

# 用 Kantorovich 及 Galerkin 联合法 研究双模量板的弯曲

吴 晓

(湖南文理学院土木建筑工程学院, 湖南 常德 415000)

**摘 要:** 双模量矩形板在外载荷作用下, 会形成各向同性的拉伸区和压缩区, 因此可把双模量矩形板看成两种各向同性材料组成的层合板, 采用弹性力学理论建立了双模量矩形板在外载荷作用下的静力平衡方程, 利用静力平衡方程确定了双模量矩形板的中性面位置. 在此基础上, 采用 Kantorovich 及 Galerkin 联合法研究了双模量矩形板的弯曲问题. 把该方法计算结果与有限元计算结果进行了比较分析, 验证了此方法计算精度比较高. 算例分析表明, 当双模量矩形板材料的拉压弹性模量相差较大时, 其弯曲计算不宜采用相同弹性模量经典薄板理论, 而应该采用双模量弹性理论.

**关键词:** Kantorovich; Galerkin; 双模量; 板; 弯曲

**中图分类号:** O343.7

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1006-7930(2012)04-0457-06

航天航空及机械工程中的石墨、增强复合材料、金属合金、陶瓷、玻璃、铸铁等许多材料都具有拉压弹性模量不同的双模量性质. 尤其是近几年发展起来的复合材料更具有明显的拉压弹性模量不同的特性, 如美国研制的具有世界一流水平的“超黑粉”纳米吸波材料中的黑粉, 就是把石墨作为吸收剂制成石墨/环氧树脂复合材料, 其中石墨材料的拉压弹性模量之比高达四倍, 用不同弹性模量本构关系对这些材料制成的结构进行计算分析已备受关注. 对于拉压不同弹性模量材料, 弹性系数不仅依赖于结构材料, 还根据结构各点位移或应力状态的不同而不同, 亦即与结构材料、形状、边界条件及外载荷有关. 在梁、弹性平面等问题的结构中, 已开始考虑材料的不同弹性模量特性<sup>[1-11]</sup>. 有关文献采用 Kantorovich 法研究了矩形板弯曲问题. Kantorovich 法是里兹法的改进, 它的特点是在一个方向用里兹法求近似解, 另一个方向仍根据微分方程求精确解, 此方法虽然计算精度高, 但计算过程繁琐复杂. 本文在矩形板一个方向假设一已知梁函数, 采用 Kantorovich 法得到四阶常微分方程, 在矩形板另一个方向假设一未知梁函数, 把未知梁函数代入四阶常微分方程中后利用 Galerkin 法求出未知梁函数, 这样即可方便地计算双模量矩形板的弯曲挠度. 算例分析表明, 采用 Kantorovich 和 Galerkin 联合法研究双模量矩形板弯曲挠度, 不但计算简便而且计算精度也较高.

## 1 双模量矩形板的内力方程

对于双模量矩形板的纯弯曲, 其中性面不再位于板厚的正中央, 而是形成了各向同性的拉伸区和压缩区. 假设双模量矩形板变形前垂直于中面的直线, 变形后仍为垂直于中曲面的直线段, 且长度不变, 即直法线假定. 由弹性力学理论可知双模量矩形板纯弯曲时的应力表达式为

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{E_i Z}{1 - \mu_i^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_i \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y = -\frac{E_i Z}{1 - \mu_i^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} = -\frac{E_i Z}{1 + \mu_i} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期: 2011-03-11 修改稿日期: 2012-07-03

基金项目: 湖南省“十二五”重点建设学科(机械设计及理论)和湖南省教育厅基金资助项目(11A081)

作者简介: 吴晓(1965-), 男, 湖南常德人, 教授, 主要从事结构振动理论研究.

式中,  $i$  取值为 1 或 2;  $E_1$ 、 $\mu_1$  分别为拉伸弹性模量及泊松比,  $E_2$ 、 $\mu_2$  分别为压缩弹性模量及泊松比.  $\sigma_x$  为作用在垂直于  $x$  轴的面上的正应力,  $\sigma_y$  为作用在垂直于  $y$  轴的面上的正应力,  $\tau_{xy}$  为作用在垂直于  $x$  轴的面上沿  $y$  轴方向的剪应力.

