

基于塑性理论的钢筋混凝土板冲切开裂滑移模型

易伟建, 刘彪

(湖南大学土木工程学院, 湖南长沙 410082)

摘要:在塑性理论的基础上引入新的概念,认为斜截面形成塑性屈服面的同时在该斜截面上开裂发生滑移才会引发节点冲切破坏.通过假设的斜截面上的应力分布,推导出圆板径向的斜截面开裂荷载;另一方面,采用抛物线型的 Mohr-Coulomb 可以得到塑性极限荷载.基于此破坏机理,得到集中力加载和均布荷载加载下板柱节点抗冲切承载力的求解方法,并根据试验结果对相关参数进行修正,经检验计算结果与试验结果吻合良好,同时根据计算结果对公式进行了简化,可应用于工程实践.此模型也合理地解释了板柱节点在集中力作用下冲切锥的角度大于均布荷载作用下板柱节点冲切锥角度的现象.

关键词:混凝土板;冲切强度;临界斜裂缝;塑性理论;Mohr-Coulomb 准则

中图分类号: TU313.2

文献标志码: A

文章编号: 1006-7930(2017)01-0042-06

Crack slip model for punching capacity of reinforced concrete slab based on the plastic theory

YI Weijian, LIU Biao

(School of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract:Based on plastic theory, this paper introduced a new concept, that the oblique section came into the yield situation and at the same time the slab-column oblique section cracked and slipped, which caused the punching failure in the slab-column joint. The oblique section cracking load could be derived by supposing the stress distribution on the oblique section and the plastic limit load could also be obtained on the basis of the parabola Mohr-Coulomb principle. Based on this failure mechanism, the solving methods aimed at the punching shear capacity of the slab-column joints under concentrated loads and uniformly distributed loads were obtained respectively. In addition, the related parameters were corrected according to experimental results. The calculations were found in good agreement with the experimental data. At last, the formulas applied to engineering practice were simplified according to the calculations. This model presented in this paper could also reasonably explain the phenomenon in which shearing-awl angle under concentrated force was greater than that under the uniform load.

Key words:reinforced concrete slab; strength of punching shear; critical diagonal crack; theory of plasticity; Mohr-Coulomb Criterion

混凝土板柱结构由于其简单的结构形式,在很多场合都有应用,但是板柱节点的受力却十分的复杂.对于混凝土板柱节点的冲切问题,自美国的 A. N. Talbot^[1]在 1907 年最开始进行试验研究至今已经有一百余年的历史,然而对其破坏的机理却并没有得到统一的认识,还有待于进一步的研究.近些年各学者、工程师也从未停止尝试过对混凝土板柱节点的冲切破坏的机理进行解释,提出了许多了计算理论,如: Braestrup 等在 1976 年的塑性极限分析^[2], Alexanders 在 1987 年提出桁架理论^[3], Muttoni 于 2008 年提出临界斜裂缝理论^[4], Hong-Gun Park 等在 2011 年提出临界截

面应变理论^[5], Broms 在 2016 年提出切向应变理论^[6].

在塑性理论方面有 1976 年 Braestrup 等采用修正的 Mohr-Coulomb 理论求解板柱节点的冲切问题^[2]、1986 年蒋大骅^[7]教授等采用抛物线形式的 Mohr-Coulomb 混凝土破坏准则以及 1996 年严宗达利用双剪强度理论^[8]和 2002 年魏雪英等采用统一强度理论^[9].

传统刚塑性理论虽然可以通过塑性等效系数来修正混凝土强度、配筋率等对冲切强度的影响,但是这种方法并不能考虑冲跨比对冲切承载力的影响,而现有的板的冲切试验结果表明冲跨比等

收稿日期: 2016-08-26

修改稿日期: 2016-12-29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51338004; 51178175)

作者简介: 易伟建(1954—),男,博士,教授,博士生导师,主要从事混凝土的基本理论研究. E-mail: wjy@hnu.edu.cn

因素对试验的结果是存在影响的, 所以传统的刚塑性理论存在一定的局限性。

有别于传统的刚塑性理论, 本文提出新的冲切破坏机理, 认为当板柱节点在达到塑性屈服状态时并不会直接破坏, 同时还要在斜截面达到开裂状态形成临界斜裂缝时节点由于滑移而产生冲切破坏。基于这种新的破坏机理, 推导得到了集中加载、均布加载下节点的冲切承载力的计算公式, 并根据试验数据对相关参数进行了修正, 取得了良好的计算结果。

