)$. 利用双曲正、余弦函数的关系 $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$, 96 算法的式(1) 应也可变成式(9). 另外, 利用理想柔索微段的平衡关系还可知, 96 算法的式(3b) 和 98 算法的式(7b) 亦是完全相等的.

至于 98 算法的式(3), 可参考文献[14] (在文献[14] 中是对无应力索曲线微分长度 ds_0 积分的), 利用 $dx/ds = H/T(s)$, $T(s) = \sqrt{H^2 + (V_i - q \cdot s)^2}$, 对有应力索曲线微分长度 ds 在有应力索长的 Lagrange 坐标区间 $(0, s)$ 上积分, 由边界条件 $s = 0$ 时, $x(s) = 0$ 即可得到式(3).

从而证明了 96 算法、98 算法和 08 算法完全等价.

(3) 索长计算公式分析

96 算法、98 算法和 08 算法所依据的有应力索段长度的计算公式形式和繁简程度差异较大, 但最终都可化为如下最为简洁的形式^[15, 16]:

$$S_i = (2H/q) \operatorname{sh}(\beta_i) \operatorname{ch}(\beta_i - \alpha_i) \quad (10)$$

上式可由有应力索曲线微分长度 $ds = \sqrt{1 + (dy_i/dx_i)^2}$, 把式(1) 代入, x_i 在坐标区间 $(0, l_i)$ 上积分得到. 它是精确的表达式.

同理, 各段索的弹性伸长量计算公式可化为如下最为简洁的形式^[8, 15]

$$\Delta S_i = [H/(2E \cdot A)] [l + (H/q) \cdot \operatorname{sh}(2\beta_i) \cdot \operatorname{sh}(2\beta_i - 2\alpha_i)] \quad (11)$$

上式是当 $|T(s)/(E \cdot A)| \ll 1$ 时, 由 $\Delta S_i = \int_{s_i} [T(s)/(E \cdot A)] ds$ 积分得到^[12]. 因为索的弹性伸长

应变为 $\epsilon = T(s)/(E \cdot A)$, 按照材料力学关于弹性伸长应变的定义, 应该有 $\epsilon = (ds - ds_0)/ds_0 = \Delta s_i/ds_0$, 即 $\Delta s_i = \epsilon \cdot ds_0 = [T(s)/(E \cdot A)] \cdot ds_0$ (ds_0 为无应力索曲线微分长度). 故弹性伸长的精确计算公式为

$$\Delta S_i = \int_{S_{i0}} \Delta s_i = \int_{S_{i0}} [T(s)/(E \cdot A)] ds_0 \quad (12)$$

但对于这三种算法, 索段的无应力长度 S_{i0} 是通过有应力索段长度和弹性伸长量 ΔS_i 相减得到, 即 S_{i0} 未知, 故这类算法不能用式(12)来求 ΔS_i 的精确值. 又因为 S_i 显然大于 S_{i0} , 比较式(11)和式(12)知, 式(11)的 ΔS_i 计算值将会大于实际伸长量, 从而计算出的 S_{i0} 小于实际无应力长度. 后面的算例也验证了这个结论.

总之, 尽管这三种算法的表面形式有所差异, 但它们是完全等价的, 其计算精度也是完全相同的. 同时, 由它们得到的主缆无应力长度小于实际值.

3 主缆自重集度 q_0 按其无应力长度计算作为已知条件的悬链线解析法分析

3.1 各种解析算法的比较

3.1.1 各算法的要点列举

(1) 文献[3,17]的方法

在图1所示的局部坐标系中, 任意自由索段端点力与索端坐标间的函数关系为

$$l_i = \frac{H \cdot S_{i0}}{E \cdot A} + \frac{H}{q_0} \left[\operatorname{arcsch}\left(\frac{V_i}{H}\right) - \operatorname{arcsch}\left(\frac{V_i - q_0 \cdot S_{i0}}{H}\right) \right] \quad (13)$$

$$h_i = \frac{S_{i0}}{E \cdot A} \left(V - \frac{q_0 \cdot S_{i0}}{2} \right) + \frac{H}{q_0} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{V_i}{H}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{V_i - q_0 \cdot S_{i0}}{H}\right)^2} \right] \quad (14)$$

该算法在迭代计算过程的第②步求解超越方程式(13)首先得到索段的无应力长度 S_{i0} , 再将其代入式(14)求得索段高差 h_i ; 该方法的其他要点同本文第2.2.1节的98算法.

