

冲击荷载作用下弹性压杆的动力稳定分析

孙建鹏¹, 谭天宇¹, 黄文锋²

(1.西安建筑科技大学土木工程学院, 陕西 西安 710055;

2.合肥工业大学水利与土木工程学院, 安徽 合肥 230009)

摘要: 动力稳定性是细长杆件的一种重要性能, 结合精细传递矩阵理论, 建立了在轴向冲击荷载作用下受压杆件动力稳定分析的精细传递矩阵式, 并对冲击荷载的参数进行了分析, 研究其对受压杆件动力稳定性能的影响. 算例表明: 受压杆件的动力稳定性可以通过结构的位移响应曲线是否存在反规律现象来确定. 算例还表明结构的动力稳定性不仅与冲击荷载的幅值有关, 还有荷载的振动频率有关; 荷载频率与结构自振频率之间的差异影响着受压杆件动力稳定承载力的大小.

关键词: 精细传递矩阵法; 受压杆件; 动力稳定; 迭代算法; 位移时程曲线

中图分类号: TU311.2

文献标志码: A

文章编号: 1006-7930(2016)04-0505-05

Dynamic stability analysis of elastic compressive bar under shock loading

SUN Jianpeng¹, TAN Tianyu¹, HUANG Wenfeng²

(1.School of Civil Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China;

2.School of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract: Dynamic stability is an important property of slender bars. In this paper, a transfer matrix is developed for dynamic stability analysis of slender bars subjected to axial impact loading based on the theory of precise transfer matrix method, and the parameters of impact loading are analyzed, and the effect on the properties of dynamic stability of compression bar is studied. Examples showed that it can determine whether or not the dynamic instability of compression bar has happened by the displacement response curves there is against the law phenomenon, and the dynamic stability of compression bar is not only associated with the amplitude of shock load, but also with the vibration frequency of the load. The differences between the natural frequency of loading and the vibration frequency of structures have some effects on the size of bearing capacity of dynamic stability of compressive bar.

Keywords: precise transfer matrix method; compressive bar; dynamic instability; iterative algorithm; the displacement time history curve

受压杆件是工程结构中常见的重要受力构件, 被广泛的应用到土木工程领域中. 例如桥梁工程中的桥墩, 建筑结构工程中的柱子以及桁架结构中的受压杆件等. 受压杆件由于较大的长细比, 其稳定性成为该类构件在受力分析时必须考虑的一个重要指标. 受压杆件的静力稳定性问题已得到完善的解决^[1-4], 一些学者对其动力稳定问题进行了一定的研究^[5-10].

传递矩阵法^[11]因其力学概念清晰, 涉及的系统矩阵阶次低, 计算速度快等特点引起了科研工作者的青睐^[12-15].

而有关传递矩阵理论应用到结构动力稳定分析的文献至今未见报道. 为了进一步扩展传递矩阵理论的应用领域, 研究弹性压杆在冲击荷载作用下

的稳定性能, 在文献[4]的基础上, 对冲击荷载作用下弹性压杆动力稳定分析的传递理论进行了推导, 建立了分析受压杆件动力稳定分析的传递矩阵. 通过算例分析, 验证了所提理论及推导的传递矩阵的正确性. 同时, 对不同冲击荷载作用下的动力行为进行了分析研究. 本文所提出的方法可以适用于任意形式的动力荷载, 具有很好的适用性.

1 精细传递矩阵

此处以一简支的受压杆件为例进行阐述, 其力学简图如图 1 所示. 图中 $EI(x)$ 为受压杆件的抗弯刚度, $P(t)$ 为墩顶受到的沿杆件轴向的冲击荷载, $\rho A(x)$ 为受压杆件的单位长度的质量, $w(x, t)$ 为 x

收稿日期: 2015-11-20

修改稿日期: 2016-08-08

基金项目: 国家自然科学基金项目(51408453); 高等学校博士学科点专项科研基金项目 (20136120120022); 陕西省自然科学基金基础研究计划基金项目 (2016JQ5075); 陕西省重点学科建设专项资金资助项目(E01004)

作者简介: 孙建鹏(1981-), 男, 讲师, 博士, 主要从事结构静力、动力及稳定性能研究. E-mail: sunjianpeng2001@163.com

处 t 时刻沿 y 方向的挠度, L 为杆件的总长度. 为了简化, 此处忽略杆件的轴向惯性力. 此时, 受压杆件的动力稳定平衡方程为^[16]

$$\begin{cases} EI(x)w''''(x,t) + P(t)w''(x,t) + \rho A(x)\ddot{w}(x,t) = 0, & 0 < x < L \\ w(x,0) = f(x) \\ \dot{w}(x,0) = g(x) \end{cases} \quad (1)$$