双模量矩形板弯曲时, 由弹性理论知其横截面内力应满足以下关系

$$\begin{cases} \frac{E_1}{1-\mu_1^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_0^{h_1} z dz + \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{h_1-h}^0 z dz = 0 \\ \frac{E_1}{1-\mu_1^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \int_0^{h_1} z dz + \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \int_{h_1-h}^0 z dz = 0 \end{cases} \quad (2)$$

把式(2)中两式相加可得

$$\frac{E_1}{1-\mu_1^2} \int_0^{h_1} z dz + \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \int_{h_1-h}^0 z dz = 0 \quad (3)$$

由式(3)可以求得中性面的位置为

$$h_1 = \frac{h \sqrt{E_2(1-\mu_1)}}{\sqrt{E_1(1-\mu_2)} + \sqrt{E_2(1-\mu_1)}} \quad (4)$$

在式(3)中还有另一个解  $h_1 = \frac{h \sqrt{E_2(1-\mu_1)}}{\sqrt{E_1(1-\mu_2)} - \sqrt{E_2(1-\mu_1)}} > h$ , 舍去该不合理解.

利用式(1)由弹性理论可以得到双模量板横截面弯矩及扭矩表达式为

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{E_1}{1-\mu_1^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_0^{h_1} z^2 dz - \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{h_1-h}^0 z^2 dz \\ &= \left[ \frac{E_2(h_1-h)^3}{3(1-\mu_2^2)} - \frac{E_1 h_1^3}{3(1-\mu_1^2)} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[ \frac{E_2(h_1-h)^3 \mu_2}{3(1-\mu_2^2) \mu_1} - \frac{E_1 h_1^3}{3(1-\mu_1^2)} \right] \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} M_y &= -\frac{E_1}{1-\mu_1^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \int_0^{h_1} z^2 dz - \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \int_{h_1-h}^0 z^2 dz \\ &= \left[ \frac{E_2(h_1-h)^3}{3(1-\mu_2^2)} - \frac{E_1 h_1^3}{3(1-\mu_1^2)} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left[ \frac{E_2(h_1-h)^3 \mu_2}{3(1-\mu_2^2) \mu_1} - \frac{E_1 h_1^3}{3(1-\mu_1^2)} \right] \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (5b)$$

$$M_{xy} = -\frac{E_1}{1+\mu_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_0^{h_1} z^2 dz - \frac{E_2}{1+\mu_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{h_1-h}^0 z^2 dz = \frac{E_2(h_1-h)^3}{3(1+\mu_2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{E_1 h_1^3}{3(1+\mu_1)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (5c)$$

## 2 双模量薄板的弯曲挠度

对于图 1 所示双模量矩形板, 由弹性理论可知其由弯矩引起的形变势能为

$$\begin{aligned} U_1 &= -\frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left( M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left\{ D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] + 2D_1 \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{式中, } D = \frac{E_1 h_1^3}{3(1-\mu_1^2)} - \frac{E_2 (h_1-h)^3}{3(1-\mu_2^2)}, D_1 = \frac{\mu_1 E_1 h_1^3}{3(1-\mu_1^2)} - \frac{\mu_2 E_2 (h_1-h)^3}{3(1-\mu_2^2)}$$

双模量矩形板在均布荷载作用下的势能为

$$U_2 = -\int_0^a \int_0^b q w dx dy \quad (7)$$

设双模量矩形板的挠度函数表达式为

$$w(x, y) = u(x) \cdot v(y) \quad (8)$$

式中, 假设  $v(y)$  为已知梁函数,  $u(x)$  为未知梁函数.

由式(6)一式(8)可知双模量矩形板的总势能表达式为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a g(x, u, u', u'') dx = \frac{1}{2} \int_0^a \left\{ D \left[ (u'')^2 \int_0^b v^2 dy + u^2 \int_0^b (v'')^2 dy + 2(u')^2 \int_0^b (v')^2 dy \right] + \right.$$

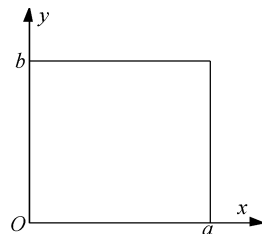


图 1 双模量矩形板

Fig. 1 Bimodulus plate

$$2D_1 \left[ u''u \int_0^b vv'' dy - (u')^2 \int_0^b (v')^2 dy \right] - 2u \int_0^b qv dy \} dx \quad (9)$$

对于式(9)进行一阶变分可以得到

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_0^a \left( \frac{\partial g}{\partial u} \delta u + \frac{\partial g}{\partial u'} \delta u' + \frac{\partial g}{\partial u''} \delta u'' \right) dx \quad (10)$$

