

# 能量法计算无梁板桥结构的理论解及数值分析

吴尚德

(甘肃铁一院工程监理有限责任公司, 甘肃 兰州 730000)

**摘 要:**由经典的薄板弯曲理论为基础,利用能量原理,首次提出并推导了无梁板桥在均布荷载下的挠度函数,由此还给出了桥面板正应力的表达式,并根据一系列的公式制成 Excel 表格,直接在表格中输入数据,使数据的处理更加方便.利用大型空间有限元程序 ANSYS 对无梁板桥进行建模,分析了其在恒载、车道荷载作用下的挠度和应力的变化规律,结果表明无梁板桥能承受较大的汽车荷载.通过有限元的数值分析,对无梁板桥的受力性能有了一定的认识.为验证所推导的公式的正确性,给出无梁板桥的算例,用推导的理论公式分析了桥面板的挠度和正应力,计算结果和有限元的计算结果吻合得较好,从而验证了该方法的正确性,对这类结构的设计及其工程应用提供参考.

**关键词:**无梁板桥;能量原理;受力分析;数值分析

**中图分类号:**U448

**文献标志码:**A

**文章编号:**1006-7930(2013)03-0371-08

无梁板桥具有建筑高度低、整体受力良好、构造灵活、适应性强、外形简洁美观、便于施工等特点,因此,在跨度 10~30 m 的中小桥方面具有很大的发展潜力,特别适用于城市高架桥和高速公路跨线桥等对桥下净空要求较高的领域<sup>[1-2]</sup>.

无梁板桥受力情况复杂,为其研究带来很大的困难,目前国内外关于这种结构的研究资料较少<sup>[3]</sup>,我国规范上尚没有关于无梁板桥这种结构设计的说明<sup>[4-6]</sup>.另外,对于无梁板桥的结构受力,至今还没有一套成熟的理论计算方法,以前也曾有人提出分析无梁板桥的解析法<sup>[1]</sup>,但和实际情况相比误差很大,这在很大程度上限制了无梁板桥这种桥型的推广应用.

本文首先由经典的薄板弯曲理论为基础,利用能量原理,首次提出并推导了无梁板桥在均布荷载下的挠度函数,由此还给出了桥面板正应力的表达式,并根据一系列的公式制成 Excel 表格,直接在表格中输入数据,使数据的处理更加方便.其次利用大型空间有限元程序 ANSYS 对无梁板桥进行建模,分析了其在恒载、车道荷载作用下的挠度和应力的变化规律,结果表明无梁板桥能承受较大的汽车荷载.通过有限元的数值分析,对无梁板桥的受力性能有了进一步的认识.为验证本文所推导的公式的正确性,给出无梁板桥的算例,用本文推导的理论公式分析了桥面板的挠度和正应力,计算结果和有限元的计算结果吻合得较好,从而验证了该方法的正确性,对这类结构的设计及其工程应用提供参考.

## 1 无梁板桥的理论解法

目前,关于无梁板桥的受力还没有一套成熟的理论分析方法,只能通过有限元等数值方法分析其受力,这远不能满足人们对无梁板桥深入研究的需要.本文以板的弯曲理论为基础,根据有限元的分析结果,应用能量原理得出无梁板桥的竖向位移函数,根据这个函数可以很容易的算出桥面板各点的应力.

### 1.1 位移函数的提出及推导

这里主要研究双柱式桥墩无梁板桥在均布荷载下的竖向位移,即挠度  $w$ .图 1 所示为一座典型的三跨无梁板桥平面支承形式.桥板全长  $2a$ ,板宽  $2b$ ,板两端与桥台简支,中间有两排双柱式桥墩,桥墩与

板固结. 坐标原点取在板的中心, 桥梁中跨跨度为  $2a_0$ , 两边跨对称布置, 四个墩柱的中心点坐标分别为  $(a_0, b_0)$ ,  $(a_0, -b_0)$ ,  $(-a_0, b_0)$ ,  $(-a_0, -b_0)$ . 在无梁板桥结构中, 柱顶尺寸相对于上部桥面板的最小板边来说是足够小的, 为简化计算, 可将板柱连接处看成一点, 另外, 沿挠度方向, 柱的刚度远大于板的刚度, 因此, 可将柱视为绝对刚性的. 这样, 板的位移边界条件变为:

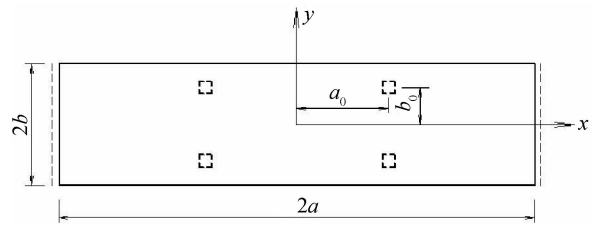


图1 正规支承无梁板桥平面简图

Fig. 1 The plan map of girderless slab bridge with regular supported

$$(\omega)_{x=\pm a} = 0, (\omega)_{x=\pm a_0, y=\pm b_0} = 0, \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)_{x=\pm a_0, y=\pm b_0} = 0, \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)_{x=\pm a_0, y=\pm b_0} = 0 \quad (1)$$

选取位移函数  $w$  为

$$w = C_1 \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \left[ t \left(1 - \frac{x^2}{a_0^2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{a_0^2} - \frac{y^2}{b_0^2}\right)^2 \right] + C_2 \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \left[ t \left(1 - \frac{x^2}{a_0^2}\right)^2 + \left(2 - \frac{x^2}{a_0^2} - \frac{y^2}{b_0^2}\right)^2 \right] \quad (2)$$

其中,  $C_1$ 、 $C_2$  是互不依赖的两个待定系数, 用来反映位移状态的变化, 即位移的变分是由  $C_1$ 、 $C_2$  的变分来实现的.  $t > 0$  是一个与墩柱纵横间距的比值有关的系数. 可以看出, 这个位移函数能完全满足式(1)的边界条件.