1 冲切破坏机理

板柱节点的冲切试验表明^[10], 节点在荷载作用下, 首先会出现径向的辐射状受弯裂缝。随着辐射状裂缝数目增加与宽度增大, 相邻的辐射状裂缝之间逐渐形成环向的受弯裂缝, 板的刚度也逐渐下降。虽然混凝土板受弯开裂, 但是这种状态却是稳定的, 单纯的受弯裂缝并不会直接导致节点的冲切破坏。在达到最大荷载时, 突然形成一定倾角的临界斜裂缝, 节点发生冲切破坏, 如图 1 所示。

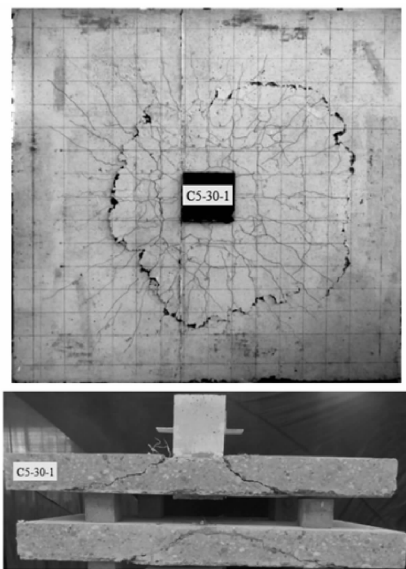


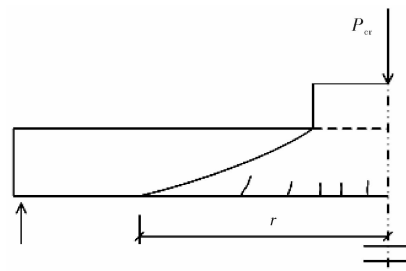
图 1 板柱节点冲切裂缝^[10]

Fig. 1 Crack patterns of collapse of slab column connections

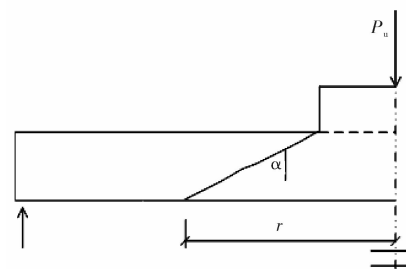
在试验中发现冲切破坏的板下的临界裂缝一般位于最外边的环向裂缝附近。对于混凝土板柱节点的在荷载作用下的裂缝发展, 我们并不能直接观察到裂缝沿着板的厚度的发展规律, 只能观察到板底的裂缝。类似于梁的受剪破坏, 板柱节点在荷载的作用下会产生由板底向加载点延伸的斜裂缝, 如图 2(a)所示。图 3 中 P_{cr} 曲线为圆板在荷载作用下距离圆心为 r 处的截面开裂时的荷载。

在刚塑性极限分析中, 混凝土常被看成是一

种遵循一定屈服准则的理想的刚塑性材料, 节点在冲切作用下会产生塑性屈服面, 如图 2b 所示。图 3 中 P_u 曲线为圆板在荷载作用下屈服面的底部距离柱中心为 r 处时对应的斜截面屈服的荷载。



(a) 斜截面开裂示意图



(b) 斜截面屈服示意图

图 2 斜截面开裂及屈服示意图

Fig. 2 Diagram of inclined section on cracking and yielding

现将板柱节点的冲切破坏机理阐述如下: 板柱节点在荷载的作用下, 首先会在柱边产生环向的斜裂缝, 并随着荷载的增大逐步向支撑处延伸。但由于荷载较小, 在混凝土的摩擦力、骨料的咬合力的作用下, 裂缝是稳定的, 节点并不会发生冲切破坏。随着荷载的增加, 从塑性理论的角度来分析, 在斜截面上会生成塑性屈服面, 当荷载增加到使得斜裂缝和塑性屈服面在同一处产生时, 临界斜裂缝生成, 斜截面发生滑移, 即节点发生冲切破坏。这种破坏机理被 Zhang 成功的应用到钢筋混凝土简支梁的受剪破坏分析中^[11]。

图 3 表示在不同的加载方式以及不同的支撑条件下的开裂荷载和屈服荷载示意图。在集中荷载下可能为: 图 3(a)为冲垮比较大的情况, 图 3(b)为冲垮比很小的情况; 在均布加载下可能为: 图 3(a)为板较小的情况, 图 3(c)为板较大的情况。

