

# 太沙基地基极限承载力的三剪应力统一强度理论解

高江平, 胡海波, 孙世界, 王泽普

(长安大学 特殊地区公路工程教育部重点实验室, 陕西 西安 710064)

**摘要:** 以往对地基极限承载力的研究通常基于 Mohr-Coulomb 强度准则, 但此理论未考虑中间主应力的作用, 所计算的地基承载力值偏保守。本文考虑三个主剪应力的效应, 得出了基于三剪应力统一强度理论的太沙基地基极限承载力解, 通过算例对比分析了基于 Mohr-Coulomb 理论、双剪强度理论、双剪统一强度理论及三剪应力统一强度理论的地基极限承载力值, 并利用 MATLAB 软件生成了参数  $b$ 、 $c$  与承载力  $q_u$  之间的关系图。本文的理论解包含了基于前三种理论的地基承载力解, 可以将材料的潜力发挥的更大。

**关键词:** 三剪应力统一强度理论; Mohr-Coulomb 理论; 地基极限承载力; 材料潜力

中图分类号: TU456

文献标志码: A

文章编号: 1006-7930(2019)02-0186-06

## Three-shear stress unified strength theoretical solution of Terzaghi ultimate bearing capacity of foundation

GAO Jiangping, HU Haibo, SUN Shijie, WANG Zepu

(Key Laboratory for Special Area Highway Engineering Ministry of Education,  
Chang'an University, Xi'an 710064, China)

**Abstract:** The previous research on ultimate bearing capacity of foundation is generally based on the Mohr-Coulomb strength criterion. However, this theoretical formula fails to take into account the influence of intermediate main stress, and the calculated bearing capacity of foundation is conservative. Considering the effect of three main stresses, the paper deduces Ultimate Bearing Capacity Solution of Terzaghi Based on Unified Strength Theory of Three Shear Stresses. The ultimate bearing capacity of foundation is based on Mohr-Coulomb theory, twin-shear strength theory, twin-shear unified strength theory and three-shear stress unified strength theory are compared and analyzed by examples. The relationship between parameters  $b$ ,  $c$  and bearing capacity  $Q_u$  is plotted by using MATLAB software. The theoretical solutions in this paper include the solutions of foundation bearing capacity based on the first three theories, which can bring the potential of materials into full play.

**Key words:** three-shear stress unified strength theory; Mohr-Coulomb Theory; ultimate bearing capacity of foundation; Material potential

工程领域对地基承载力的探究是岩土工程学科一个重要的问题, 因为地基稳定性的影响因素很多, 对工程的各项性能评估具有重要的意义。

强度准则揭示了物体受力状态下产生塑性变形和损坏的现象。目前, 岩土材料研究中多采用 Terzaghi 准则和 Mises 准则解决实际问题<sup>[1]</sup>。但是在实际运用中发现, 其分别存在各自的局限性。前者在实际运用中忽视了中主应力的作用。而后一准则比较复杂, 不存在相关性, 实际运用中通常只能采用数值法进行求解。

1943 年, 太沙基首次依据 Mohr—Coulomb 理论提出了地基承载力公式<sup>[1]</sup>, 沿用至今。但是, 在

运用中发现, 太沙基地基最大承载力公式未考虑中主应力, 因而无法彻底揭示地基的真实破坏状况。

本文根据三剪统一强度理论, 可求得基于此理论下的太沙基地基极限承载力值, 并探究权系数  $b$ 、 $c$  对其的影响。

### 1 三剪应力统一强度理论<sup>[3]</sup>

该理论认为: 菱形十二面单元体上的三个主剪应力( $\tau_{13}$ 、 $\tau_{12}$ 、 $\tau_{23}$ )与三个正应力( $\sigma_{13}$ 、 $\sigma_{12}$ 、 $\sigma_{23}$ )构成的函数关系式达到某一极限值时, 材料产生损坏。其数学公式为



$$P_p = \frac{B}{2 \cos^2 \varphi_s} \cdot$$

$$\left\{ \frac{16c_0 \cos \varphi_0 K_{Pc} + \{ (1+b)(1+\sin \varphi_0) + [c(1+\sin \varphi_0) - (1-\sin \varphi_0)b]m - (1+c)(1-\sin \varphi_0) \} \gamma B K_{Py}}{4\sqrt{[(1+b)(1+\sin \varphi_0) + (1+c)(1-\sin \varphi_0)]^2 - \{ (1+b)(1+\sin \varphi_0) + [c(1+\sin \varphi_0) - (1-\sin \varphi_0)b]m - (1+c)(1-\sin \varphi_0) \}^2}} + qK_{Pq} \right\} \quad (9)$$

式中:  $K_{Pc} = \frac{\cos \varphi_s}{\cos \psi} \cot \varphi_s [e^{(\frac{3\pi}{2} + \varphi_s - 2\psi) \tan \varphi_s} (1 + \sin \varphi_s) - 1]$ ;

$$K_{Pq} = \frac{\cos^2 \varphi_s}{\cos \psi} e^{(\frac{3\pi}{2} + \varphi_s - 2\psi) \tan \varphi_s} \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_s}{2} \right);$$