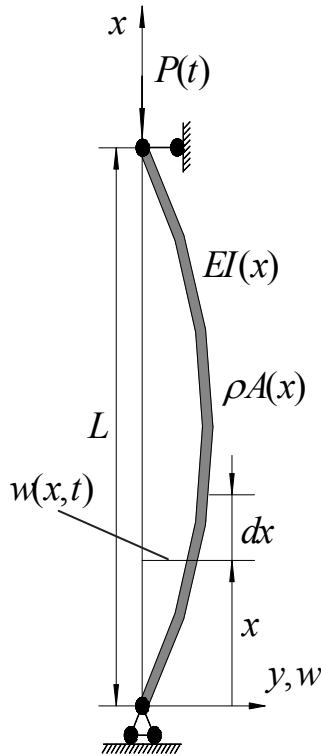


图1 受压杆件力学简图

Fig.1 The model and mechanical diagram of bridge pier
式中: $w''''(x,t)$ 为 $w(x,t)$ 对 x 的4阶导数, $w''(x,t)$ 为 $w(x,t)$ 对 x 的2阶导数, $\ddot{w}(x,t)$ 为 $w(x,t)$ 对时间 t 的2阶导数. $f(x,t)$, $g(x,t)$ 为杆件的初始挠度和初始速度.

根据受压杆件的弯曲平衡条件有以下关系式:

$$M(x,t) = P(t)w(x,t) + Q(x,t)x \quad (2)$$

公式(2)两边对 x 进行求导得:

$$M'(x,t) = P(t)w'(x,t) + Q(x,t) \quad (3)$$

挠曲线的近似微分方程为

$$EI(x)w''(x,t) = M(x,t) \quad (4)$$

式中: $w''(x,t)$ 为挠度 $w(x,t)$ 对 x 的两阶导数, $w(x,t)$ 为 t 时刻 x 处的弯矩.

转角 $\theta(x,t)$ 与挠度 $w(x,t)$ 的关系为

$$w'(x,t) = \theta(x,t) \quad (5)$$

由于受压杆件上的剪力集度为惯性力, 且存在以下关系:

$$Q'(x,t) = EIw'''(x,t) \quad (6)$$

结合公式(1), 式(6)可表示为

$$Q'(x,t) = -P(t)w''(x,t) - \rho A(x)\ddot{w}(x,t) \quad (7)$$

受压杆件 x 截面 t 时刻的状态向量为

$$S(x,t) = \{u(x,t), \theta(x,t), M(x,t), Q(x,t), 1\}^T$$

将公式(3)-(5)和公式(7)表达成矩阵的形式为

$$\frac{dS}{dx} = \chi S \quad (8)$$

$$\chi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/EI(x,t) & 0 & 0 \\ 0 & P(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P(t)/EI(x,t) & 0 & -\rho A(x)\ddot{w}(x,t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

根据文献[4]可以得到受压杆件 j 段两端的传递关系:

$$S_j^2 = \Gamma_j S_j^1 \quad (10)$$

其中: Γ_j 为受压杆件 j 段的传递矩阵, S_j^2 、 S_j^1 为 j 段上下两端的状态向量.

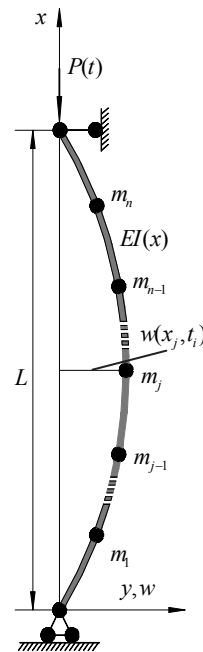


图2 受压杆件离散分析模型

Fig.2 Discrete system of column subjected to impact loads

结构的动力响应简化成离散结构进行计算分析同样可以得到满意得计算精度. 受压杆件的离散分析模型如图2所示.

离散分析模型中包含两种单元, 一种是没有质量的理想弹性梁单元, 另一种是没有体积的集中质量体. 与之相对应的传递矩阵为无质量的场矩阵 $\overline{\Gamma}_j$ 和没有体积的点矩阵 $\overline{\Gamma}_j$.