利用微分符号与变分符号的可交换性且对式(10)分步积分可得

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_0^a \left[ \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial u'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial g}{\partial u''} \right) \right] \delta u dx + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g}{\partial u'} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial u''} \right) \right] \delta u \Big|_0^a + \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u''} \delta u' \Big|_0^a \quad (11)$$

令式(11)  $\delta U = 0$ , 可以得到欧拉方程为

$$\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial u'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial g}{\partial u''} \right) = 0 \quad (12)$$

由于已假设  $v(y)$  为已知梁函数,  $u(x)$  为未知梁函数, 则把式(8)代入式(12)中利用伽辽金原理可以得到

$$\int_0^a \left[ \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial u'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial g}{\partial u''} \right) \right] u(x) dx = 0 \quad (13)$$

利用式(13)即可以确定未知梁函数.

对于在均布荷载作用下的三边简支且一边固定的双模量矩形板, 可设

$$u(x) = A \left( \frac{x^4}{a^4} - \frac{2x^3}{a^3} + \frac{x}{a} \right) \quad (14)$$

$$v(y) = \frac{2y^4}{b^4} - \frac{5y^3}{b^3} + \frac{3y^2}{b^2} \quad (15)$$

把式(14)、式(15)代入式(13)中可以求得

$$A = 524.579 qa^4 / [2 \ 526.316(1 + 2.3\lambda^2 + 2.452\lambda^4)D - \lambda^2 D_1] \quad (\lambda = \frac{a}{b}) \quad (16)$$

对于在均布荷载作用下的四边简支的双模量矩形板, 可设

$$u(x) = A \left( \frac{x^4}{a^4} - \frac{2x^3}{a^3} + \frac{x}{a} \right) \quad (17)$$

$$v(y) = \frac{y^4}{b^4} - \frac{2y^3}{b^3} + \frac{y}{b} \quad (18)$$

把式(17)、式(18)代入式(13)中可以求得

$$A = 45.932 qa^4 / [271.186(1 + 1.9941\lambda^2 + 0.999\lambda^4)D - \lambda^2 D_1] \quad (19)$$

当  $a = b$ ,  $E_1 = E_2 = E$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 0.3$  时可求得各向同性材料三边简支一边固定方板的挠度函数为

$$w(x, y) = \frac{0.036qa^4}{D} \left( \frac{x^4}{a^4} - \frac{2x^3}{a^3} + \frac{x}{a} \right) \left( \frac{2y^4}{a^4} - \frac{5y^3}{a^3} + \frac{3y^2}{a^2} \right) \quad (20)$$

各向同性材料四边简支方板的挠度函数为

$$w(x, y) = \frac{0.0424qa^4}{D} \left( \frac{x^4}{a^4} - \frac{2x^3}{a^3} + \frac{x}{a} \right) \left( \frac{y^4}{a^4} - \frac{2y^3}{a^3} + \frac{y}{a} \right) \quad (21)$$

由式(20)可以求得三边简支一边固定方板的中心挠度为  $w(a/2, a/2) = 0.00282 qa^4/D$ , 而采用弹性力学经典公式得到的中心挠度为  $w(a/2, a/2) = 0.0028 qa^4/D$ , 两者误差为 0.71%.

由式(21)可以求得四边简支方板的中心挠度为  $w(a/2, a/2) = 0.0041 qa^4/D$ , 而采用弹性力学经典公式得到的中心挠度为  $w(a/2, a/2) = 0.00407 qa^4/D$ , 两者误差为 0.74%.

从以上两个算例可以看出, 采用 Kantorovich 和 Galerkin 联合法研究各向同性材料矩形板的弯曲挠度, 不但计算过程简便, 而且计算精度很高, 验证了本文方法是可靠的.

### 3 算例分析

为了具体分析拉压弹性模量对双模量矩形板弯曲变形的影响, 以表1所示材料组成的四边简支和三边简支矩形板在均布荷载作用下为例进行计算. 其中材料1为玻璃丝织物, 材料2为假想的单模量材料.

