

# 基于差异衰减规律的钢筋混凝土 框架结构共同作用分析

王永亮<sup>1</sup>, 武建勋<sup>2</sup>, 车文<sup>2</sup>, 王国诚<sup>3</sup>

(1. 清华大学土木工程系, 北京 100084; 2. 中国矿业大学力学与建筑工程学院, 北京 100083;  
3. 天津城市建设学院土木工程系, 天津 300384)

**摘要:**高层建筑物设计通常是把上部结构和地基基础分开来进行计算分析, 这种不符合实际的假定必定会带来结果的偏差. 因此有必要考虑彼此间的耦合作用, 文中对多高层建筑上部结构和地基基础共同作用的差状态进行研究. 在考虑钢筋混凝土框架高层建筑上部结构和地基基础共同作用情况下, 对差异衰减理论进行讨论: 求得连分式衰减理论中实矩阵的矩阵特征值、特征向量, 进一步对沉降模式进行分析. 之后结合上部结构的变形规律, 尝试给出一种基于此规律的适合于工程实际应用的计算方法.

**关键词:**钢筋混凝土框架结构; 共同作用; 差异衰减; 线性叠加法; 正交性

**中图分类号:** TU973.2

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1006-7930(2012)03-0318-06

对于高层建筑进行分析时, 为了使计算过程清晰简便, 常常将上部结构、基础和地基分离开来单独讨论, 从而忽略了各部分之间的相互影响, 这种假设使得结果出现偏差, 造成上部结构实际值比设计值偏大, 而基础则偏小<sup>[1]</sup>. 目前, 随着人们对结构各个部件耦合作用机理的不断认识, 以及建筑结构计算理论的迅速发展, 逐渐发展起来对建筑结构进行共同作用分析<sup>[2]</sup>.

## 1 差异衰减理论基本思想

对于一般建筑物而言, 其应力和变形有两部分叠加而成. 一部分是建筑物本身由于自重引起的原有应力和原有应变; 另一部分则是由于地下部分影响(如地下采动)而产生的附加应力和附加变形. 对于原有应力和原有变形, 大多数建筑物都已经有了比较成熟的固定计算模式; 而这种附加应力和附加变形则研究相对较少, 但是它却是影响某些建筑应力和变形的主要因素, 如采空区上的建筑.

设计时我们可以假定上部结构坐落于刚性基础上而计算出一个状态(设计状态 b), 实际坐落于地面是另一个状态(实际状态 a), 这两个状态的地基反力分布不同, 但合力与合力矩却相同, 两个状态相减就得到第三状态(差状态 c), 此状态中一个合力与合力矩为零的“平衡力系”作用于建筑底部(如图 1 所示), 对于差状态进行讨论可以避免重力因素的影响, 下面得到的结论都在该状态中进行的.

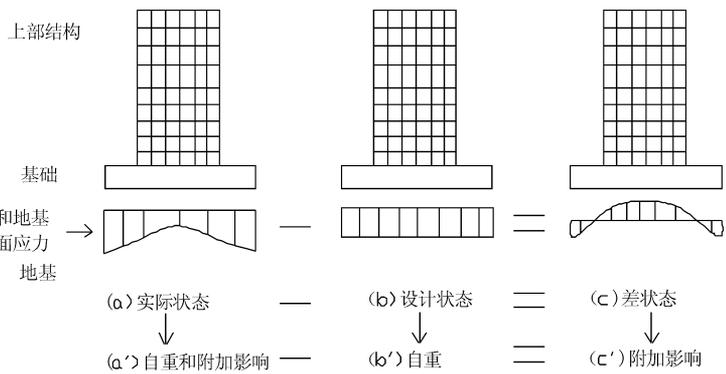


图 1 基础反力的“差状态”

Fig. 1 The foundation force in subtract state

在差异衰减理论中<sup>[3]</sup>, 运用连分式理论, 通过结构各层的刚度矩阵可以得到相关实数矩阵  $[A]$ . 设

收稿日期: 2012-03-06 修改稿日期: 2012-05-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(1907270)

作者简介: 王永亮(1985-), 男, 河北唐山人, 博士研究生, 从事结构工程和计算力学研究.