场矩阵 $\overline{\Gamma}_j$ 通过公式(8)-(10)的流程获得, 此时, 公式中的 χ 如下式所示:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/EI(x,t) & 0 & 0 \\ 0 & P(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P(t)/EI(x,t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

点矩阵 $\bar{\Gamma}_j$ 的获得如下式所示:

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -m_j \ddot{w}(x_j, t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

2 分步时间积分法

在进行动力时程分析时,需要在时域内对时间进行离散,通过数值积分获得下一时间点的状态向量.此处采用较为常用的 Newmark- β 法进行数值积分运算.

t_i 时刻的速度 $\dot{w}(x, t_i)$, 加速度 $\ddot{w}(x, t)$ 可以表示成为 t_i 时刻的挠度 $w(x, t)$ 的线性函数如式(13)、式(14)所示:

$$\dot{w}(x, t_i) = B_1(t_{i-1})w(x, t_i) + C_1(t_{i-1}) \quad (13)$$

$$\ddot{w}(x, t_i) = B_2(t_{i-1})w(x, t_i) + C_2(t_{i-1}) \quad (14)$$

式中: $B_1(t_{i-1})$, $C_1(t_{i-1})$, $B_2(t_{i-1})$ 和 $C_2(t_{i-1})$ 可以通过以下公式获得:

$$B_1(t_{i-1}) = \gamma / \beta \Delta T \quad (15)$$

$$C_1(t_{i-1}) = \frac{dw(t_{i-1})}{dt} + \Delta T[(1-\gamma)\frac{d^2w(t_{i-1})}{dt^2} + \gamma C_1(t_{i-1})] \quad (16)$$

$$B_2(t_{i-1}) = 1 / \beta \Delta T^2 \quad (17)$$

$$C_2(t_{i-1}) = -\frac{1}{\beta \Delta T^2} [w(t_{i-1}) + \Delta T \frac{dw(t_{i-1})}{dt} + (1/2 - \beta) \Delta T^2 \frac{d^2w(t_{i-1})}{dt^2}] \quad (18)$$

t_{i-1} 时刻的位移 $w(x, t_{i-1})$, 速度 $\dot{w}(x, t_{i-1})$, 加速度 $\ddot{w}(x, t_{i-1})$ 已知, 则 $B_1(t_{i-1})$, $C_1(t_{i-1})$, $B_2(t_{i-1})$ 和 $C_2(t_{i-1})$ 也成为已知数.

令 $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ 此时, 点矩阵的表达式进一步表示为

$$\bar{\Gamma}_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \xi_1 & 0 & 0 & 1 & \xi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

式中:

$$\xi_1 = -\frac{m_j}{\beta(\Delta t)^2},$$

$$\xi_2 = m_j \left[\frac{1}{\beta(\Delta t)^2} w(x_j, t) + \frac{1}{\beta \Delta t} \frac{dw(x_j, t)}{dt} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \frac{d^2w(x_j, t)}{dt^2} \right]$$

3 总传递矩阵及求解流程

若受压杆件被划分为 m 个单元, 且所有场矩阵和点矩阵都以后有如下表达式:

$$S_m = \Gamma S_0 \quad (20)$$

$$\Gamma = \Gamma_m \Gamma_{m-1} \cdots \Gamma_2 \Gamma_1 \quad (21)$$

$$\Gamma = \bar{\Gamma}_m \bar{\Gamma}_{m-1} \cdots \bar{\Gamma}_1$$

式中, Γ 为总传递矩阵.

当总传递矩阵确定好之后, 借助边界条件就可以求得 t_i 时刻各离散单元两端的未知状态向量.

通过第二部分介绍的分布时间积分法可以进行下一时刻的状态向量计算, 直至计算完成, 其求解流程如图3所示.