(2) 文献[14,18,19,20]的方法

在图1所示的局部坐标系中, 任意自由索段端点力与索端坐标间的函数关系为

$$l_i = \frac{H \cdot S_{i0}}{E \cdot A} + \frac{H}{q_0} \ln \frac{\sqrt{H^2 + (q_0 \cdot S_{i0} - V_i)^2} + q_0 \cdot S_{i0} - V_i}{\sqrt{H^2 + V_i^2} - V_i} \quad (15)$$

$$h_i = \frac{S_{i0}}{E \cdot A} \left(V_i - \frac{q_0 \cdot S_{i0}}{2} \right) + \frac{\sqrt{H^2 + V_i^2} - \sqrt{H^2 + (q_0 \cdot S_{i0} - V_i)^2}}{q_p} \quad (16)$$

该方法其他要点同本文第3.1.1节(1).

3.1.2 对各算法的比较分析

文献[14]对式(13)和式(14)作了详细的推导. 若把反双曲正弦函数的展开表达式代入式(13)即可得到式(15), 对式(14)进行通分运算即可得到式(16). 可见第3.1.1节的两种算法完全等价. 这两种算法求解索段的无应力长度 S_{i0} 的公式是精确的, 有应力索段长度 S_i 的计算公式仍可用精确的式(10).

4 两大类精确解析算法比较分析

4.1 两大类精确解析算法的关系

按照文献[14]的推导方法, 在主缆自重集度的不同已知条件下可分别推导出这两大类精确解析算法所依据的悬链线方程. 第二类算法的式(13)和式(14)和第一类算法的式(5)和式(6)相比, 前者只是等号右边增加了几项, 等号右边的后半部分形式很相似, 只是个别变量的含义不同.

4.2 两大类精确解析算法的精度比较

(1) 从理论公式看, 在各自的基本假定条件下, 第一类算法所求解得的无应力索长 S_0 是近似的, 而有应力索长 S 和线形笛卡儿坐标是精确的, 故把第一类算法称为“准精确解析算法”更合适些; 第二类算法的所有计算量都是精确的, 故可把第二类算法称为“全精确解析算法”.

(2) 对于悬索桥的各跨主缆, 由于安装后鞍座之间主缆的无应力索长是固定不变的, 因此单跨主缆的总自重是不变. 根据全跨悬索有应力索长 S 和无应力索长 S_0 得到单跨主缆的自重约束方程^[15]: $S \cdot q = S_0 \cdot q_0$. 于是可以推断, 若在 q_0 已知的情况下用第二类算法解出 S, S_0 . 然后根据自重约束方程可求得 $q = S_0 \cdot q_0 / S$. 那么, q 作为已知条件用第一类算法得到的全跨悬索有应力长度和线形笛卡儿坐标是精确的, 其值应该与第二类算法的求解值相等; 若有误差, 应该是电算过程中的数值误差引起的. 事实上后面的算例验证了这一点.

(3) 因为实际悬索桥主缆基本都能满足 $|T(s)/(E \cdot A)| \ll 1$ (即 $q = S_0 \cdot q_0 / S$ 趋近于 q_0). 据此推断, 若对 q_0 和 q 不加区分, 直接用主缆无应力长自重集度代替有应力长自重集度、作为已知条件代入第一类算法求解, 引起的线形坐标误差将不大. 事实上后面的算例验证了这一点.

(4) 从实用角度看, 对悬索桥而言, 除主缆防护质量为沿变形后的有应力长度均布外, 占绝大部分的自重(在江阴桥中, 主缆索股自重占总重的近 98%) 沿无应力长度均布^[3]. 桥梁设计时, 主缆索股的无应力状态下的自重荷载集度较易确定, 并且第一、二类算法繁简程度相当, 故主缆线形计算时第二类算法的主缆自重集度的确定更为精确、更接近实际情况, 实际计算时应优先使用它.