通过对无梁板桥的有限元分析结果可以发现, 在均布荷载作用下, 沿桥梁纵向离墩柱较远的截面的竖向位移在桥宽方向上的变化很小, 也就是说, 图1中, 当  $x$  距  $x = \pm a_0$  这两个截面较远时, 竖向位移  $w$  随  $y$  坐标的变化比较小. 这一特征可通过式(2)中的参数  $t$  来体现. 当墩柱的纵向间距与横向间距相差不大时, 即  $a_0$  与  $b_0$  相差不大时,  $t$  的值较小, 反之  $t$  较大. 对于一般的双柱式无梁板桥, 桥面宽度一般不超过 10m, 主跨一般在 10m~30m 之间, 经多次验算, 认为取  $t=100$  时比较合理.

将(2)式分别对  $x$ 、 $y$  求二阶偏导及混合偏导后, 将结果代入弹性薄板的形变势能表达式并进行积分运算, 可得到简化式:

$$U = \frac{D}{2} \left\{ C_1^2 \left[ \frac{b^9 \pi^4}{72a^3 b_0^8} + \frac{14 \ 512a^3 b^3}{9a_0^4 b_0^4} + \frac{800ab^3 \pi^2}{3a_0^2 b_0^4} - \frac{400b^3 \pi^2}{3ab_0^4} - \frac{50b^3 \pi^4}{9aa_0^2 b_0^2} - \frac{1 \ 600ab^3}{a_0^2 b_0^4} + \frac{404a^3 b^3}{3a_0^6 b_0^2} + \frac{20ab^3 \pi^4}{3a_0^4 b_0^2} - \frac{244a^3 b^3 \pi^2}{3a_0^4 b_0^4} - \frac{29 \ 024a^3 b^3}{3a_0^4 b_0^4 \pi^2} - \frac{64a^3 b^3}{3a_0^2 b_0^6} - \frac{2 \ 727a^3 b^3 \pi^2}{5a_0^6 b_0^2} + \frac{128a^3 b^3}{a_0^2 b_0^6 \pi^2} - \frac{101a^3 b^3 \pi^4}{42a_0^6 b_0^2} + \frac{800ab^3}{a_0^4 b_0^2} + \frac{100b^3 \pi^2}{3aa_0^2 b_0^2} - \frac{808a^3 b^3}{a_0^6 b_0^2 \pi^2} + \frac{2 \ 800ab^3 \pi^2}{3a_0^4 b_0^2} + \frac{103ab^5 \pi^4}{100a_0^4 b_0^4} + \frac{20b^5 \pi^2}{aa_0^2 b_0^4} + \frac{288ab^5}{5b_0^8} - \frac{56ab^5}{5a_0^2 b_0^6} - \frac{87ab^5 \pi^2}{5a_0^4 b_0^4} - \frac{10b^5 \pi^4}{3aa_0^2 b_0^4} + \frac{618ab^5}{5a_0^4 b_0^4} + \frac{5b^5 \pi^4}{a^3 b_0^4} + \frac{28ab^5 \pi^2}{15a_0^2 b_0^6} - \frac{12b^7 \pi^2}{7ab_0^8} - \frac{b^7 \pi^4}{42aa_0^2 b_0^6} + \frac{b^7 \pi^2}{7aa_0^2 b_0^6} + \frac{19 \ 392a^5 b}{a_0^6 b_0^2 \pi^4} + \frac{768a^5 b}{a_0^4 b_0^4 \pi^4} + \frac{40 \ 400a^3 b}{a_0^6} - \frac{5 \ 050a^3 b \pi^4}{7a_0^6} + \frac{10 \ 000b \pi^2}{aa_0^2} + \frac{1 \ 505ab \pi^4}{a_0^4} - \frac{242 \ 400a^3 b}{a_0^6 \pi^2} + \frac{180 \ 600ab}{a_0^4} + \frac{4 \ 406 \ 832a^5 b}{a_0^8 \pi^4} + \frac{418 \ 241a^5 b \pi^2}{7a_0^8} + \frac{6 \ 400a^3 b}{a_0^4 b_0^2 \pi^2} - \frac{800ab}{a_0^2 b_0^2} - \frac{5 \ 000b \pi^4}{3aa_0^2} - \frac{160a^3 b \pi^2}{a_0^4 b_0^2} + \frac{32a^5 b}{5a_0^4 b_0^4} + \frac{404a^5 b \pi^2}{7a_0^6 b_0^2} + \frac{10 \ 201a^5 b \pi^4}{72a_0^8} - \frac{163 \ 620a^3 b \pi^2}{a_0^6} + \frac{400ab \pi^2}{3a_0^2 b_0^2} + \frac{808a^5 b}{5a_0^6 b_0^2} - \frac{3 \ 232a^5 b}{a_0^6 b_0^2 \pi^2} - \frac{128a^5 b}{a_0^4 b_0^4 \pi^2} - \frac{734 \ 472a^5 b}{a_0^8 \pi^2} + \frac{183 \ 618a^5 b}{5a_0^8} + \frac{1 \ 250b \pi^4}{a^3} + \frac{129 \ 900ab \pi^2}{a_0^4} - \frac{3 \ 200a^3 b}{3a_0^4 b_0^2} - 2(1-\mu) \left( -\frac{206a^3 b^3 \pi^2}{5a_0^4 b_0^4} - \frac{200b^3 \pi^2}{ab_0^4} - \frac{4 \ 816a^3 b^3}{a_0^4 b_0^4 \pi^2} + \frac{400ab^3 \pi^2}{3a_0^2 b_0^4} + \frac{2 \ 408a^3 b^3}{3a_0^4 