表 1 材料参数

Tab. 1 The elasticity parameters

Material	Tensile elastic modulus/ $E_1 \cdot (\text{GPa})^{-1}$	Compressive elastic modulus/ $E_2 \cdot (\text{GPa})^{-1}$	Tensile poisson ratio / $\mu_1$	Compressive poisson ratio / $\mu_2$
Material 1	30. 38	16. 17	0. 35	0. 19
Material 2	30. 38	30. 38	0. 35	0. 35

为了验证本文计算方法正确性,分别用 ANSYS 和本文方法计算了由材料 1 或材料 2 组成的四边简支和三边简支一边固定矩形板在均布载荷作用下的中点挠度( $w_0$ ),板边长  $a = 2\ 000\ \text{mm}$ ,  $h = 100\ \text{mm}$ . 由材料 1 组成的板有限元计算时采用 8 节点 SOLID185 单元. 由式(4)计算出受拉区高度  $h_1 = 60\ \text{mm}$ , 上层 60 mm 材料参数为  $E = 16. 17\ \text{GPa}$ ,  $m = 0. 19$ , 下层 40 mm 材料参数为  $E = 30. 38$ ,  $m = 0. 35$ , 厚度方向单元尺寸为 20 mm, 边长方向单元尺寸为 40 mm. 由材料 2 组成的板有限元计算时采用采用 8 节点 SOLID185 单元. 材料参数为  $E = 30. 38$ ,  $m = 0. 35$ , 厚度方向单元尺寸为 20 mm, 边长方向单元尺寸为 40 mm.  $qa^4/h^4 = 50\ \text{GPa}$  时材料 1 组成四边简支方板( $\lambda = 1$ )和  $qa^4/h^4 = 100\ \text{GPa}$  时材料 2 组成四边简支方板( $\lambda = 1$ )节点平面外位移如图 2 和 3 所示. 计算结果及结果比较如表 2—表 5 所示. 结果比较数值为本文结果与 ANSYS 计算结果差值除以 ANSYS 计算结果.

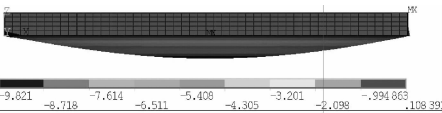


图 2 节点平面外位移(材料 1)  
Fig. 2 The nodes displacement  
out of plane (material 1)

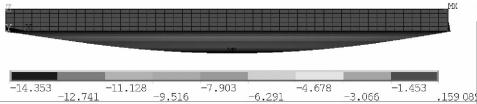


图 3 节点平面外位移(材料 2)  
Fig. 3 The nodes displacement  
out of plane (material 2)

表 2 本文结果与 ANSYS 结果比较(四边简支)( $\lambda = 1$ )

Tab. 2 The results comparison of  $qa^4/h^4$  between this paper and ANSYS

Material	$qa^4/h^4 (\times 10^{10})$		5	10	15	20	25	30
Material 1	$w_0/\text{mm}$	This paper	10.0	20.7	30.8	40.6	51.5	59.3
		ANSYS	9.8	20.4	30.5	40.2	51.0	58.8
		Difference percentage/%	2.0	1.47	0.98	0.99	0.98	0.85
Material 2	$w_0/\text{mm}$	This paper	7.2	14.5	21.5	29.3	36.0	43.8
		ANSYS	7.1	14.3	21.2	29.0	35.5	43.5
		Difference percentage/%	1.41	1.39	1.42	1.08	1.41	1.45

表 3 本文结果与 ANSYS 结果比较(四边简支)( $\lambda = 1. 2$ )

Tab. 3 Results comparison of  $qa^4/h^4$  between this paper and ANSYS

Material	$qa^4/h^4 (\times 10^{10})$	5	10	15	20	25	30	
Material 1	$w_0/\text{mm}$	This paper	8.1	16.3	24.5	32.9	40.9	49.1
		ANSYS	8.0	16.1	24.3	32.4	40.5	48.6
		Difference percentage/%	1.25	1.24	0.82	1.54	0.98	1.03
Material 2	$w_0/\text{mm}$	This paper	5.6	11.3	17.0	22.7	28.5	34.1
		ANSYS	5.5	11.1	16.8	22.4	28.1	33.6
		Difference percentage/%	1.82	1.80	1.19	1.34	1.42	1.49

表 4 本文结果与 ANSYS 结果比较(三边简支一边固定)( $\lambda = 1$ )

Tab. 4 Results comparison of  $qa^4/h^4$  between this paper and ANSYS

Material	$qa^4/h^4\ (\times 10^{10})$		5	10	15	20	25	30
Material 1	$w_0/\text{mm}$	This paper	7.2	14.5	21.9	29.5	21.9	43.9
		ANSYS	7.1	14.3	21.6	29.3	21.6	43.2
		Difference percentage/%	1.41	1.39	1.39	1.37	1.38	1.62
Material 2	$w_0/\text{mm}$	This paper	4.9	10.0	14.9	20.4	24.9	30.5
		ANSYS	4.8	9.9	14.7	20.2	24.5	30.1
		Difference percentage/%	2.0	1.0	1.36	1.47	1.63	1.66