在集中荷载作用, 当冲垮比较大时, 如图 3(a)所示。S 为两条曲线的交汇点。在 S 点的左侧, 塑性极限荷载大于板的斜截面开裂荷载, 板在此处不会形成塑性屈服面, 从而不会发生冲切破坏。在 S 点的右侧, 板斜截面开裂荷载大于屈服荷载, 板在此处不会形成斜裂缝, 所以板也不发生冲切破坏。所以在理论上板只会在 S 点形成形成破坏冲切面, S 点对应的荷载为节点的理论冲切强

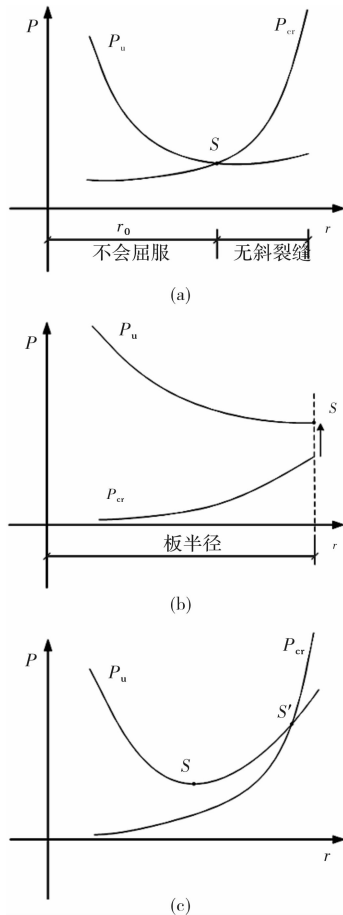


图 3 不同情况下的承载力示意图

Fig. 3 The capacity in different conditions

度；当板的冲跨比较小时，如图 3(b)所示， P_u 与 P_{cr} 可能不存在交点，随着荷载的增大，即使在支撑处刚形成斜裂缝时，塑性屈服面并不能形成，所以荷载可以继续增加，当荷载增加到 S 时，屈服面形成，而此时的斜裂缝早已存在，所以截面发生滑移，节点发生冲切破坏，此时的理论荷载为 $P_u(C/2)$ ，即图 3(b)中的 S 点。

在均布荷载作用下，可能会出现屈服荷载上升段，如图 3(c)所示，这是由于均布荷载时在冲切锥内荷载比重上升所造成的。若两曲线相较于下降段，则与图 3(a)情况相同；如相交于上升段则如图 3(c)所示，此时在交点 S' 处也可以产生冲切破坏，同时在 S 处，其荷载大于此处的斜截面开裂荷载，同时达到屈服荷载，故在 S 也会产生冲切破坏， S' 处的荷载大于 S 处的荷载，故理论荷载为图 3(c)中的 S 所对应的荷载。

在实际中破坏并不会严格的出现在理论点，临界斜裂缝的出现的位置具有一定的随机性，总体上是在理论值左右摆动。然而不管是在理论点的左边还是右边，其实际的承载力总会略高于理论值。当承载力达到冲切强度后发生冲切破坏，承载力迅速下降，破坏呈现出典型的脆性特征。

2 斜截面抗弯开裂荷载

对于混凝土板的斜截面开裂计算比较复杂，可以采用有限元软件进行数值计算，但对于圆板的轴对称开裂问题，可以通过相对简单的弹性力学、材料力学方法进行近似的求解。

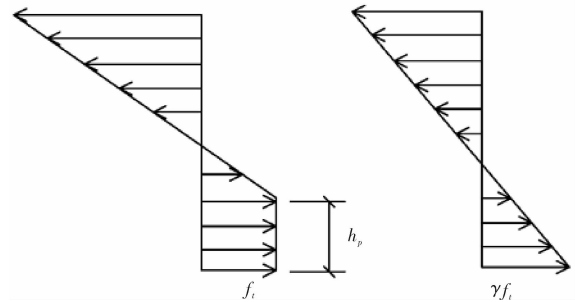


图 4 截面应力分布示意图

Fig. 4 Stress distribution diagram of cross section

当最外边缘的混凝土恰好达到受拉强度时，其应力分布假设为线性分布，则开裂弯矩可以表达为：

$$M_{cr} = W f_t \quad (1)$$

式中： W 为截面抵抗矩； f_t 为混凝土抗拉强度。然而实际上当最外边的混凝土达到受拉强度时混凝土并不会马上开裂，能表现出一定的塑性性质，假设应力分布如左侧所示，在外边缘存在一定距离的直线段，若采用等效弹性算法，如图 4 右侧所示开裂弯矩可以表达为：