[A] 特征值为  $d_j$ , 对应的特征向量为  $\{y_j\} (j = 1, 2, \dots, m)$ , 其中,  $m$  假定为矩阵 [A] 的阶数, 可得:

$$[A]\{y_j\} = d_j\{y_j\} \quad (j = 1, 2, \dots, m) \tag{1}$$

( $d_j$  按特征值大小排列:  $|d_1| \geq |d_2| \geq |d_3| \geq \dots \geq |d_m|$ ,  $\{y_j\}^T \{y_j\} = 1$ )

$\{u_{i+1}\}$ 、 $\{u_1\}$  可以展开成下面组合形式:

$$\{u_{i+1}\} \approx [A]^i \{u_1\} \quad (i \ll n) \tag{2}$$

$$\{u_1\} = \sum_{j=1}^m a_j \{y_j\} \tag{3}$$

把(1)、(3)式代入(2)式, 则有:

$$\{u_{i+1}\} \approx [A]^i \{u_1\} = [A]^i \sum_{j=1}^m a_j \{y_j\} = \sum_{j=1}^m a_j [A]^i \{y_j\}$$

即 
$$\{u_{i+1}\} \approx \sum_{j=1}^m a_j d_j^i \{y_j\} \tag{4}$$

可见, 在远离顶部和底部的各层应近似的受指数衰减<sup>[4]</sup> 或比例衰减控制, 式(4) 可以叫做差异衰减. 这里  $d_j$  和  $\{y_j\}$  由标准层确定, 可把  $\{y_j\}$  都看成是一种变形模式,  $d_j$  为此模式的衰减速度或变形比,  $a_j$  为组合系数. 由于衰减速率不等, 一些变形模式数层后便衰减到可以忽略不计的程度, 因此由上列推导推断, 结构变形最终会由一种或若干种变形模式所控制, 变形比也为一定的<sup>[5]</sup>. 这个变形模式和变形比可称为卓越变形模式和卓越变形比, 他们与外界荷载无关, 只由结构的物理属性和几何形式本身所决定.

## 2 钢筋混凝土框架结构的基本变形模式和变形比

根据上述理论, 下面将用 MATLAB 软件分别计算出基本变形模式及其变形比, 取其绝对值最大的前几个变形比进行分析. 本文采取钢筋混凝土框架结构为例进行分析, 基本数据:  $EA_z = 3.25 \times 10^7$  kN,  $EI_z = 2.7 \times 10^6$  kN · m<sup>2</sup>,  $H = 3$  m,  $EA_1 = 1.04 \times 10^7$  kN,  $EI_1 = 5.54 \times 10^5$  kN · m<sup>2</sup>,  $L = 6$ m. 其中,  $E$  为弹性模量,  $A_z(I_z)$ 、 $A_1(I_1)$  分别为柱子和梁的横截面积(惯性矩),  $H$ 、 $L$  为层高和单跨长度.

根据传统矩阵连分式理论, 我们知道  $[K^*]$  是有极限的, 我们可以利用编制 MATLAB 的程序来研究  $[K^*]$  逼近极限矩阵的速度.  $[K^*]_9$  与  $[K^*]_{10}$  的差距在 0.1 的级数左右, 而  $[K^*]_{23}$  与  $[K^*]_{24}$  的差距却已经逼近到 0.01 的级数上. 逼近到级数 0.001 需要  $n = 60$ , 即需要 60 层的楼高, 要使收敛到极限矩阵, 则  $n$  值至少要取到 170 层. 我们可以得到如下规律: 开始时值的收敛速度在是比较快的, 而后面的收敛速率将会越来越慢; 所以, 我们选取 24 层和 170 层两种结构分别进行分析、讨论. 其变形模式及变形比见表 1~2.

表 1 24 层钢筋混凝土平面框架的基本变形模式(a-g)及其变形比  $d$

Tab. 1 The basic deformation pattern and deformation ratio of 24 floors RC frame high-rise building