5 电算高效实现算法研究

5.1 非线性超越方程(组)的求解算法

主缆线形计算的数值解析法计算时要求解许多非线性超越方程(组). 关于非线性超越方程求解方法, 大量的、纯数学方面的计算方法文献上有现成的 N—R 算法介绍; 有些主缆线形计算方面的文献也花费相当大的篇幅、结合线形计算的约束条件对 N—R 算法的求解过程进行了详尽介绍^[4,13,8,21].

利用现成的 MATLAB 数学软件求解超越方程(组), 上述问题将变得很容易. MATLAB 软件具有极其强大的符号运算功能, 能把非线性超越方程(组)以符号表达式的形式参与各种数学运算, 用最少的算法语言语句实现非线性超越方程(组)的求解^[22-25]. 例如, 求解第二类精确解析法的式(13)和式(14)时, 只需把它们以近乎数学手写表示式的形式赋值给两个符号型变量, 然后在 MATLAB 的工作空间对已知变量赋值后, 用“subs()”命令化简 2 个超越方程, 用一个“solve()”命令直接求解非线性的代数方程方程组. 笔者发现, 用 MATLAB 软件求解符号表达式代表的非线性超越方程组的速度很快, 精度极高. 用 MATLAB 求解超越方程式(13)得到的无应力长度 S_{i0} , 再把它代回式(13), 发现超越方程左右两边的平衡误差能小到了 1.3×10^{-29} m.

5.2 递推迭加运算算法

在其他计算机高级语言中, 机器对实数存储的最高精度形式是双精度变量形式, 即用 $8(\text{bytes}) \times 8(\text{bits}) = 64(\text{bits})$ 内存空间存储一个实数. 而 MATLAB 系统中的符号型变量是用 $190(\text{bytes}) \times 8(\text{bits}) = 1520(\text{bits})$ 内存空间存储一个实数. 在数值变量(双精度变量)与符号型变量(在 MATLAB 软件系统中它的运算级别最高)混合运算时, 系统自动把数值变量转化成符号型变量再进行运算, 以提高数值计算精度. 基于同样的原因, 在 MATLAB 软件进行符号表达式的各种运算时, 浮点数都被以化为最接近原值的分数形式参与计算^[24], 从而消除了数值累积误差.

以本文算例涉及的中跨 3300 m 的悬索桥恒载线形的计算为例, 每个迭代循环从主跨左端第 1 个悬链线索段开始, 直到主跨右端的第 110 个悬链线索段结束, 至少要求解 110 个非线性超越方程, 110 个非线性代数函数表达式, 3×110 次递推迭加计算(分别对应索段高差、有(无)应力索长累加运算)和大量的参数表达式赋值计算. 为了减小计算误差的累积效应, 笔者把参与运算的主要变量设为符号型变量. 在笔者勉强能运行 MATLAB 6.0 软件的、硬件配置较低的 PC 机上, 对算例的悬索桥中跨主缆进行了 3 个循环的迭代计算, 总耗时也只有大约 50 s, 但获得了极高的数值计算精度. 例如, 当采用第二类解析法时, 几何条件的收敛误差都小于 0.52×10^{-6} m 于对称位置的第 1 和第 108 个吊点的 y 坐标的计算值分别为 16.567 037 072 933 01 m 和 16.567 036 848 840 04 m, 二者的对称误差仅为 $2.240 929 717 345 352 \times 10^{-7}$ m.

6 算 例

某超大跨度公铁两用单悬吊跨双铰式悬索桥的初步设计资料为：两主塔等高，主缆属于平面缆索体系，分跨为 960 m + 3 300 m + 960 m，主跨主缆的跨中矢高为 376—70=306 m。全桥共 4 根主缆，主缆截面面积合计为 $A=4.032\,994\,528\text{m}^2$ 。主缆弹性模量 $E=2.1\times 10^{11}\text{ N/m}^2$ 。已知沿中跨主缆无应力长度的自重集度 $q_0=32\times 9.8\text{ kN/m}$ （两侧之和），加劲梁恒载是 $15\times 9.8\text{ kN/m}$ （包含吊索重量），桥面二期恒载为 $8.4\times 9.8\text{ kN/m}$ 。竖直吊索纵桥向间距为 30 m，端吊索距塔中心的间距为 45 m，沿桥纵向共布置 108 道吊索。