b_0^4} - \frac{800ab^3}{a_0^2 b_0^4} + \frac{2ab^5 \pi^2}{a_0^2 b_0^6} - \frac{12ab^5}{a_0^2 b_0^6} - \frac{2b^7 \pi^2}{ab_0^8} + \frac{9 \ 696a^5 b}{a_0^6 b_0^2 \pi^4} - \frac{80a^3 b \pi^2}{a_0^4 b_0^2} - \frac{1 \ 600a^3 b}{3a_0^4 b_0^2} + \frac{202a^5 b \pi^2}{7a_0^6 b_0^2} - \frac{400ab}{a_0^2 b_0^2} + \frac{3 \ 200a^3 b}{a_0^4 b_0^2 \pi^2} - \frac{1 \ 616a^5 b}{a_0^6 b_0^2 \pi^2} + \frac{404a^5 b}{5a_0^6 b_0^2} + \frac{200ab \pi^2}{3a_0^2 b_0^2} \right) \right] + C_1 C_2 \left[ -\frac{122 \ 445ab^3}{2a_0^4 b_0^2} + \frac{8 \ 099ab^3 \pi^2}{a_0^4 b_0^2} - \frac{6 \ 019b^3 \pi^2}{aa_0^2 b_0^2} - \frac{221 \ 190a^3 b^3}{a_0^6 b_0^2 \pi^2} + \frac{37 \ 572a^3 b^3}{a_0^6 b_0^2} - \frac{2 \ 020a^3 b^3 \pi^2}{a_0^6 b_0^2} + \frac{37 \ 107ab^5}{4a_0^4 b_0^4} + \frac{11 \ 817b^5 \pi^2}{10aa_0^2 b_0^4} - \frac{1 \ 440a^5 b}{a_0^4 b_0^4 \pi^4} - \frac{12 \ 177ab^5 \pi^2}{10a_0^4 b_0^4} + \frac{13 \ 816 \ 395ab}{2a_0^4} + \frac{3 \ 776 \ 289a^3 b \pi^2}{2a_0^6} + \frac{192a^5 b}{a_0^4 b_0^4 \pi^2} + \frac{639 \ 450b \pi^2}{aa_0^2} - \frac{192a^3 b}{a_0^2 b_0^4 \pi^2} - \frac{11 \ 880ab^3}{a_0^2 b_0^4} + \frac{424 \ 516 \ 635a^3 b}{4a_0^6 \pi^2} - \frac{1 \ 900 \ 293ab \pi^2}{a_0^4} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \frac{10\ 415\ 272\ 005a^5b}{8a_0^8\pi^4} - \frac{868\ 788\ 567a^5b}{4a_0^8\pi^2} + \frac{43\ 609\ 275a^5b}{4a_0^8} - \frac{35\ 571\ 897a^3b}{2a_0^6} - \frac{1\ 254\ 723a^5b\pi^2}{2a_0^8} - \\
& \frac{90\ 428a^3b^3}{a_0^4b_0^4\pi^2} + \frac{12\ 040a^3b^3}{a_0^4b_0^4} - \frac{336ab^5}{5a_0^2b_0^6} + \frac{763\ 560a^5b}{a_0^6b_0^2\pi^4} - \frac{21\ 576a^3b}{a_0^4b_0^2} + \frac{16\ 584ab}{a_0^2b_0^2} + \frac{162\ 204a^3b}{a_0^4b_0^2\pi^2} - \\
& \frac{121\ 200a^5b}{a_0^6b_0^2\pi^2} + \frac{4\ 848a^5b}{a_0^6b_0^2} + \frac{60b^7\pi^2}{7aa_0^2b_0^6} - 2(1-\mu)\left(-\frac{72ab^5}{a_0^2b_0^6} + \frac{381\ 780a^5b}{a_0^6b_0^2\pi^4} - \frac{10\ 788a^3b}{a_0^4b_0^2} + \frac{81\ 102a^3b}{a_0^4b_0^2\pi^2} + \right. \\
& \left. \frac{8\ 292ab}{a_0^2b_0^2} + \frac{2\ 424a^5b}{a_0^6b_0^2} - \frac{60\ 600a^5b}{a_0^6b_0^2\pi^2} - \frac{5\ 796ab^3}{a_0^2b_0^4} - \frac{44\ 742a^3b^3}{a_0^4b_0^4\pi^2} + \frac{5\ 940a^3b^3}{a_0^4b_0^4}\right) + C_2\left[\frac{9b^9\pi^4}{8a^3b_0^8} - \frac{3\ 840b^3\pi^2}{ab_0^4} - \right. \\
& \left. \frac{1\ 536b^3\pi^2}{aa_0^2b_0^2} - \frac{2\ 808b^3\pi^4}{a^3b_0^2} - \frac{128ab^3}{b_0^6} + \frac{2\ 480ab^3\pi^2}{a_0^2b_0^4} - \frac{4\ 960ab^3}{3a_0^2b_0^4} + \frac{14\ 512a^3b^3}{9a_0^2b_0^4} + \frac{2\ 304b^3\pi^4}{aa_0^2b_0^2} - \right. \\