节点	a	b	c	d	e	f	g
	$d=1.000$	$d=0.992\ 1$	$d=0.974\ 2$	$d=0.954\ 2$	$d=0.935\ 8$	$d=0.919\ 9$	$d=0.905\ 9$
1	0.277 3	0.399 4	0.390 9	0.377 7	-0.347 3	-0.322 9	0.293 7
2	0.277 3	0.377 7	0.293 7	0.192 3	-0.047 3	0.093 9	-0.222 9
3	0.277 3	0.322 9	0.139 1	-0.093 9	0.292 7	0.399 4	-0.347 3
4	0.277 3	0.270 1	-0.046 3	-0.322 9	-0.046 3	-0.322 9	0.139 1
5	0.277 3	0.192 3	-0.222 9	-0.399 4	-0.222 9	-0.399 4	0.390 9
6	0.277 3	0.093 9	-0.346 3	-0.260 1	-0.346 3	-0.260 1	-0.047 3
7	0.277 3	0.000 0	-0.391 2	0.000 0	-0.391 2	0.000 0	-0.392 2
8	0.277 3	-0.093 9	-0.346 3	0.261 1	-0.346 3	0.261 1	-0.047 3
9	0.277 3	-0.192 3	-0.046 3	-0.322 9	-0.046 3	-0.322 9	0.390 9
10	0.277 3	-0.270 1	-0.047 3	0.323 9	0.390 9	-0.192 3	0.139 1
11	0.277 3	-0.323 9	0.139 1	0.093 9	0.293 7	-0.379 4	-0.347 3
12	0.277 3	-0.377 7	0.293 7	-0.192 3	-0.047 3	-0.094 9	-0.222 9
13	0.277 3	-0.399 4	0.390 9	-0.377 7	-0.347 3	0.322 9	0.293 7

然后又试着改变模型的基本参数, 发现在小范围(同数量级)内改变基本参数, 特征向量  $\{y_j\}$  改变不大, 即变形模式不变; 在大范围改变基本参数时, 特征向量  $\{y_j\}$  虽有变化, 但变形模式依然是不变的.

接下来考查了170层钢筋混凝土平面框架的基本变形模式 $\{y_j\}$ 和变形比 $d_j$ ,在目前的工程实践中,还没有高达170层的高层建筑,这样做是为了考察 $[K^*]$ 矩阵取得极限时的基本变形模式 $\{y_j\}$ 和变形比 $d_j$ 的变化规律,并与24层钢筋混凝土平面框架的基本变形模式进行了对比分析.

表2 170层钢筋混凝土平面框架的基本变形模式(a'-g')及其变形比d'

Tab.2 The basic deformation pattern and deformation ratio of 170 floors RC frame high-rise building

节点	a'	b'	c'	d'	e'	f'	g'
	d'=1.000	d'=0.982 2	d'=0.964 6	d'=0.947 8	d'=0.932 3	d'=0.917 9	d'=0.904 6
1	0.277 3	0.399 4	0.390 9	0.377 7	-0.347 3	-0.322 9	-0.293 7
2	0.277 3	0.377 7	0.293 7	0.192 3	-0.047 3	0.093 9	0.222 9
3	0.277 3	0.322 9	0.139 1	-0.093 9	0.293 7	0.399 7	0.347 3
4	0.277 3	0.270 1	-0.047 3	-0.322 8	0.380 8	0.182 3	-0.139 1
5	0.277 3	0.192 3	-0.222 8	-0.388 4	0.138 3	-0.270 1	-0.390 9
6	0.277 3	0.093 9	-0.347 3	-0.270 1	-0.222 8	-0.377 7	0.047 3
7	0.277 3	0.000 0	-0.382 1	0.000 0	-0.382 3	0.000 0	0.392 2
8	0.277 3	-0.093 9	-0.347 3	0.270 1	-0.222 8	0.377 7	0.047 3
9	0.277 3	-0.192 3	-0.222 8	0.388 4	0.138 1	0.270 1	-0.390 9
10	0.277 3	-0.270 1	-0.047 3	0.322 8	0.380 8	-0.182 3	-0.139 1
11	0.277 3	-0.322 9	0.139 1	0.093 9	0.293 7	-0.399 4	0.347 3
12	0.277 3	-0.377 7	0.293 7	-0.192 3	-0.047 3	-0.093 9	0.222 9
13	0.277 3	-0.399 4	0.390 9	-0.377 7	-0.347 3	0.322 9	-0.293 7

分别根据第二种变形比 $d_2$ ,汇出24层结构第8层变形(图2)、170层结构第12层变形(图3),并得到两条非常相近的拟合曲线:

$$d = 0.974 2, y = 5E - 06x^6 - 0.000 2x^5 + 0.002 7x^4 - 0.010 6x^3 - 0.015 8x^2 + 0.008 1x + 0.357 2 \quad (5)$$

$$d = 0.964 6, y = 5E - 06x^6 - 0.000 2x^5 + 0.002 7x^4 - 0.010 9x^3 - 0.017 1x^2 + 0.010 1x + 0.368 1 \quad (6)$$