吊索力、索夹自重都以等效集中力 P_i 方式作用在相应的吊点位置。 P_i 包含一期恒载和二期恒载作用下的吊索拉力。假定加劲梁按全铰法架设，标准架设节段长度为 30 m，两端架设节段长度为 56 m。因为分析所依据只是大桥的初步设计的、比较宏观的资料，故按照文献[12]介绍的简化方法分别计算一期恒载和二期恒载作用下的吊索力，相加得到 P_i ，共 108 个吊索等效集中力。成桥状态下的主缆力学模型见图 2。

鉴于上述分析，本文对中跨主缆成桥态线形按三种情况进行分析：情况 A，采用全精确解析算法；情况 B，用情况 A 所求出的 S 、 S_0 和已知的 q_0 推求出 q ，然后采用准精确解析算法，即第 4.2 节(2)讨论的情况；情况 C，对 q_0 和 q 不加区分，直接用主缆无应力长自重集度代替有应力长自重集度，然后采用准精确解析算法，即第 4.2 节(3)讨论的情况。按三种情况计算的中跨主缆成桥态吊点坐标、主缆的有、无应力缆长及鞍座反力值列于表 1 和表 2。

表 1 中跨主缆成桥态的吊点坐标

Tab. 1 Coordinates of hanging point of the main cables in the middle span

Location /m	Side hanging point	Hanging point near $L/16$	Hanging point near $L/8$	Hanging point near $3L/16$	Hanging point at $L/4$	Hanging point near $5L/16$	Hanging point near $3L/8$	Hanging point near $7L/16$	Hanging point near $L/2$
Hanging point no. /coordinate X	1/45	6/195	13/405	20/615	27/825	34/1 035	41/1 245	48/1 455	54/1 635
Coordinate Y and ΔY									
Case A	Y	16.567 0	68.398 6	132.271 6	186.075 8	229.878 4	263.734 3	287.686 0	301.763 8
Case B	Y	16.567 4	68.399 7	132.273 1	186.077 3	229.879 5	263.735 0	287.686 3	301.763 9
	ΔY	0.000 4	0.001 1	0.001 5	0.001 5	0.001 1	0.000 7	0.000 3	0.000 1
Case C	Y	16.567 5	68.400 1	132.273 7	186.077 9	229.880 0	263.735 3	287.686 5	301.763 9
	ΔY	0.000 5	0.001 5	0.002 1	0.002 1	0.001 6	0.001 0	0.000 5	0.000 1

Note:①The origin of global coordinate system and the positive directions of axes X and Y are shown in fig. 2. ②L denotes length of middle span, $L=3\,300\text{ m}$.

表 2 成桥态主缆的有、无应力缆长及鞍座反力

Tab. 2 Length with and without stress in main cables and reaction forces at the tower saddles

Calculation cases	Self-weight intensity / $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$	Horizontal component at main saddles H/N	Relative error of H /%	Vertical component at Main saddles V/N	Relative error of V /%	Horizontal inclination of main cables at I_{p}/rad	In middle span/m	
							Cable length without stress	Cable length with stress
Case A	313 600	2 426 597 776	0	900 864 919	0	0.355 475 510	3 364.005 28	3 374.357 70
Case B	312 638	2 426 549 269	-0.002	900 865 004	0.000 01	0.355 482 063	3 363.974 17	3 374.358 25
Case C	313 600	2 430 877 503	0.176	902 488 301	0.180 20	0.355 488 001	3 363.955 87	3 374.358 47

Note:①The wholly precise analytical method is used in Case A, but the quasi-precise analytical one is adopted in Case B and C. ②Both self-weight intensity and reaction forces at the tower saddles are summing value for all cables at a cross-section.