$K_{Py}$  为基础以下土体的重度  $\gamma$  所产生的被动土压力的作用系数, 确定  $K_{Py}$  需要采用试算方法。

联立公式(7)与公式(9)推导得出:

$$q_u = \frac{Q_u}{B} = \frac{(4c_0 \cos \varphi_0 N_c)}{\left\{ \frac{[(1+b)(1+\sin \varphi_0) + (1+c)(1-\sin \varphi_0)]^2 - \{ (1+b)(1+\sin \varphi_0) + [c(1+\sin \varphi_0) - (1-\sin \varphi_0)b]m - (1+c)(1-\sin \varphi_0) \}^2}{(1+c)(1-\sin \varphi_0)} \right\}^{\frac{1}{2}}} + qN_q + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma \quad (10)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} N_c &= \tan \psi + \frac{\cos(\psi - \varphi_s)}{\cos \psi \sin \varphi_s} [e^{(\frac{3\pi}{2} + \varphi_s - 2\psi) \tan \varphi_s} (1 + \sin \varphi_s) - 1] \\ N_q &= \frac{\cos(\psi - \varphi_s)}{\cos \psi} e^{(\frac{3\pi}{2} + \varphi_s - 2\psi) \tan \varphi_s} \tan \left( 45^\circ + \frac{1}{2} \varphi_s \right) \\ N_\gamma &= \frac{1}{2} \tan \psi \left( \frac{K_{Py} \cos(\psi - \varphi_s)}{\cos \psi \cos \varphi_s} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中,  $N_c$ 、 $N_q$ 、 $N_\gamma$  为无法量化的承载力系数指标, 只和  $\varphi_0$  有关。

式(10)是以基底粗糙为条件推导出的, 并且图2中  $\psi$  是未知的, 故作如下假定:

(1) 假定基础完全粗糙, 此时作出如下假定: 认为  $\psi = \varphi_s$ , 基础底部滑动面形状如图3。

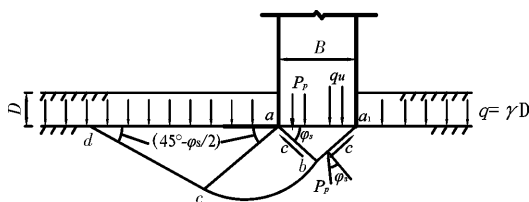


图3 基底完全粗糙情况下的滑动面形状

Fig. 3 Sliding surface shape of completely rough base

则可将式(11)的形式表示成如下情形:

$$\left\{ \begin{aligned} N_c &= (N_q - 1) \cot \varphi_s \\ N_q &= \frac{e^{(\frac{3\pi}{2} - \varphi_s) \tan \varphi_s}}{2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \varphi_s \right)} \\ N_\gamma &= \frac{1}{2} \left( \frac{K_{Py}}{\cos^2 \varphi_s} - 1 \right) \tan \varphi_s \end{aligned} \right. \quad (12)$$

从式(12)可知: 系数  $N_c$ 、 $N_q$ 、 $N_\gamma$  均受到基础以下土颗粒间摩擦角  $\varphi_0$  的影响, 一般需要通过试算确定被动土压力系数  $K_{Py}$ 。

工程运用上为了方便, 对于系数  $N_\gamma$ , 往往联合太沙基经验公式, 采用如下式确定:

$$N_\gamma = 1.8(N_q - 1) \tan \varphi_s \quad (13)$$

(2) 假定基底完全光滑, 则区域 I 的土体状态转变成朗金主动状态, 从而使得区域 I 与区域 II 和区域 III 共同构成一个完整的滑动区, 这时区域 I 的界线  $ab$  与水平面的夹角  $\psi$  (如图3~图4所示) 有如下表达式:

$$\psi = 45^\circ + \frac{1}{2} \varphi_s \quad (14)$$

将  $\psi$  代入式(11)中, 可分别得到此条件下的系数  $N_c$ 、 $N_q$ 、 $N_\gamma$ 。

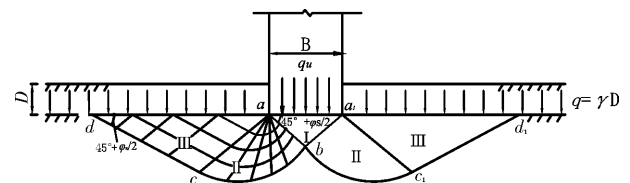


图4 基底完全光滑情况下的滑动面形状

Fig. 4 Sliding surface shape of completely smooth base

### 3 算例

现有某地基, 土的重度  $\gamma = 19.5 \text{ kN/m}^3$ , 土体均匀, 为粘性土, 经固结不排水条件下快速剪切试验, 测得  $c_0 = 20 \text{ kPa}$ ,  $\varphi_0 = 22^\circ$ 。地基土上埋置一长条基础, 深度 3 m, 宽度 4 m。

根据以上已知条件, 分别基于四种不同的理论, 求解地基极限承载力值, 并进行比较分析。

#### 3.1 经典太沙基公式解<sup>[1]</sup>

3.1.1 当基础底部为完全粗糙状态时, 根据题设

条件  $\varphi_0=22^\circ$  计算得出承载力系数  $N_c=20$ ,  $N_q=10$ ,  $N_\gamma=7$ . 最后解得地基极限承载力  $q_u=1\,258.0\text{ kPa}$ .