& \left. \frac{5\ 481ab^3\pi^4}{5a_0^4b_0^2} + \frac{24\ 543a^3b^3\pi^2}{5a_0^6b_0^2} + \frac{2\ 727a^3b^3\pi^4}{14a_0^6b_0^2} - \frac{732a^3b^3\pi^2}{a_0^4b_0^4} + \frac{64a^3b^3}{3a_0^2b_0^6} - \frac{128a^3b^3}{9a_0^2b_0^6\pi^2} - \frac{404a^3b^3}{3a_0^6b_0^2} - \right. \\
& \frac{7\ 356ab^3\pi^2}{a_0^4b_0^2} - \frac{1\ 624a^3b^3}{a_0^4b_0^2} + \frac{808a^3b^3}{9a_0^6b_0^2\pi^2} - \frac{29\ 024a^3b^3}{27a_0^4b_0^4\pi^2} + \frac{504b^5\pi^2}{5ab_0^6} + \frac{618ab^5}{5a_0^4b_0^6} + \frac{2\ 268b^5\pi^4}{5a^3b_0^4} - \frac{84ab^5\pi^2}{5a_0^2b_0^6} + \\
& \frac{288ab^5}{5b_0^8} + \frac{8\ 343ab^5\pi^4}{100a_0^4b_0^4} + \frac{954b^5\pi^2}{5aa_0^2b_0^6} - \frac{1\ 431b^5\pi^4}{5aa_0^2b_0^4} + \frac{56ab^5}{5a_0^2b_0^6} - \frac{783ab^5\pi^2}{5a_0^4b_0^6} - \frac{81b^7\pi^4}{7a^3b_0^6} - \frac{108b^7\pi^2}{7ab_0^8} + \frac{27b^7\pi^4}{14aa_0^2b_0^6} - \\
& \frac{9b^7\pi^2}{7aa_0^2b_0^6} - \frac{6\ 464a^5b}{27a_0^6b_0^2\pi^4} + \frac{256a^5b}{27a_0^4b_0^4\pi^4} + \frac{41\ 208a^3b}{a_0^6} - \frac{417\ 231a^3b\pi^4}{7a_0^6} + \frac{95\ 472b\pi^2}{aa_0^2} + \frac{634\ 068ab\pi^4}{5a_0^4} - \\
& \frac{27\ 472a^3b}{a_0^6\pi^2} + \frac{187\ 872ab}{a_0^4} + \frac{163\ 216a^5b}{3a_0^8\pi^4} + \frac{3\ 764\ 169a^5b\pi^2}{7a_0^8} - \frac{128a^3b}{3a_0^2b_0^4} + \frac{4\ 288a^3b}{3a_0^4b_0^2\pi^2} + \frac{4\ 096ab}{a_0^2b_0^2} - \\
& \frac{143\ 208b\pi^4}{aa_0^2} + \frac{14\ 616a^3b\pi^2}{5a_0^4b_0^2} + \frac{32a^5b}{5a_0^4b_0^4} - \frac{3\ 636a^5b\pi^2}{7a_0^6b_0^2} + \frac{91\ 809a^5b\pi^4}{8a_0^8} - \frac{7\ 510\ 158a^3b\pi^2}{5a_0^6} + \frac{128ab}{b_0^4} - \\
& \frac{6\ 144ab\pi^2}{a_0^2b_0^2} - \frac{808a^5b}{5a_0^6b_0^2} + \frac{256a^3b}{9a_0^2b_0^4\pi^2} + \frac{3\ 232a^5b}{9a_0^6b_0^2\pi^2} - \frac{128a^5b}{9a_0^4b_0^4\pi^2} - \frac{81\ 608a^5b}{a_0^8\pi^2} + \frac{183\ 618a^5b}{5a_0^8} + \frac{109\ 512b\pi^4}{a^3} + \\
& \frac{1\ 216\ 368ab\pi^2}{a_0^4} - \frac{2\ 144a^3b}{a_0^4b_0^2} + \frac{7\ 488b\pi^2}{ab_0^2} - 2(1-\mu)\left(-\frac{18b^7\pi^2}{ab_0^8} + \frac{1\ 272ab^3\pi^2}{a_0^2b_0^4} - \frac{848ab^3}{a_0^2b_0^4} - \frac{4\ 816a^3b^3}{9a_0^4b_0^4\pi^2} - \right. \\
& \left. \frac{1\ 854a^3b^3\pi^2}{5a_0^4b_0^4} - \frac{2\ 016b^3\pi^2}{ab_0^4} + \frac{2\ 408a^3b^3}{3a_0^4b_0^4} - \frac{18ab^5\pi^2}{a_0^2b_0^6} + \frac{12ab^5}{a_0^2b_0^6} + \frac{108b^5\pi^2}{ab_0^6} - \frac{3\ 232a^5b}{27a_0^6b_0^2\pi^4} + \frac{2\ 048ab}{a_0^2b_0^2} - \right. \\
& \left. \frac{3\ 072ab\pi^2}{a_0^2b_0^2} + \frac{2\ 144a^3b}{3a_0^4b_0^2\pi^2} + \frac{7\ 308a^3b\pi^2}{5a_0^4b_0^2} - \frac{1\ 818a^5b\pi^2}{7a_0^6b_0^2} + \frac{3\ 744b\pi^2}{ab_0^2} - \frac{1\ 072a^3b}{a_0^4b_0^2} + \frac{1\ 616a^5b}{9a_0^6b_0^2\pi^2} - \frac{404a^5b}{5a_0^6b_0^2}\right)\Bigg\} \\
& U = \frac{D}{2}(C_1^2S_1 + C_1C_2S_2 + C_2^2S_3) \quad (3)
\end{aligned}$$