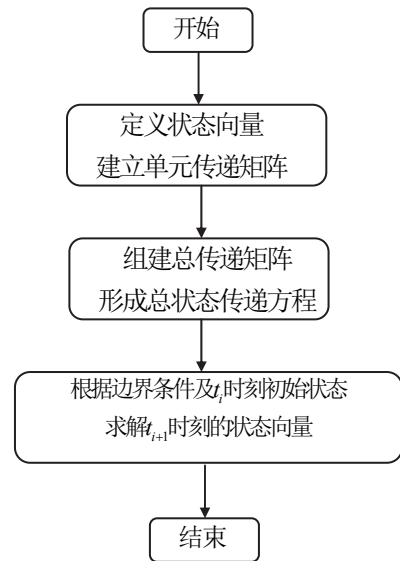


图3 求解流程图

Fig. 3 Flow chart of algorithms for the proposed method

4 算例计算

某一受压杆件长度为 $L=8.0$ m, 截面面积为 0.96

m^2 , 抗弯惯性矩为: 0.0512 m^4 , 其离散计算模型如图2所示, 该杆件共离散为8个无质量的两单元和7个无体积的集中质量体单元, 集中质量体的质量为: $m_j=2592 \text{ kg}$ ($j=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$). 杆件顶部受到的压力为 $P(t)$, 其表达式为

$$P(t) = \begin{cases} P_t \sin \theta t & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases} \quad (22)$$

当荷载持续时间较小时, $P(t)$ 为一般的正弦脉冲荷载, 当荷载持续时间趋于无穷视为正弦周期荷载. 限于篇幅, 此处分析一般脉冲荷载作用下动力稳定性, 探讨参数 P_t 持续时间 t_0 和振动频率 θ 对动力稳定特征的影响. 本文运用 Matlab 语言编辑了相应的计算分析程序, 对该模型进行计算分析.

图4为不同 P_t 时的杆件动态响应, 持续时间 t_0 和振动频率 θ 分别为: 0.314 s , 10 rad ; 时间步长取 0.001 s ; 图5为不同持续时间 t_0 的杆件动态响应, 此时峰值荷载 P_t 和振动频率 θ 分别为 25 MN , 10 rad ; 图6为不同振动频率 θ 对动力稳定特征的影响, 此时峰值荷载 P_t 和荷载持续时间 t_0 分别为 10 MN , 1.0 s .

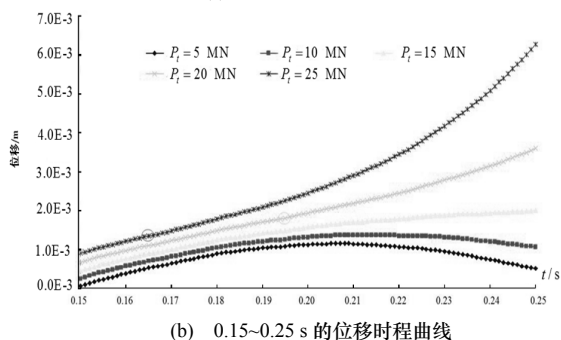
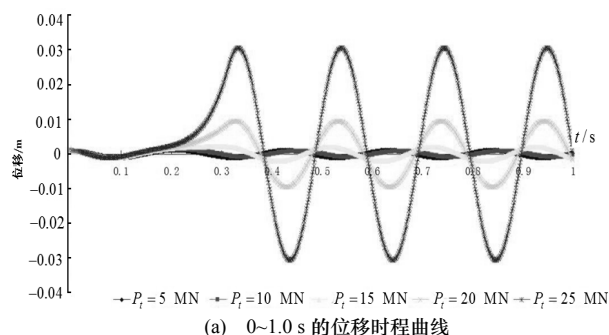


图4不同 P_t 作用下跨中第4质量体的动态响应时程曲线
Fig.4 The time history response curves of the fourth quality at midspan with variational P_t

从图4中可以看出, 当自振频率为 10 rad , 荷载持续时间为 0.314 s 时, 峰值荷载的大小对受压杆件的动态响应具有一定的影响. 峰值荷载较小时对受压杆件的影响较小, 结构振动不会发生实质性的变化既不会出现失稳现象. 随着荷载峰值的增加脉冲荷载对结构的影响逐渐变大, 当荷载达到某一值

时将引起结构振动发生本质变化即失稳现象, 如图5中 $P_t=2 \text{ MN}$. 失稳荷载可以根据结构振动的位移特征来确定, 即荷载达到某值结构出现违反未加轴向荷载时振动规律的现象时认为发生了失稳现象, 此时的荷载为动力失稳荷载. 本算例的动力失稳荷载为: 1.5525 MN .