表 5 本文结果与 ANSYS 结果比较(三边简支一边固定)( $\lambda = 1.2$ )

Tab. 5 Results comparison of  $qa^4/h^4$  between this paper and ANSYS

Material	$qa^4/h^4 (\times 10^{10})$		5	10	15	20	25	30
Material 1	$w_0/\text{mm}$	This paper	5.7	11.5	17.3	23.5	28.8	34.9
		ANSYS	5.6	11.3	17.1	23.2	28.3	34.3
		Difference percentage/%	1.78	1.78	1.75	1.72	1.73	1.75
Material 2	$w_0/\text{mm}$	This paper	3.9	7.8	11.9	15.8	19.7	23.9
		ANSYS	3.8	7.6	11.7	15.5	19.5	23.5
		Difference percentage/%	2.61	2.63	1.71	1.71	1.5	1.28

Kantorovich 法是里兹法的改进,它的特点是在一个方向用里兹法求近似解,另一个方向仍根据微分方程求精确解,此方法虽然计算精度高,但计算过程繁琐复杂. 本文在矩形板一个方向假设一已知梁函数,采用 Kantorovich 法得到四阶常微分方程,在矩形板另一个方向假设一未知梁函数,把未知梁函数代入四阶常微分方程中后利用 Galerkin 法求出未知梁函数,这样即可方便地计算双模量矩形板的弯曲挠度. 算例分析表明,采用 Kantorovich 和 Galerkin 联合法研究双模量矩形板弯曲挠度,不但计算简便而且计算精度也较高.

由以上各表可以看出,采用有限元方法和本文方法计算的结果非常相近,二者相差都非常小,这验证了本文方法的可靠性.

但是,随着长宽比  $\lambda$  的增大双模量矩形板的中点挠度将变小,这主要是随着长宽比  $\lambda$  的增大将使双模量矩形板的刚度在增加.

随着作用在双模量矩形板上载荷的增大采用有限元方法和本文方法计算的结果误差也增大,这主要是由于作用在双模量矩形板上载荷小将使双模量矩形板的中点挠度更小、作用在双模量矩形板上载荷大将使双模量矩形板的中点挠度更大,这样才导致随着作用在双模量矩形板上载荷的增大采用有限元方法和本文方法计算的结果误差增大.

本文方法计算结果比有限元方法偏大,这主要是本文假设双模量矩形板弯曲变形的挠度并不是双模量矩形板弯曲变形的真实挠度,另外采用有限元方法计算双模量矩形板弯曲变形挠度时考虑了剪切变形的影响,而本文方法计算双模量矩形板弯曲变形挠度时没有考虑了剪切变形的影响,所以本文方法计算结果比有限元方法偏大.

对以上计算结果进行分析还可以知道,对于拉压弹性模量不同材料的矩形板弯曲变形,不考虑拉压弹性模量相异时其计算结果与实际情况相差较大,超过了工程上所允许的计算误差. 所以,对于拉压弹性模量相差较大的矩形板弯曲变形,其中点挠度的计算不宜采用相同弹性模量经典薄板理论,而应该采用双模量薄板弹性理论.

4 结 论

- 1)随着长宽比  $\lambda$  的增大双模量矩形板的中点挠度将变小.
- 2)对于拉压弹性模量相差较大的矩形板弯曲变形,其中点挠度的计算不宜采用相同弹性模量经典薄板理论,而应该采用双模量薄板弹性理论.
- 3)Kantorovich 法是里兹法的改进,它的特点是在一个方向用里兹法求近似解,另一个方向仍根据微分方程求精确解,此方法虽然计算精度高,但计算过程繁琐复杂. 本文在矩形板一个方向假设一已知梁函数,采用 Kantorovich 法得到四阶常微分方程,在矩形板另一个方向假设一未知梁函数,把未知梁函数代入四阶常微分方程中后利用 Galerkin 法求出未知梁函数,这样即可方便地计算双模量矩形板的弯曲挠度.
- 4)用 Kantorovich 和 Galerkin 联合法研究双模量矩形板弯曲挠度,不但计算简便而且计算精度也较高.

参考文献 References

[1] MEDRI G. A nonlinear elastic model for isotropic materials with different behavior in tension and compression[J]. Transactions of the ASME,1982,26(104):26-28.