$$M_{cr} = \gamma W f_t \quad (2)$$

γ 为塑性系数，图 4 中 h_p 表示受拉塑性区的发展程度，与混凝土的脆性程度、截面的形状等因素有关。

现有的冲切破坏试验表明板的冲切破坏面接近于一条直线，故假设破坏面为由柱边向板底延的直线绕圆柱中心的轴线旋转而成。如图 5 所示为其轴线的剖面图。

$$L_{AR} = \sqrt{h^2 + (r - B/2)^2} \quad (3)$$

$$y_c = \frac{2L_{AR}(B+r)}{3(B+2r)} \quad (4)$$

$$W = \frac{\pi B L_{AR}^3}{12 y_c} + \frac{\pi B L_{AR}}{y_c} \left(\frac{L_{AR}}{2} - y_c \right)^2 + \frac{(2\pi r - \pi B) L_{AR}^3}{36 y_c} + \frac{(2\pi r - \pi B) L_{AR}}{2 y_c} \left(\frac{L_{AR}}{3} - y_c \right)^2 \quad (5)$$

对于混凝土的抗拉强度，其基本强度按中国混凝土结构设计规范 GB50010-2010^[12] 进行取值。

$$f_t = 0.395 \alpha_{c2} f_{cu}^{0.55} \quad (6)$$

f_{cu} 为混凝土的立方体抗压强度，单位为 MPa， α_{c2} 为与混凝土强度有关的脆性系数，当 f_{cu} 小于 40 MPa 时 α_{c2} 有取为 1，大于 80 MPa 时 α_{c2} 有取为

如图 7b 所示,当板底为均布荷载时,对于直径为 C 的圆板,在虚功方程中需要考虑冲切锥上的均布荷载做的功,可以容易求得:

$$P_{u2} = \frac{\pi h^2}{4} \left(\frac{B}{r-B/2} + 1 \right) \frac{v_c f_c}{1-4r^2/C^2} \quad (15)$$

4 混凝土的抗压有效性系数

在刚塑性极限分析中混凝土被看成是理想的刚塑性材料,这与实际情况并不完全相符.为了使塑性极限分析的结果能应用于混凝土结构,常采用试验结果对计算公式中的混凝土强度进行修正^[7,13],塑性抗压强度等效系数为 v_c .

$$f'_c = v_c f_c \quad (16)$$

欧洲规范^[14]认为板柱节点的抗冲切承载力与混凝土的强度、配筋、以及尺寸效应这三个因素有关,所以本文认为混凝土的抗压有效系数也与这三个因素有关,即:

$$v_c = \alpha_1 f_c^{\alpha_2} (100\rho)^{\alpha_3} \left(\frac{100}{h} \right)^{\alpha_4} \leq 1 \quad (17)$$

类似的混凝土强度的影响系数 α_2 取为 $-2/3$,配筋率的影响系数 α_3 取为 $1/3$,尺寸效应系数 α_4 可以取为 $1/2$. 其中 α_1 为调整系数,对试验数据分析表明,可以取为 5.65,所以得:

$$v_c = 5.65 f_c^{-\frac{2}{3}} (100\rho)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{100}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \leq 1, (\rho \leq 2\%) \quad (18)$$

5 具体求解的方法及试验对比

为与工程应用的习惯相一致的原则,计算公式中的 h 表示板的有效厚度.对于方形柱板柱节点,采用等效直径计算,等效原则为两者柱截面面积相等,若为边长为 c 方柱则,则等效圆柱直径 $B = 1.13c$;方板的边长为 L 时,等效圆板直径 $C = 1.13L$.

如图 3 中节点 S 处的最终承载力求解方法如下:

- 1) 计算出不同位置斜截面开裂荷载 $P_{cr1}(r)$ 、 $P_{cr2}(r)$;
- 2) 计算不同位置处屈服荷载 $P_{u1}(r)$ 、 $P_{u2}(r)$;
- 3) S 点的承载力.对于集中荷载, $P = P_{u1}(S)$,判断 P_{cr1} 与 P_{u1} 是否存在交点,若有,则为图 3(a),若无,则为图 3(b);对于均布荷载, $P = P_{u2}(S)$,判断 P_{cr2} 与 P_{u2} 交点位置,若交点在下降段,则为图 3(a),若交点在上升段,则为图 3(c).