可以发现两者的变形模式除个别成反对称外,基本上一致,并且变形比的数值相差也不大.两条拟合曲线结果略有差别.这进一步证明了上步结构变形模式和变形比的稳定性:对于考虑高层建筑上部结构与地基基础共同作用时,当上部结构的的基本参数不变时, $[K^*]$ 取得极限时的基本变形模式与 $[K^*]$ 未达到极限时的基本变形模式 $\{y_j\}$ (即特征向量)形状基本一致(个别变形模式反对称),变形比 $d_j$ (即特征值)相差也不大.在开始阶段,极限矩阵 $[K^*]$ 的收敛速率是极快的,这就为我们将基本变形比 $d_j$ 和基本变形模式 $\{y_j\}$ 应用在建筑层数不是太高的建筑上打下了良好的基础,可以经过简单推算得出简便计算公式,第4节中将对此进行讨论.

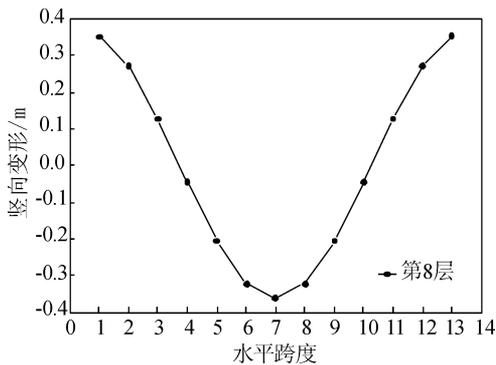


图2 由表1绘曲线( $d = 0.974 2$ ,第8层)

Fig.2 The deformation curve ( $d = 0.9742$ ,the 8th floor)

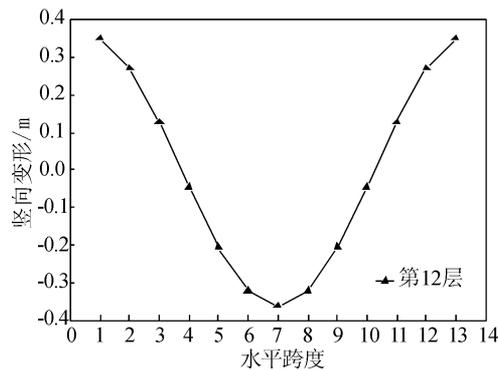


图3 由表2绘曲线( $d = 0.964 6$ ,第12层)

Fig.3 The deformation curve ( $d = 0.9646$ ,the 12th floor)

### 3 共同作用下钢筋混凝土框架高层建筑结构的差异衰减规律

本节将利用ANSYS分析结构在强制变位下(将第3节计算的不同变形比 $d_j$ 下的变形模式 $\{y_j\}$ 输入ANSYS模型)各层梁的竖向变形情况,尝试得到结构变形模式的规律.采用ANSYS中的Beam188单元建立钢筋混凝土框架结构模型,模型基本数据与第3节计算变形模式、变形比所用数据相同.

### 3.1 钢筋混凝土框架结构“卓越变形模式”分析

对于上面讨论的 24 层钢筋混凝土框架结构,变形比  $d = 1$  时,反映的是结构整体向下平移的情况,这种情况应该占结构中梁变形的主要部分,我们这里主要研究梁中的各节点的差异变形情况,所以在这里暂不考虑这种情况.对于变形比  $d = 0.992 1$  时,变形模式为短轴方向常见变形模式,将相应变形模式(第 3 节中结果)强加到结构底层上,得出结构变形如下图 4 所示.

为了更清晰的表现变形模式的规律性,我们提取有代表性的 2、13、24 层柱节点的竖向位移并作归一化处理,如图 5 所示,可以看出:

- 1) 梁的节点位移是以中间节点为对称中心,互为反对称的;
- 2) 通过图 5,可以发现节点位移从底层向上是逐渐减小的,并且是按一定规律衰减的.
- 3) 还可以看出,  $d = 0.992 1$  时在强制变形下的变形规律同衰减规律基本相似.这种变形模式是一种特殊的倾斜,在建筑物短轴方向很可能发生,这里将这种变形模式称为“卓越变形模式”.