比较表 1 和表 2 的计算结果可见，从总体上看，虽情况 C 的误差略大于情况 B，但两类算法的计算

精度都比较高. 特别是对于主缆有应力长度和线形坐标而言, 最大误差分别不超过 2.1 mm, 对于 3 300 m 跨径的主缆完全可忽略这种误差. 在三种计算情况下, 主鞍座处主缆的理论交点位置紧邻中跨侧的主缆水平倾角的计算结果也差别甚微. 对于主缆无应力长度而言, 情况 B、C 的误差分别达到了 -3.11 cm 和 -4.94 cm, 但相对误差仍很微小. 就鞍座反力而言, 情况 B 相对误差仍很微小, 情况 C 略大, 但不超过 2%. 应该指出的是, 因为中跨是整个悬索桥的主缆线形控制跨, 边跨的线形要通过“成桥状态时中、边跨主缆的水平分力在主鞍处相等”的条件确定, 情况 C 的鞍座反力计算误差可能造成边跨的线形计算误差, 因误差累积也会引起空缆线形的计算误差. 另外, 算例的计算结果也印证了本文第 4.2 节(2)和(3)的推论.

由此可见, 仅就悬索桥主缆成桥态线形而言, 主缆线形确定的两大类数值解析都具有很高的工程精度.

7 结 语

(1)在主缆理想柔性、忽略泊松比效应的最基本假定下, 主缆线形确定的精确数值解析法可分为主缆自重集度按其有、无应力长度计算作为已知条件的两大类解析算法. 在每大类解析算法中, 所有的方法是完全等价的, 数值计算精度相同, 计算步骤的繁简程度无明显差异.

(2)在上述最基本假定下, 第二类解析算法为“全精确解析算法”, 第一类为“准精确解析算法”. 在第一类算法中, 线形坐标和缆长计算公式都是精确的; 而主缆的弹性伸长量公式的计算值偏大, 从而引起索段的无应力长度计算值偏小. 第二类解析算法的所有计算公式都是精确的.

(3)仅就悬索桥主缆成桥态线形确定而言, 主缆线形确定的两大类数值解析算法都具有很高的工程精度. 但从理论分析和实用角度看, 主缆线形解析计算时采用第二类算法更为精确、更接近实际情况, 实际计算时应优先使用第二类算法.

(4)主缆线形确定两种算法中涉及大量的非线性超越方程(组)求解和递推迭加运算. 基于 MATLAB 软件的电算实现算法, 所需的算法语句最少, 算法执行速度很快, 数值计算精度极高. 显然, 该电算实现算法经改造后也适合于常规跨度的平面和空间缆索、吊索倾斜的悬索桥.

参考文献 References

- [1] 雷俊卿, 郑明珠, 徐恭义. 悬索桥设计 [M]. 北京: 人民交通出版社, 2002.
LEI Jun-qing, ZHENG Ming-zhu, XU Gong-yi. Suspension Bridge Design [M]. Beijing: China Communications Press, 2002.
- [2] 伊藤学, 川田忠树. 超长桥梁建设的序幕-技术者的新挑战 [M]. 刘健新, 译. 北京: 人民交通出版社, 2002.
ITO Mahabu, KAWATA Tadaki. Prelude of Super Long-span Bridges-A New challenge to Technicians [M]. LIU Jian-xin, translator. Beijing: China Communications Press, 2002.
- [3] 罗喜恒. 悬索桥缆索系统的数值分析法 [J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2004, 32(4): 441-446.
LUO Xi-heng. Numerical analysis method for cable system of suspension bridges [J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2004, 32(4): 441-446.
- [4] 潘永仁. 悬索桥结构非线性分析理论与方法 [M]. 北京: 人民交通出版社, 2004.
PAN Rong-ren. Non-linear Analysis Theory Method for Suspension Bridge Structures [M]. Beijing: China Communications Press, 2004.
- [5] LUCO J E, TURMO J. Linear vertical vibrations of suspension bridges: A review of continuum models and some new results [J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2010(30): 769-781.
- [6] MALIK J. Nonlinear models of suspension bridges [J]. J. Math. Anal. Appl. 2006, 321: 828-850.
- [7] 张志国, 邹振祝, 张庆芳. 悬索桥空缆吊点坐标计算方法研究 [J]. 公路交通科技, 2004, 21(11): 55-58.
ZHANG Zhi-guo, ZOU Zhen-zhu, ZHANG Qing-fang. Calculation Method of the Hanging Point's Coordinates for Free Cables of Suspension Bridge [J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2004, 21(11): 55-58.
- [8] 沈锐利. 悬索桥主缆系统设计及架设计算方法研究 [J]. 土木工程学报, 1996, 29(2): 3-9.