假设桥面承受均布荷载  $q_0$ , 则外力所做的功为

$$\begin{aligned}
W &= \int_{-a}^a \int_{-b}^b q_0 w dx dy = \int_{-a}^a \int_{-b}^b q_0 \left\{ C_1 \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \left[ 100 \left(1 - \frac{x^2}{a_0^2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{a_0^2} - \frac{y^2}{b_0^2}\right)^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + C_2 \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \left[ 100 \left(1 - \frac{x^2}{a_0^2}\right)^2 + \left(2 - \frac{x^2}{a_0^2} - \frac{y^2}{b_0^2}\right)^2 \right] \right\} dx dy \text{ 积分后, 得到} \\
W &= q_0 \left[ C_1 \left( \frac{8ab^5}{5b_0^4\pi} + \frac{128a^3b^3}{3a_0^2b_0^2\pi^3} + \frac{16a^3b^3}{3a_0^2b_0^2\pi} + \frac{800ab}{\pi} - \frac{1\ 600a^3b}{a_0^2\pi} - \frac{38\ 784a^5b}{a_0^4\pi^3} + \frac{12\ 800a^3b}{a_0^2\pi^3} + \frac{310\ 272a^5b}{a_0^4\pi^5} \right. \right. \\
&\quad \left. + \frac{808a^5b}{a_0^4\pi} \right) + C_2 \left( -\frac{8ab^5}{15b_0^4\pi} + \frac{32ab^3}{9b_0^2\pi} - \frac{16a^3b^3}{9a_0^2b_0^2\pi} + \frac{128a^3b^3}{81a_0^2b_0^2\pi^3} + \frac{12\ 928a^5b}{9a_0^4\pi^3} + \frac{544a^3b}{a_0^2\pi} - \frac{103\ 424a^5b}{81a_0^4\pi^5} \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{4\ 352a^3b}{9a_0^2\pi^3} - \frac{832ab}{3\pi} - \frac{808a^5b}{3a_0^4\pi} \right) \right]
\end{aligned}$$

同样, 上式可以简写为

$$W = q_0 (C_1 S_4 + C_2 S_5) \quad (4)$$

桥面板的外力势能  $V = -W$ , 即

$$V = -q_0 (C_1 S_4 + C_2 S_5) \quad (5)$$

前面已经说过,位移的变分是由  $C_1$ 、 $C_2$  的变分来实现的,根据里茨法,有

$$\frac{\partial(U+V)}{\partial C_1} = 0, \frac{\partial(U+V)}{\partial C_2} = 0$$

将式(4)、(5)代入上式,求导后得到一个关于  $C_1$ 、 $C_2$  的方程组

$$\begin{cases} DS_1 C_1 + \frac{DS_2}{2} C_2 = q_0 S_4 \\ \frac{DS_2}{2} C_1 + DS_3 C_2 = q_0 S_5 \end{cases}$$

这是一个二元一次方程组,很容易求得

$$\begin{cases} C_1 = \frac{2q_0(2S_3S_4 - S_2S_5)}{D(4S_1S_3 - S_2^2)} \\ C_2 = \frac{2q_0(2S_1S_5 - S_2S_4)}{D(4S_1S_3 - S_2^2)} \end{cases} \quad (6)$$

把上面解得的  $C_1$ 、 $C_2$  代入式(2),就得到无梁板桥在均布荷载下挠度的表达式:

$$\begin{aligned} w = & \frac{2q_0(2S_3S_4 - S_2S_5)}{D(4S_1S_3 - S_2^2)} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \left[ 100 \left(1 - \frac{x^2}{a_0^2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{a_0^2} - \frac{y^2}{b_0^2}\right)^2 \right] \\ & + \frac{2q_0(2S_1S_5 - S_2S_4)}{D(4S_1S_3 - S_2^2)} \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \left[ 100 \left(1 - \frac{x^2}{a_0^2}\right)^2 + \left(2 - \frac{x^2}{a_0^2} - \frac{y^2}{b_0^2}\right)^2 \right] \end{aligned} \quad (7)$$

## 1.2 板内应力的计算

有了挠度的表达式,可通过薄板弯曲理论中挠度与应力之间的关系求得板内各点的应力值,即

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (8)$$

## 2 无梁板桥的数值计算

本文以一座四跨钢筋混凝土无梁板桥进行有限元分析.桥梁上部为变截面实心混凝土板,板厚在 0.5~1.2 m 变化,桥面总宽 15.6 m,跨度 15 m+2×20 m+15 m,两端与桥台简支,下部结构为三柱式桥墩,墩顶与板固结,设计荷载为公路—I 级.应用 ANSYS 软件建立三维实体模型进行线性计算<sup>[9]</sup>.全桥均采用 SOLID45 单元,该单元为 8 节点三维实体单元,每个节点有 3 个沿着 X、Y、Z 方向平移的自由度.桥墩底部与地基固结,约束其 X、Y、Z 三个方向的位移.网格划分如图 2 所示.

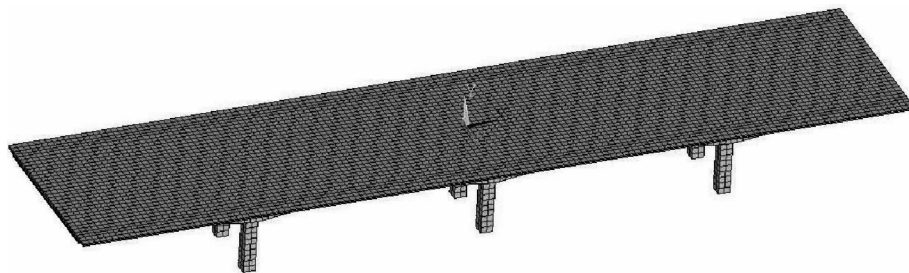


图2 无梁板桥的有限元网格划分

Fig. 2 The finite element mesh of girderless slab bridge

图中坐标原点设在桥面板上表面中心点,X 轴方向为桥梁纵向,Y 轴方向为垂直桥面板的方向,Z 轴方向即为桥梁宽度方向.