- [2] BERT C W, Reddy J N, Chao W C, et al. Vibration of thick rectangular plates of bimodulus composite material [J]. Journal of Applied Mechanics, 1981, 48(2): 371-376.
- [3] SRINIVASAN R S, RAMACHANDRA L S. Axisymmetric nonlinear dynamic response of bimodulus annular plates [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1990, 112(2): 202-205.
- [4] 阿巴尔楚米扬. 不同模量弹性理论[M]. 郭瑞峰, 张允真译. 北京: 中国铁道出版社, 1986. 11-22.  
AMBARTSUMYAN S A. Elasticity theory of different modulus[M]. WU Rui-Feng, ZHANG Yun-Zhen[Translated]. Beijing: China Railway Press, 1986. 11-22.
- [5] 李战莉, 黄再兴. 双模量泡沫材料等效弹性模量的细观力学估算方法[J]. 南京航空航天大学学报, 2006, 38(4): 464-468.  
LI Zhan-li, HUANG Zai-xing. Meso-mechanical method for estimating equivalent elastic modulus of foam-solid with double-modulus[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2006, 38(4): 464-468.
- [6] 曾纪杰. 对中柔度压杆的双模量理论的修正[J]. 机械强度, 2006, 28(3): 462-464.  
ZENG Ji-Jie. Revision of the formula with bimodulus intermediate column[J]. Journal of Mechanical Strength, 2006, 28(3): 462-464.
- [7] 蔡来生, 俞焕然. 拉压模量不同弹性物质的本构[J]. 西安科技大学学报, 2009, 29(1): 17-21.  
CAI Lai-sheng, YU Huan-ran. Constitutive relation of elastic materials with different elastic moduli in tension and compression[J]. Journal of Xi'an University of Science and Technology, 2009, 29(1): 17-21.
- [8] 罗战友, 夏建中, 龚晓南. 不同拉压模量及软化特性材料的柱形孔扩张问题的统一解[J]. 工程力学, 2008, 25(9): 79-84.  
LUO Zhan-you, XIA Jian-zhong, GONG Xiao-nan. Unified solution for expansion of cylindrical cavity in strain-softening materials with different elastic moduli in tension and compression[J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(9): 79-84.
- [9] 吴莹, 赵永刚, 李世荣. 拉压弹性模量不等材料杆的纯弯曲及偏心压缩[J]. 甘肃工业大学学报, 2001, 21(1): 101-105.  
WU Ying, ZHAO Yong-gang, LI Shi-rong. Pure bend and excentrical compression of rod made of material with non-identical elastic modulus of tension and compression[J]. Journal of Gansu University of Technology, 2001, 21(1): 101-105.
- [10] 周怡之. 双模量 Winkler 地基简支长矩形板剪切屈曲[J]. 上海工业大学学报, 1993, 14(6): 478-484.  
ZHOU Yi-zhi. Shear Stability of Long Rectangular plates on Bi-Moduli Elastic Foundations[J]. Journal of Shanghai University of Technology, 1993, 14(6): 478-484.
- [11] 王子昆. 拉压不同模量圆柱薄壳在均匀轴压下的对称失稳[J]. 西安交通大学学报, 1989, 23(6): 94-100.  
WANG Zi-kun. Symmetrical buckling of circular cylindrical thin shell with different elastic moduli in tension and compression under a well-distributed axial load[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 1989, 23(6): 94-100.

## Kantorovich and galerkin solution to the bending of bimodulous plate

WU Xiao

(College of Architecture & Civil Engineering, Hunan University of Arts and Science, Hunan Changde 415000, China)

**Abstract:** Bimodulous rectangular plate could form isotropic compression and tensile area under uniform load. Bimodulous rectangular plate was regarded as laminated plate composed of two kind of isotropic material. Static equilibrium equation of bimodulous plate under uniform load was established by using elastic mechanics theory. The location of neutral plane in bimodulous rectangular plate was determined by the utilization of static equilibrium equation. Then the bending deformation of bimodulous rectangular plate under uniform load was studied with Kantorovich and Galerkin variational method. And the calculation results were compared with that obtained by finite element, and it shows that Kantorovich and Galerkin variational method is reliable. The main conclusions are as follows: the deflection calculation of bimodulous rectangular plate which has larger difference between tensile elastic modulus and compressive elastic modulus may as well not apply classical plate-shell theory with the same elastic modulus, and should use bimodulous elastic theory.

**Key words:** *kantorovich; galerkin; bimodulous; plate; bending*