- SHEN Rui-li. Calculation Methods for Design and Erection of Cable Curve of Suspension Bridge [J]. China Civil Engineering Journal, 1996, 29(2): 3-9.
- [9] 肖汝诚, 贾丽君, 王小同. 确定大跨径悬索桥主缆成桥线形的虚拟梁法[J]. 计算力学学报, 1999, 16(1): 108-114.
- XIAO Ru-cheng, JIA Li-jun, WANG Xiao-tong. Fictitious beam method for determination of main cable shape of long-span suspension bridges [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 1999, 16(1): 108-114.
- [10] 吴恒立. 悬索和吊桥及薄壁杆件理论[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1992.
- WU Heng-li. The theory on Suspension Cables, Suspension Bridges and bars with thin walls [M]. Chongqing: Chongqing University Press, 1992.
- [11] 项海帆. 高等桥梁结构理论[M]. 北京: 人民交通出版社, 2002.
- XIANG Hai-fan. Theory on Advanced Bridge structure [M]. Beijing: China Communications Press, 2002.
- [12] 肖汝诚, 项海帆. 大跨径悬索桥结构分析理论及其专用程序系统的研究[J]. 中国公路学报, 1998, 11(4): 42-50.
- XIAO Ru-cheng, XIANG Hai-fan. Research on the Structural Analysis Theory and Special Program of Long-Span Suspension Bridge [J]. China Journal of Highway and Transport, 1998, 11(4): 42-50.
- [13] 周新年. 工程索道与柔性吊桥—理论 设计 案例[M]. 北京: 人民交通出版社, 2008.
- ZHOU Xin-nian. Engineering Cableway and Flexible Suspension Bridges —Theory Design Case on Advanced Bridge structure [M]. Beijing: China Communications Press, 2008.
- [14] 李小珍, 强士中. 悬索桥主缆空缆状态的线形分析[J]. 重庆交通学院学报, 1999, 18(3): 7-13.
- LI Xiao-zhen, QIANG Shi-zhong. Geometric Form Analysis of Suspension Bridge Free Cable [J]. Journal of Chongqing Jiaotong Institute, 1999, 18(3): 7-13.
- [15] 陈常松, 陈政清, 颜东煌. 悬索桥主缆初始位形的悬链线方程精细迭代分析法[J]. 工程力学, 2006, 23(8): 62-68.
- CHEN Chang-song, CHEN Zheng-qing, YAN Dong-huang. Accurate Iteration Method to Calculate the Initial States of Main Cables of Suspension Bridges [J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(8): 62-68.
- [16] 王新敏. ANSYS 工程结构数值分析[M]. 北京: 人民交通出版社, 2007.
- WANG Xin-min. Numerical Analysis on Engineering Structures by means of ANSYS Software [M]. Beijing: China Communications Press, 2007.
- [17] 罗喜恒, 肖汝诚, 项海帆. 悬索桥理想恒载状态的计算方法研究[J]. 桥梁建设, 2008(4): 31-35.
- LUO Xi-heng, XIAO Ru-cheng, XIANG Hai-fan. Study of Calculation Methods for Ideal Dead Load State of Suspension Bridges [J]. Bridge Construction, 2008(4): 31-35.
- [18] 唐茂林, 强士中, 沈锐利. 悬索桥成桥主缆线形计算的分段悬链线法[J]. 铁道学报, 2003, 25(1): 87-91.
- TANG Mao-lin, QIANG Shi-zhong, SHEN Rui-li. Segmental catenary method of calculating the cable curve of suspension bridge [J]. Journal of the China Railway Society, 2003, 25(1): 87-91.
- [19] 肖海波, 俞亚南, 沈毅. 悬索桥主缆成桥线形精确分析[J]. 中国市政工程, 2003(4): 21-22, 67.
- XIAO Hai-bo, YU Yan-an, SHEN Yi. Accurate Analysis on Bridging Shape of Main Cable in Suspension Bridge [J]. China Municipal Engineering, 2003(4): 21-22, 67.
- [20] 魏群, 严斌, 姜华. 大跨悬索桥主缆空缆线形的有限元分析与探讨[J]. 水利电力机械, 2007, 29(12): 19-22, 27.
- WEI Qun, YAN Bin, JIANG Hua. FEA of the Main Cable of Large Span Suspension Bridge [J]. Water Conservancy & Electric Power Machinery, 2007, 29(12): 19-22, 27.
- [21] 李传习, 姚明, 柯红军. 空间缆索悬索桥倾斜母线索鞍设计位置的计算方法[J]. 中国公路学报, 2009, 22(5): 48-53, 65.
- LI Chuan-xi, YAO Ming, KE Hong-jun. Calculation Method on Lean Busbar Saddle's Position of Suspension Bridge with Spatial Cables [J]. China Journal of Highway and Transport, 2009, 22(5): 48-53, 65.
- [22] 田社平, 陈洪亮. MATLAB 符号计算在傅里叶级数分析中的应用[J]. 电气电子教学学报, 2009, 30(2): 125-127, 134.
- TIAN She-ping, CHEN Hong-liang. Application of Symbolic Calculation of Matlab on Fourier Series Analysis