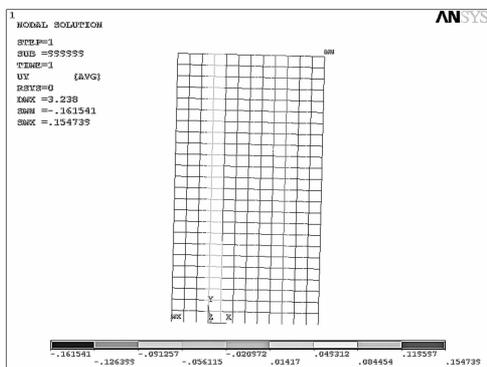


图 4  $d = 0.992 1$  时的强制变位下的变形  
Fig. 4 The imposed deformation ( $d = 0.992 1$ )

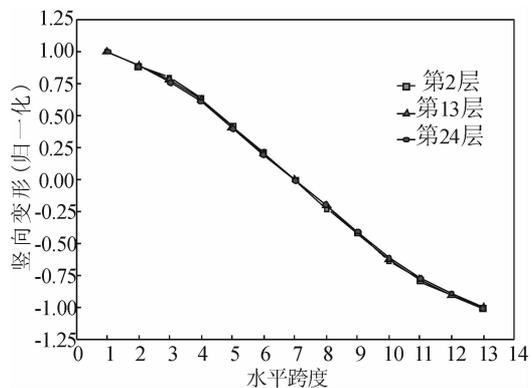


图 5  $d = 0.992 1$  时的柱节点归一化竖向变形图  
Fig. 5 The dormalized deformation curve ( $d = 0.992 1$ )

变形比  $d = 0.974 2$  时,变形呈“锅底形”,该变形模式与实测的变形情况非常相似,那么它是卓越沉降的变形模式的可能性非常大.下面重点讨论一下这种变形情况.

从图 6 中可以看到,尽管有几层间隔,但是各层变形模式基本一致.这与武建勋教授关于“差异衰减规律”的推断是一致的.下面分别选取 2、3、10、11、12、23、24 层竖向位移数据并作归一化处理,可得变形图 7.

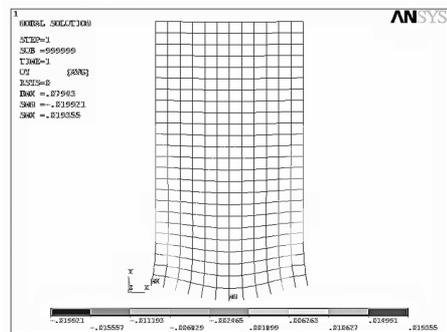


图 6  $d = 0.974 2$  时的强制变位下的变形  
Fig. 6 The imposed deformation ( $d = 0.974 2$ )

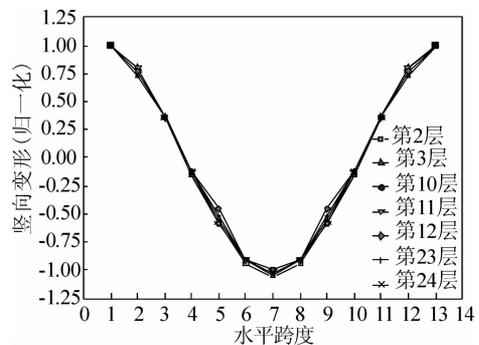


图 7  $d = 0.974 2$  时的柱节点归一化后竖向变形图  
Fig. 7 The dormalized deformation curve ( $d = 0.974 2$ )

从图 7 中可以看出各层的沉降曲线处除中间一些点外,总体上是重合的,体现了较好的规律性.这种变形模式也是在工程中较为常见的,可以把这种变形模式称作“次卓越沉降变形模式”.利用最小二乘法,可以在 excel 中拟合出变形比  $d = 0.974 2$  时的曲线方程:

$$y = 2E - 05x^6 - 0.000 7x^5 + 0.009 8x^4 - 0.048 9x^3 + 0.035 5x^2 - 0.136 9x + 1.119 2 \quad (7)$$

其中  $x$  为跨数,  $y$  为竖向变形.

对其他变形模式进行分析,也很好地得到了类似的规律,这里不再赘述.