恒载主要包括结构的自重和桥面铺装.实际上,结构自重往往在桥梁承受的所有荷载中占有最大的比重,因此分析无梁板桥在恒载下的受力性能有重要意义.本文研究的恒载为钢筋混凝土自重.取钢筋混凝土密度为 2 500 kg/m<sup>3</sup>.

## 2.1 恒载作用下的变形

对于无梁板桥在恒载作用下的变形,主要分析其竖向位移,即挠度。挠度计算结果如图3所示。

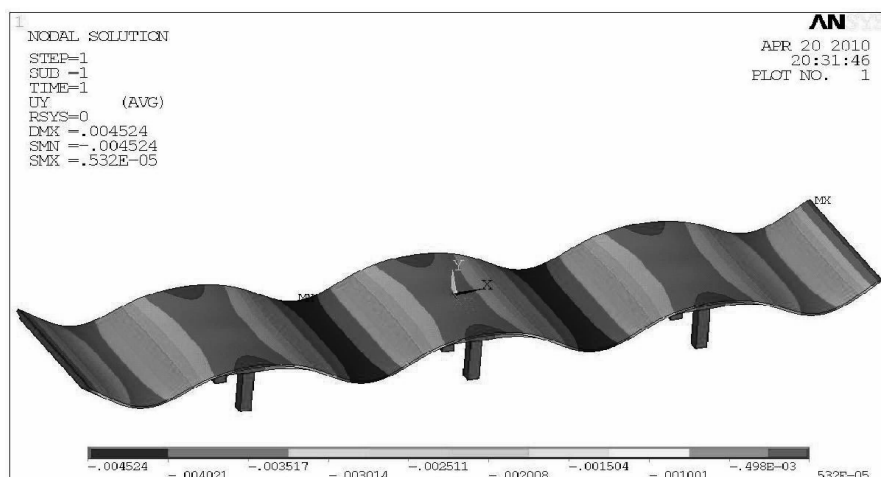


图3 恒载作用下无梁板桥的变形图

Fig. 3 The deformation of girderless slab bridge under dead load

从图中可以看出,最大挠度发生在中间两跨跨中,其值为4.524 mm,无梁板桥在离桥墩较远处,桥面板挠度沿桥宽方向的变化不明显。

## 2.2 恒载作用下的应力

图4所示为恒载下无梁板桥的第一主应力分布图。可以看出,第一主应力的最大值为2.08 MPa,发生在 $x=0$ 处板的上表面,这是因为在恒载作用下板在墩柱附近将承受很大的负弯矩。

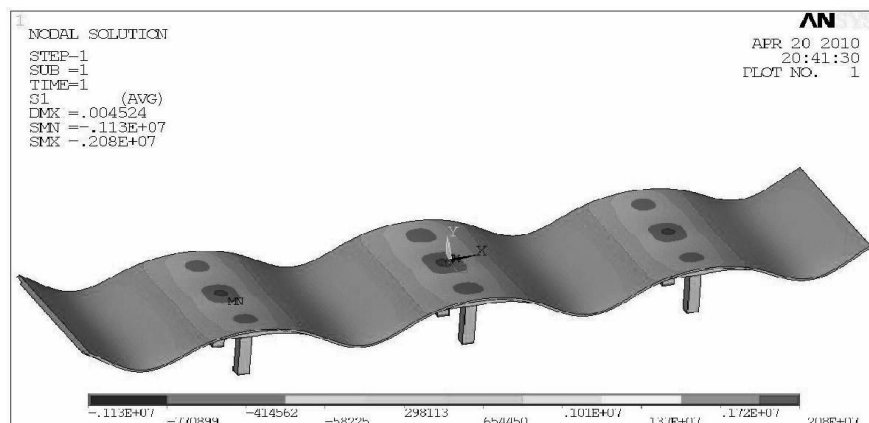


图4 恒载作用下无梁板桥第一主应力分布图

Fig. 4 The first principal stress distribution of girderless slab bridge under dead load

## 3 理论计算结果与有限元结果的对比

借助 Excel 软件,将上面理论计算中得出的复杂的函数表达式输入 Excel 的表格中,能很快求得桥面板上各点的挠度及应力。对于不同的桥,平面尺寸、板厚、弹性模量、泊松比等可能都不一样,只需修改表格中相应的值即可。为论证本文提出的无梁板桥理论解法的可行性,下面分别用本文方法和有限元的方法对无梁板桥进行受力计算,对比两者结果。

### 3.1 算例

如图5所示为三跨钢筋混凝土无梁板桥,桥梁跨度17 m+20 m+17 m,桥面宽10 m,双柱式桥墩,两柱的横向间距为6 m,板厚0.6 m,混凝土弹性模量 $E=30$  GPa,泊松比 $\mu=0.1667$ ,桥面施加均布荷

载  $2\ 100\ \text{N/m}^2$ .

利用上面推导出来的公式可以求出桥面板上各点的挠度及应力,将求得的结果与 ANSYS 的有限元分析结果进行比较,分别对比图 5 中所示的 I-I 截面和 II-II 截面的挠度及应力.由于对称性,只分析全桥右半部分,计算结果如图 6~图 9 所示.图中的  $\sigma_x$  为板下表面的正应力.