对文献[15]整理的 231 个楼板的冲切试验数进行计算,其结果如图 8,试验值与计算值的比值的平均值为 1.02,变异系数为 0.17,有较好的吻合

程度.冲切锥 $\tan\alpha$ 的平均值为 2,也与试验现象吻合较好.我国的规范计算的平均值为 1.45,变异系数为 0.26.

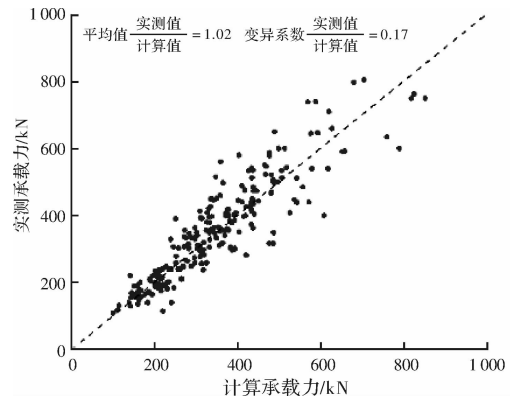


图 8 集中力作用下的计算与试验对比

Fig. 8 Comparison of calculated result and the test result under concentrated load

图 9 为 $\tan\alpha$ 和冲跨比的散点图,为对上述的计算方法进行简化,近似的取为:

$$r = (0.8 + 0.2\lambda)h + B/2 \quad 2 \leq \lambda \leq 6 \quad (19)$$

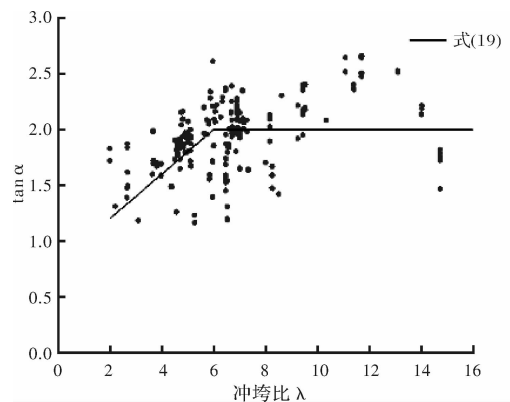


图 9 $\tan\alpha$ 与冲跨比的散点图

Fig. 9 Relationship between $\tan\alpha$ and λ

λ 为板柱节点的冲跨比取值范围为 $2 \sim 6$, 小于 2 由于缺乏试验数据支撑,不适合计算,大于 6 则取 6,将式(20)代入式(14)得到楼板的简化计算公式:

$$P = 2.22h \left(\frac{2B}{0.8 + 0.2\lambda} + 2h \right) (100\rho f_c)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{100}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

简化公式和试验值与计算值的比值的平均值为 1.00,变异系数为 0.18,能满足工程应用的精度要求.

对文献[15]整理的 93 个(剔除 91~96 号共 6 个同一批次明显异常数据)基础板的冲切试验数进行计算,其结果如图 10,试验值与计算值的比值的平均值为 0.98,变异系数为 0.13,离散性很小.冲切锥 $\tan\alpha$ 的平均值为 0.97,即约为 45 度,这也与试验现象吻合良好.

为方便计算,对上述的计算方法进行简化,同时为使得计算尽量简单,可以近似的取为

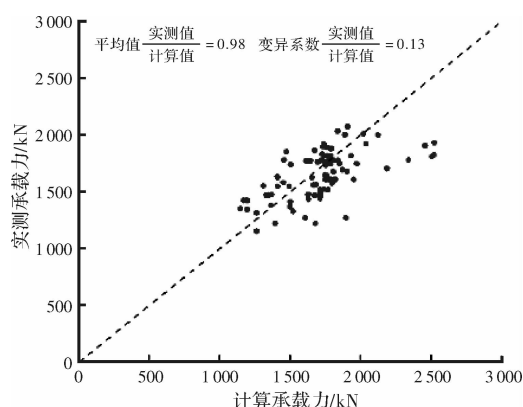


图10 基础板的计算与试验对比

Fig. 10 Comparison of calculated result and the test result

$\tan\alpha=1$, 即:

$$r=h+B/2 \quad (21)$$

将式代入式得到基础板的简化计算公式:

$$P=\frac{4.44h}{[1-(2h+B)^2/c^2]}(B+h)(100\rho f_c)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{100}{h}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (22)$$