### 3.2 钢筋混凝土框架结构刚度矩阵达到极限时的变形模式分析

上文的分析当中,  $[k^*]$  的取值远远没有达到极限,下面想要讨论当  $[k^*]$  达到极限时,变形模式、

变形比会出现怎样的情况,看其是否与层数较低时的规律相同.对于170层的钢筋混凝土框架结构,刚度矩阵 $[k^*]$ 达到极限,下面采用ANSYS对其进行分析,模型基本数据也与第2节计算变形模式、变形比所用数据相同.

这里简单介绍当 $d = 0.9646$ 时的主要变形模式进行讨论,其它变形模式研究思路相同.对于变形比 $d = 0.9646$ ,变形模式为短轴方向常见变形模式,将相应变形模式(第3节中结果)强加到结构底层上,得出结构变形如下图8所示.

提取有代表性的数层柱节点的竖向位移并作归一化处理,如图9所示,可以看出:柱节点的竖向变形曲线在72层以后各层变形的轮廓基本一样,与“差异衰减规律”对于顶部各层变化的描述一致.将这里的变形结果与前文中24层结构的变形结果对比可以发现规律:每一种变形模式是相近似的,拟合后能很好的重合.

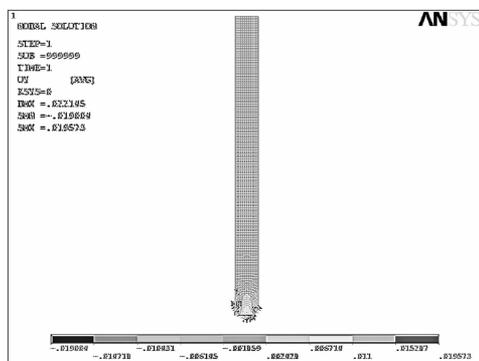


图8  $d = 0.9646$  时的强制变位下的变形图

Fig. 8 The imposed deformation ( $d = 0.9646$ )

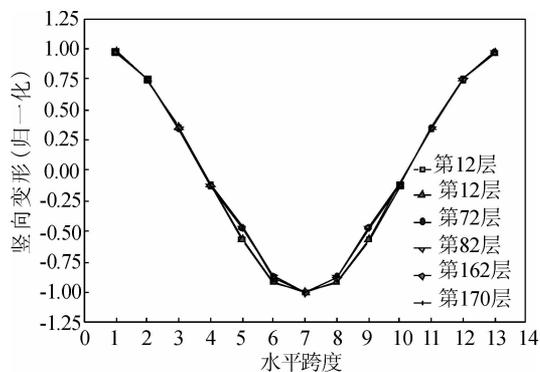


图9  $d = 0.9646$  时的柱节点归一化后竖向变形图

Fig. 9 The dormalized deformation curve ( $d = 0.9646$ )

#### 4 基于差异衰减规律的高层建筑共同作用的计算方法

基于差异衰减规律,文<sup>[6]</sup>提出考虑高层建筑上部结构与地基基础共同作用线性叠加法,下面将对其公式(4)中各个因子的确定进行讨论.其中,特征值 $d_j$ 和特征向量 $\{y_j\}$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, m$ )可以根据实矩阵 $[A]$ 来求得.首层变形 $\{u_1\}$ 正是建筑物的附加变形( $c'$ ).根据( $c'$ )图中的“差状态”地基中合力为零的应力,之后采取适当的地基模型:如线弹性地基模型,就可以的出建筑物的附加变形 $\{u_1\}$ .

对于矩阵 $[A]$ 的特征向量间有如下正交关系<sup>[7-8]</sup>:

$$x_i^T y_j = \begin{cases} 0 & (\lambda_i \neq \lambda_j) \\ \text{任意非零常数} & (\lambda_i = \lambda_j) \end{cases} \quad (8)$$

其中 $x_i^T$ 为 $[A]$ 对应于特征值 $\lambda_i$ 的左特征向量, $y_j$ 为 $[A]$ 对应于特征值 $\lambda_j$ 的右特征向量.根据 $\{u_1\} = \sum_{j=1}^m a_j \{y_j\}$ ,将此式两端依次分别左乘左特征向量 $x_i^T$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ),由以上正交性可以分别求出系数:

$$a_j = x_j^T \{u_1\} / x_j^T y_j \quad (j = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (9)$$

将求得的 $a_j, \lambda_j$ 即 $d_j$ 代入式(4),可得该结构各层的变形.