图 5 无梁板桥计算简图(单位:m)

Fig. 5 Calculation of girderless slab bridge

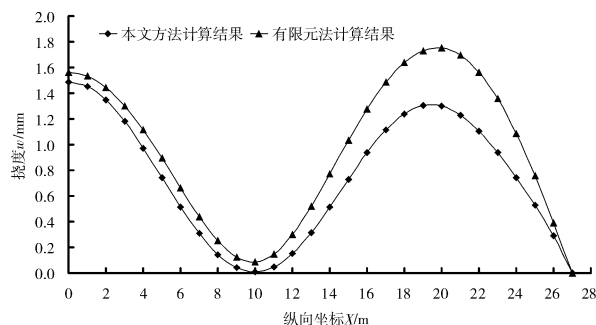


图 6 I-I 截面挠度计算结果

Fig. 6 The calculation of section deflection

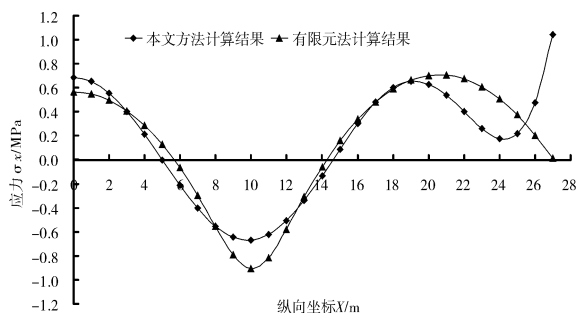


图 7 I-I 截面应力计算结果

Fig. 7 The calculation of section stress

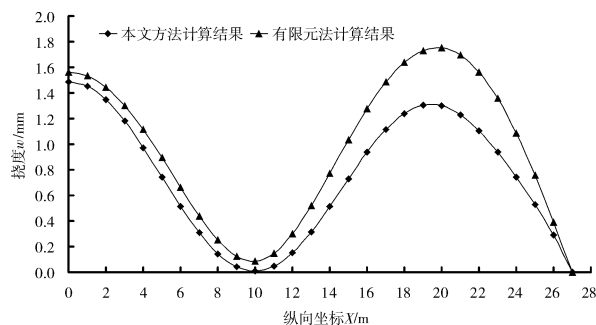


图 8 II-II 截面挠度计算结果

Fig. 8 The calculation of section deflection

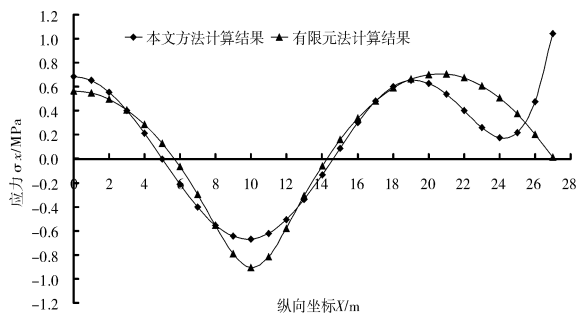


图 9 II-II 截面应力计算结果

Fig. 9 The calculation of section stress

#### 4 结果分析

通过对上面算例的分析,利用本文提出的理论方法计算无梁板桥在均布荷载作用下的挠度及应力的分布规律总体上和有限元计算出来的结果趋于一致.表 1 列出了两种方法算出的中跨跨中即  $x=0$  处的挠度和板底应力.可以看出,两者算出的挠度在数值上也非常接近,相差在 8% 以内,应力的结果相差在 20% 以内.

在边跨部分,两种方法的计算结果相差相对较大,对于边跨跨中的挠度,两者相差在 20% 至 35% 之间,而本文方法算出的应力  $\sigma_x$  在靠近板端支承处的变化规律和有限元结果不一样,在板端截面处两者应力相差很大.这是因为前面在假设挠度表达式时满足了所有的位移边界条件,但没有考虑力的边界条件,所以在板端截面算出的挠度为零,符合实际情况,而应力却与实际相差较大.观察上面的应力结果的曲线图,虽然理论方法算出的应力在靠近板端的部分与实际相差较大,但是在板的其它部分的应力分布和有限元结果还是比较吻合的.因此,建议在计算应力  $\sigma_x$  时,取

表 1 中跨跨中的挠度和应力

Tab. 1 The deflection and stress

		挠度 $w/\text{mm}$		板底应力 $\sigma_x/\text{MPa}$	
		本文方法	有限元法	本文方法	有限元法
算例	I-I 截面	1.49	1.56	0.687	0.565
	II-II 截面	1.56	1.61	0.610	0.594

桥面板左跨跨中至右跨跨中之间的部分作为该方法的应用范围。

## 5 结 论

(1)无梁板桥的板厚相对于板的宽度及跨度来说是足够小的,因此其受力属于薄板弯曲问题,可以运用薄板弯曲的经典理论作为研究无梁板桥的理论基础。

(2)本文以薄板弯曲理论为基础,利用能量原理,首次推导出了典型的三跨无梁板桥在均布荷载下的挠度函数,利用挠度函数,板上各点的应力、内力就可以利用薄板弯曲理论中的公式算出。将该方法的计算结果与有限元的计算结果比较,发现两者结果比较接近,误差总体在相对较小的范围内,这证明本文的方法是可行的。但这里需要注意的是,用这种方法算得的正应力在板端支座处与实际不符,是不可取的,因此计算正应力时应取两边跨跨中之间的大部分板段作为该方法的应用范围。对于挠度,中跨的计算结果与有限元分析结果十分接近,边跨的误差稍大。