试验值与简化计算公式的比的平均值为 0.98, 变异系数为 0.11, 能满足工程应用的精度要求。

6 结论

(1)斜截面开裂的同时在该斜截面上形成塑性屈服面,进而形成临界斜裂缝发生滑移引发节点冲切破坏,这种冲切破坏机理既考虑了斜裂缝形成与弹性内力分布有关,又能引入塑性条件描述板柱节点的冲切破坏。

(2)基于上述破坏机理分别推演了圆形板柱节点斜截面开裂荷载和塑性极限荷载,构造板柱节点冲切破坏计算方法,同时推导了简化的计算公式,适用于集中力加载和均布加载两种同情况,经检验与试验结果吻合良好。

(3)本文的计算结果比较合理的解释了板在集中力加载下的冲切角正切值约为 2,均布荷载下时约为 1 的现象。

(4)推导求出的计算公式能很好的反应冲垮比对承载力的影响。

(5)对于混凝土的抗压有效系数是基于经验及现有试验数据的统计,在理论上尚缺乏严谨的理论证明,有必要进一步研究。

参考文献 References

- [1] 326 ASCE-ACI. Shear and diagonal tension. Part 3, Slabs and Footings [J]. ACI Structural Journal, 1962, 59(3): 103-113.
- [2] BRSTRUP M W, NIELSEN M P, JENSEN B C, et al. Axisymmetric punching of plain and reinforced con-

crete [M]. Structural Research Laboratory, Technical University of Denmark, 1976: 1-33.

- [3] ALEXANDER S B, SIMMONDS S H. Ultimate strength of slab-column connections [J]. ACI Structural Journal, 1987, 84(3): 255-261.
- [4] MUTTONI A. Punching shear strength of reinforced concrete slabs without transverse reinforcement [J]. ACI Structural Journal, 2008, 105(4): 440-450.
- [5] PARK H G, CHOI K K, CHUNG L. Strain-based strength model for direct punching shear of interior slab-column connections [J]. Engineering Structures, 2011, 33(3): 1062-1073.
- [6] BROMS C E. Tangential strain theory for punching failure of Flat Slabs [J]. ACI Structural Journal, 2016, 113(1): 95-104.
- [7] JIANG D H, SHEN J H. Strength of concrete slabs in punching shear [J]. Journal of Structural Engineering, 1986, 112(12): 2578-2791.
- [8] 严宗达. 用双剪强度理论解混凝土板冲切的轴对称问题 [J]. 工程力学, 1996, 13(01): 1-7.
YAN Zongda. Solution Of The Axisymmetrical punching problem of Concrete slab by The twin shear strength theory [J]. Engineering Mechanics, 1996, 13(01): 1-7.
- [9] 魏雪英, 杨政, 于澍, 等. 用统一强度理论求解轴对称混凝土板的冲切强度 [J]. 工程力学, 2002, 15(9): 92-96.
WEI Xueying, YAN Zheng, YU Shu. With the unified strength theory to solve the axisymmetric punching strength of The concrete slab [J]. Engineering Mechanics, 2002, 19(05): 92-96.
- [10] 彭检. 钢筋混凝土板柱节点抗冲切试验研究 [D]. 长沙:湖南大学, 2013.
PENG Jing. Experimental study on punching shear failure of reinforced concrete slabs-column connections [D]. Changsha: Hunan University, 2013.
- [11] ZHANG J P. Diagonal cracking and shear strength of reinforced concrete beams [J]. Magazine of Concrete Research, 1997, 49(178): 55-65.
- [12] 中华人民共和国建设部. 混凝土结构设计规范: GB50010[S]. 北京:中国建筑工业出版社, 2010.
Ministry of Construction of the PRC. Code for design of concrete structure:GB50010[S]. Beijing:China Architecture and Building Press, 2010.
- [13] NIELSEN M P, HOANG L C. Limit analysis and concrete plasticity [M]. CRC press, 2010: 579-599.
- [14] INSTITUTION B S. Eurocode 2: Design of Concrete Structures: Part 1-1: General rules and rules for buildings [M]. British Standards Institution, 2004:85-86.
- [15] 杨开. 钢筋混凝土板受冲切可靠度分析 [D]. 长沙:湖南大学, 2012.
YANG Kai. The reliability analysis of reinforced concrete slabs in punching shear [D]. Changsha: Hunan University, 2012.

(编辑 桂智刚)