#### 5 结论

本文与一般进行的高层共同作用分析的不同在于对高层结构的“差状态”进行了讨论,这使得结构消除掉重力的影响,而呈现出本质的变形规律——“差异衰减规律”.将计算所得的“差状态”变形,加上现行设计结果,得出的就是结构的真实变形.

(1)通过数值模拟实验,以及前人对不同结构形式的高层建筑的分析,可以说“差异衰减规律”是客观存在的,并且基本变形模式和衰减比都呈现出了很好的规律性.

(2)通过变形情况可知,“卓越变形模式”是一种特殊的倾斜,在工程中是相对重要的;“次卓越变形模式”是我们在工程中经常遇到的一种变形模式,它的变形曲线是和实际观测的沉降曲线极为相似的,

把握住了这一点,就能很好地尝试进行计算方法的研究.

(3)结构的基本变形模式不只一种,这说明了实际观测曲线比上文得出的任何一条变形曲线都要复杂,实际的沉降曲线应该是众多基本变形曲线的线性叠加.

(4)通过本文中的方法,高层结构各层的竖向变形可以近似表示为  $\{u_{i+1}\} \approx \sum_{j=1}^m a_j d_j^i \{y_j\}$ . 实际上,控制结构变形的主要是前几阶变形模式,甚至可以只取前3项,这也使得这套计算分析方法十分简便,可以应用于实际工程.

## 参考文献 References

- [1] 董建国,赵锡宏. 高层建筑地基基础-共同作用理论与实践[M]. 上海:同济大学出版社,1997:103-169.  
DONG Jian-guo, ZHAO Xi-hong. High-rise building foundation- Co-work theory and practice[M]. Shanghai: Tongji University Press, 1997:103-169.
- [2] 武建勋. 多高层建筑共同作用讲义[M]. 北京:中国矿业大学(北京),2000:8-15.  
WU Jian-xun. High-rise building Co-work[M]. Beijing:China University of Mining & Technology (Beijing), 2000:8-15.
- [3] 武建勋. 计算力学中的静力衰减[J]. 应用数学和力学,1991,12(4):345-354.  
WU Jian-xun. The Theory of Static Decay in Computational Mechanics[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1991,12(4):345-354.
- [4] AWREJCEWICZ J. The Saint-Venant's principle and an impact load acting on an elastic half-space [J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 264: 245-251.
- [5] WU Jian-xun, TAO Long-guang, GAO Er-xin. The similarity of Deformations in High-rise Buildings[J]. Proceedings of international Conference on Engineering and Technological Sciences, 2000,7(11):214-218.
- [6] 王永亮,武建勋. 基于差异衰减规律的高层建筑共同作用的计算方法[J]. 河南城建学院学报,2010,19(1):11-14.  
WANG Yong-liang, WU Jian-xun. On method of calculating on joint effect based on differences in attenuation of high-rise building[J]. Journal of Henan University of Urban Construction. 2010,19(1):11-14.
- [7] 威尔金森(J. H. Wilkinson). 代数特征值问题[M]. 北京:科学出版社,1987:357-370.  
WILKINSON J H. The algebraic eigenvalue problem[M]. Beijing: Science Press, 1987:357-370.
- [8] 合恩. 矩阵分析[M]. 北京:机械工业出版社,2005:211-216.  
HORN R A. Matrix Analysis[M]. Beijing: Machinery Industry Press, 2005:211-216.

## RC frame structure-groundwork-foundation co-work via attenuation orderliness

WANG Yong-liang<sup>1</sup>, WU Jian-xun<sup>2</sup>, CHE Wen<sup>2</sup>, WANG Guo-cheng<sup>3</sup>

(1. Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. School of Mechanics & Civil Engineering, China University of Mining & Technology, Beijing 100083, China;

3. Department of Civil Engineering, Tianjin Institute of Urban Construction, Tianjin 300384, China)

**Abstract:** In practical design, the upper structure and the foundation of a high-rise building are generally handled in separate ways. As a result of such mal-practice, errors may easily occur, and this naturally necessitates a consideration of the coupling between them. This paper presented a study aimed to deal with such subtract state in interaction of the two so as to obtain the eigenvalue as well as the eigenvector of the real matrix by continued fraction attenuation theory. The deformation model and the distortions are also analyzed in trying to bring about a practical calculation method.

**Key words:** RC frame; interaction; attenuation; method of linear superposition; uprightness