## 参考文献 References

- [1] 王伯惠,张亚军. 无梁板桥[M]. 北京:人民交通出版社,1997.  
WANG Bo-hui, ZHANG Ya-jun. Girderless slab bridge[M]. Beijing:China Communications Press, 1997.
- [2] 杨忠平,王元汉. 无梁板桥的结构分析方法及尺寸优化[J]. 城市道桥与防洪,2005(5):60-62.  
YANG Zhong-ping, WANG Yuan-han. Girderless slab bridge structure analysis and dimension optimization[J]. City flood Defense, 2005(5):60-62.
- [3] 周涌波. 无梁板桥在高等级公路立交工程中的推广应用[J]. 辽宁交通科技,1994,17(2):19-21.  
ZHOU Yon-gbo. Girderless slab bridge in high grade highway interchange projects in popularization and application [J]. Liaoning graffice science and Technology, 1994,17(2):19-21.
- [4] 郭 梅,杨柄成. 无梁板桥的实用计算[J]. 西安公路学院学报,1994,14(3):20-24.  
GUO Mei, YANG Bing-cheng. Girderless slab bridge calculation[J]. Xi'an Institute of Highway Journal, 1994,14(3):20-24.
- [5] 郭 梅. 无梁板桥的结构优化[J]. 西安公路交通大学学报,1996,16(4):66-70.  
GUO Mei. The structure optimization of the Girderless slab bridge[J]. Xi'an Highway University Journal, 1996,16(4):66-70.
- [6] 张亚军,董惠英,张明海. 无梁板桥板柱结合域应力研究[J]. 东北公路,1993(3):47-50.  
ZHANG Ya-jun, DONG Hui-ying, ZHANG Ming-hai. The Girderless slab bridge column stress on the binding domain[J]. Northeast Highway, 1993(3):47-50.
- [7] 中华人民共和国交通部. JTG D60-2004 公路桥涵设计通用规范[S]. 北京:人民交通出版社,2004.  
The Ministry of Communications The People's Republic of China. JTG D60-2004 Code for design of highway bridges and culverts general[5]. Beijing: China Communications Press, 2004.
- [8] 涂 昀. 无梁板桥结构计算理论与有限元分析[D]. 兰州:兰州交通大学,2010.  
TU Yun. Girderless slab sturcture calculation theory and the finite element analysis[D]. Lanzhou: Lanzhou Jiaotong University, 2010.
- [9] 郝文化. ANSYS 土木工程应用实例[M]. 北京:中国水利水电出版社,2005.  
HAO Wen-hua. ANSYS civil engineering application examples[M]. Beijing:China Water Power Press, 2005.
- [10] 朱聘儒. 双向板无梁楼盖[M]. 北京:中国建筑工业出版社,2001.  
ZHU Pin-rn. Two-way slab beamless roof[M]. Beijing:Chian Building Industry Press, 2001.

## Theoretical calculation and numerical analysis of girderless slab bridge with energy method

WU Shang-de

(Supervision of a hospital in Gansu Railway Co., Ltd., Lanzhou 730000, China)

**Abstract:** Based on the classical thin plate bending theory, deflection function of girderless slab bridge under uniform load by energy principle is proposed and derived. It also gives the expression of normal stress of bridge deck. The Excel tables are made basis of these formulas, which is more convenient to process the datas. Using the finite element program ANSYS for modeling of girderless slab bridge, the deflection and stress under dead load and lane load is analyzed. The results show that girderless slab bridge can bear a larger vehicle load. Through the finite element analysis of girderless slab bridge, understanding of the mechanical behavior is acquired. To verify the correctness of these formulas, example of girderless slab bridge is given, using the theoretical formulas derived in this paper analyze the deflection and normal stress of bridge deck, and the results agree well with finite element calculations and the calculation results fit in well. It proves that the method is correct, serving as the reference of the design and engineering application of the kind of structure.

**Key words:** girderless slab bridge; energy method; force analysis; numerical analysis

**Biography:** WU Shang-de, Engineer, Lanzhou 730000, P. R. China, Tel: 0086-13893355988, E-mail: wusd666@163.com

(上接第 323 页)

- [13] 姚谦峰, 梅占馨, 吴敏哲. 滑移隔震结构振动分析[J]. 西安建筑科技大学学报: 自然科学版, 1999, 31(3): 208-210.  
YAO Qian-feng, MEI Zhan-xin, WU Min-zhe. Vibration analysis of structure base isolated by sliding [J]. Xi'an Univ. of Arch. & Tech., Natural Science Edition, 1999, 31(3): 208-210.

## Analysis of optimal sliding component placement of irregular sliding isolated structure

XIONG Zhong-ming, WANG Zhi-lei, WANG Chao

(1. Key Laboratory of Structural Engineering and Earthquake Resistance of Ministry of Education,  
Xi'an Univ. of Arch. & Tech., Xi'an 710055, China)

**Abstract:** By using the method of genetic algorithm, the research on optimal sliding component placement of an irregular layout multi-frame framework structure is carried out in this essay, and a new method for optimal placement is proposed which contains three steps. First, the fixed unit segmentation method is used to divide the irregular layout of the building into units. Second the method of genetic algorithm is used to form an optimal arrangement of the sliding components and bring forward the optimal placement plan of the sliding components in every unit. Finally, considering all aspects of the influence factors, the best layout plan of the sliding components in the whole building is recommended. By comparing the influence of the top floor's acceleration, basal sliding and some other parameters, the feasibility of the method for the sliding components' arrangement is confirmed, laying a foundation for the promotion and application of the base sliding isolated structure.

**Key words:** base sliding isolated structure; sliding component; structural optimization; genetic algorithm method; the divided method of fixed unit

**Biography:** XIONG Zhong-ming, Professor, Ph. D, Xi'an 710055, P. R. China, Tel: 0086-29-62663671, E-mail: xiong\_zhongming@yahoo.com.cn