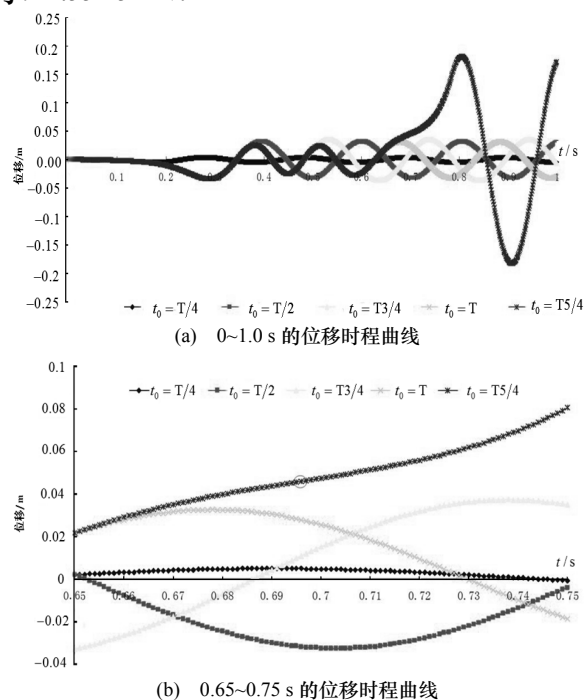


图5 不同 t_0 时跨中第4质量体的动态响应时程曲线
Fig.5 The time history response curves of the fourth quality at midspan with variational t_0

从图5可以看出, 当峰值荷载为 25 MN , 自振频率为 10 rad 时, 荷载持续时间的大小对受压杆件的动态响应具有一定的影响. 由于和在峰值大于动力失稳荷载所以只要持续时间大于 $T/4$, 结构就会有明显的振动实质性变化, 随着持续时间的延长这种现象将以规律性(周期性)出现(如图4(b)、图5(b)所示), 且动力失稳荷载为同一值: 15.525 MN . 这为发现和确定动力失稳荷载提供了一条新的途径和办法.

从图6中可以看出, 当峰值荷载 $P_t=10 \text{ MN}$, 载持续时间为 4.0 s 时, 荷载振动频率的大小对受压杆件的动态响应具有一定的影响. 随着荷载频率的增加结构的振动逐渐出现了“节拍”的现象, 而且“节拍”个数逐渐减小, 而节拍的幅值逐渐增大, 当合为半个“节拍”时随着荷载的持续施加振幅将持续增大不再收敛, 这与结构受迫振动的现象是一致的. 这一现象表明, 受压构件的振动稳定承载力与外部荷载的振动频率有关, 当外部荷载的振动频率接近于结构的自振频率将降低结构的动力稳定性, 即动力稳定承载力将降低.

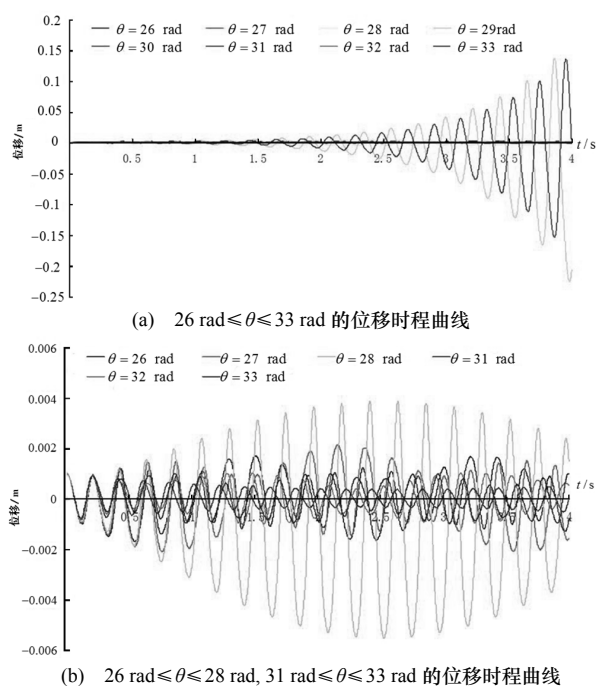


图6 不同 θ 时跨中第4 质量体的动态响应时程曲线

Fig.6 The time history response curves of the fourth quality at midspan with variational θ

5 结论

通过本文的研究工作得出以下结论:

(1) 建立了受压杆件动力稳定分析的传递矩阵; 完善了传递矩阵的稳定分析理论。

(2) 算例验证了本文所提理论及推导传递矩阵的正确性, 为结构的动力稳定性判别提供了一条新的方法和思路。

(3) 分析结果表明, 结构的动力稳定分析比静力稳定分析复杂的多; 受压杆件在轴向荷载作用下呈现受迫振动的特点。

(4) 结构动力稳定承载力的大小与动力荷载的振动特性有关。振动荷载的频率越接近结构的自振频率, 结构的动力稳定承载力越低。

因此, 在确定承受动荷载的结构稳定承载力时, 要进行动态响应分析, 通过结构的动态特点分析其是否稳定。

参考文献 References

- [1] 刘鸿文. 材料力学(II)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993.
LIU Hongwen. Mechanics of materials(II)[M]. Beijing: Higher Education Press, 1993.
- [2] 李国豪. 桥梁结构稳定与振动[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2003.
LI Guohao. Stability and vibration of bridge structure [M]. Beijing: China Railway Press, 2003.
- [3] 陈骥. 钢结构稳定理论与应用[M]. 北京: 科学技术文献出版社, 1994.

CHEN Ji. Stability theory and application of steel structure [M]. Beijing: Science and Technology Literature Press, 1994.

- [4] 孙建鹏, 李青宁. 门式钢框架稳定分析的精细传递矩阵法[J]. 西安建筑科技大学学报(自然科学版), 2011, 43(3): 374-378.
SUN Jianpeng, LI Qingning. Precise transfer matrix method for stability analysis of steel portal frame[J]. Journal of Xi'an University of Architecture & Technology (Natural Science Edition), 2011, 43(3): 374-378.
- [5] WELLER T, ABRAMOVICH H, YAFE R. Dynamic buckling of beams and plates subjected to axial impact [J]. Computers and Structures, 1989, 32(3/4): 835-51.
- [6] Ari-Gur J, WELLER T, SINGER J. Experimental and theoretical studies of columns under axial impact [J]. International Journal of Solids and Structures 1982; 18(7): 619-641.
- [7] LEE H P. Effects of initial curvature on the dynamic stability of a beam with tip mass subjected to axial pulsating loads [J]. International Journal of Solids and Structures, 1995, 32(23): 3377-3392.
- [8] KENNYA S, TAHERI F, PEGGC N. Experimental investigations on the dynamic plastic buckling of a slender beam subject to axial impact [J]. International Journal of Impact Engineering, 2002, 27(1): 1-17.
- [9] 王安稳. 弹性压应力波下直杆动力失稳的机理和判据[J]. 力学学报, 2001, 33(6): 813-820.
WANG Anwen. Mechanism and criterion for dynamic instability of bars under elastic compression wave[J]. ACTA Mechanica SINICA, 2001, 33(6): 813-820.
- [10] 钟炜辉, 郝际平, 雷蕾, 等. 考虑应力波的轴心压杆冲击分岔屈曲研究[J]. 振动与冲击, 2010, 29(10): 201-205.
ZHONG Weihui, HAO Jiping, LEI Lei. Study on shock bifurcation buckling of axial compressive bar considering the stress wave [J]. Journal Of Vibration And Shock, 2010, 29(10): 201-205.
- [11] H. Holzer. Die Berechnung der Drehschwingungen, Springer, Berlin, Germany, 1921.
- [12] A.M. ELLAKANY, K.M. ELAWADLY, B.N. ALHAMAKY. A combined transfer matrix and analogue beam method for free vibration analysis of composite beams[J]. Journal of Sound and Vibration. 2004, 277(4/5): 765-781.
- [13] 孙建鹏, 李青宁. 多点地震输入下结构地震反应的频域精细传递矩阵法[J]. 建筑结构学报, 2010, 31(2): 48-54.
SUN Jianpeng, LI Qingning. Precise frequency domain transfer matrix method for seismic response analysis of structures under multi-support excitations[J]. Journal of Building Structures, 2010, 31(2): 48-54.
- [14] 孙建鹏, 李青宁. 求解结构自振频率的精细传递矩阵法[J]. 世界地震工程, 2009, 25(2): 140-145.
SUN Jianpeng, LI Qingning. Precise transfer matrix method for resolving natural frequencies of structures[J]. World Earthquake Engineering, 2009, 25(2): 140-145.
- [15] WU Jong Shyong, CHANG Bo Hau. Free vibration of axial-loaded multi-step Timoshenko beam carrying arbitrary concentrated elements using continuous-mass transfer matrix method[J]. European Journal of Mechanics A/Solids, 2013, 38(3/4): 20-37.
- [16] CUI Shijie, HAO Hong, CHEONG Hee Kiat. Theoretical study of dynamic elastic buckling of columns subjected to intermediate velocity impact loads[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2002, 44: 687-702.

(编辑 沈波)