- [J]. Journal of EEE, 2009, 30(2):125-127,134.
- [23] 包惠明. MATLAB 在公路岩土工程勘察中的应用[J]. 公路交通科技, 2005, 22(9):144-147.
BAO Hui-ming. The Application of Matlab in Highway Geotechnical Engineering Exploration [J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2005, 22(9):144-147.
- [24] 刘宏友, 彭 锋. MATLAB 6. x 符号运算及其应用[M]. 北京:机械工业出版社, 2003.
LIU Hong-you, PENG Feng. Symbolic Calculation of MATLAB 6. x and its Application [M]. Beijing: China Machine Press, 2003.
- [25] 吴 晓, 杨立军, 孙 晋. 碳纤维材料双层索的非线性共振特性[J]. 西安建筑科技大学学报:自然科学版, 2011, 43(1): 70-74.
WU Xiao, YANG Li-jun, SUN Jin. Nonlinear resonance properties of the double-layer carbon fiber cable[J]. J. Xi'an Univ. of Arch. & Tech. ; Natural Science Edition, 2008, 43(1): 70-74.

Comparison on common precise numerical analytical algorithms to determine main cables' curve shape in suspension bridges and study on highly effective methods of computation

JING Tian-hu^{1,2}, LI Wei¹, LI Qing-ning^{1,3}, ZHANG Pin-le¹

(1. School of Civil Engineering, Xi'an Univ. of Arch. & Tech., Xi'an 710055, China;

2. School of Civil and Architecture Engineering, Guilin University of Technology, Guilin 541004, China;

3. State Key Laboratory of Architecture Science and Technology in West China(XAUAT), Xi'an 710055, China)

Abstract: The common precise numerical analytical algorithms to determine main cables' curve shape in suspension bridges were investigated. By means of comparison among these algorithms and formulae inference, it is found that these algorithms can be reduced to two big categories of analytical ones according to different known conditions that weight intensity loads of main cables are calculated in terms of their lengths with stress and without stress under the basic hypotheses that main cables are ideally flexible and the effect of Poisson ratio of their cross-sections is neglected. It is proved that all methods among big categories of analytical ones are equivalent to each other. Moreover, further studies show that the second big category of analytical algorithms is "thoroughly precise analytical ones" and the first is quasi-precise analytical ones, and the latter one under-evaluates the length of main cables. Both categories of analytical algorithms to determine main cables' curve shape have very high precision of engineering as far as the determination of curve shape finished state of suspension bridges is concerned, but the method to determine weight intensity loads of main cables in the 2nd categories of analytical ones are more precise and nearer to actual cases, so the 2nd one is preferred choice in actual computations of suspension bridges. In addition, highly effective methods of computers are presented to solve a lot of transcendental equations and recurrence operations involved in by the two big categories of analytical algorithms. Finally, an example to determine main cables' curve shape of the middle span in a super-long span suspension bridge is given to validate the analysis in this paper.

Key words: bridge engineering; suspension bridge; curve shape of main cables to determine; MATLAB