3.1.2 当基础底部为完全光滑状态时, 根据题设条件  $\varphi_0=22^\circ$  计算得出承载力系数  $N_c=16.88$ ,  $N_q=7.82$ ,  $N_\gamma=4.96$ . 最后解得地基极限承载力  $q_u=988.5\text{ kPa}$ .

3.2 双剪强度理论解<sup>[6,8]</sup>

地基承载力达到其极限值, 此时地基处于屈服破坏的临界状态, 中间主应力参数  $m=1$ .

当基础底部为完全粗糙状态时, 根据题设已知条件, 计算得到承载力系数  $N_c=27.5$ ,  $N_q=14.78$ ,  $N_\gamma=12.3$ . 从而最终解得极限承载力为  $q_u=2\,017.7\text{ kPa}$ .

当基础底部处于完全光滑状态时, 根据题设已知条件, 解得承载力系数  $N_c=22.8$ ,  $N_q=12.3$ ,  $N_\gamma=10$ . 最后解得极限承载力为:  $q_u=1\,668.9\text{ kPa}$ .

3.3 双剪统一强度理论解<sup>[5]</sup>

地基承载力达到其极限值, 此时地基处于屈服破坏的临界状态, 此时中间主应力参数  $m=1$ .

当基础底部处于完全粗糙时, 假设系数  $b(0\leq b\leq 1)$  分别取 0、0.2、0.4、0.6、0.8、1, 解得极限承载力如下表 1 所示.

表 1 完全粗糙基底条件下的地基极限承载力值

Tab. 1 Ultimate bearing capacity of foundation with completely rough base

$b$ 值	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$q_u/\text{kPa}$	1 580.3	1 692.3	1 791.0	1 878.9	1 957.6	2 028.4

当基础底部处于完全光滑状态时, 假设系数  $b(0\leq b\leq 1)$  分别取 0、0.2、0.4、0.6、0.8、1, 解得极限承载力如下表 2 所示.

表 2 完全光滑基底条件下的地基极限承载力值

Tab. 2 Ultimate bearing capacity of foundation with completely smooth bases

$b$ 值	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$q_u/\text{kPa}$	1 326.3	1 413.2	1 490.2	1 558.7	1 620.0	1 675.1

3.4 三剪应力统一强度理论解

地基承载力达到其极限值, 此时地基处于屈服破坏的临界状态, 此时中间主应力参数  $m=1$ . 利用上文中推导的公式分别计算.

(1)当基础底部处于完全粗糙状态时, 系数  $b$  与  $c$  分别在 0~1 之间取值, 从而解得相应的极限

承载力值, 如表 3 所示, 并绘制了此条件下系数  $b$ 、 $c$  与  $q_u$  之间的关系图, 如图 5 所示.

表 3 完全粗糙基底条件下的地基承载力值

Tab. 3 Ultimate bearing capacity of foundation with completely rough base

$b=1$		$c=0$	
$c$	$b$	$q_u/\text{kPa}$	$q_u/\text{kPa}$
0	0	1 580.3	2 028.4
0.2	0.2	1 692.3	2 456.4
0.4	0.4	1 791.0	2 964.8
0.6	0.6	1 878.9	3 567.4
0.8	0.8	1 957.6	4 280.1
1	1	2 028.4	5 121.9

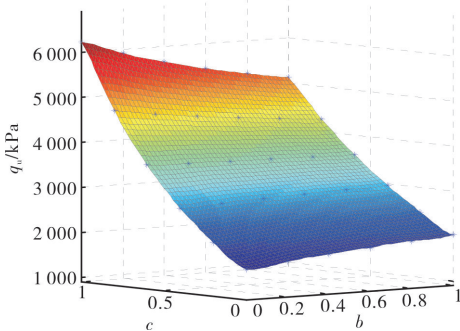


图 5 完全粗糙基底条件下系数  $b$ 、 $c$  与  $q_u$  之间的关系图

Fig. 5 Correlation graphs between  $b$ ,  $C$  and  $q_u$  on completely rough base

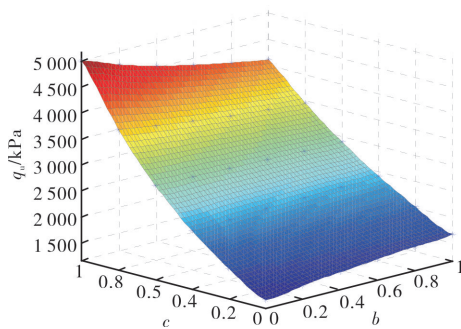
从表 3 及图 5 中可以看出地基极限承载力  $q_u$  受到  $b$ 、 $c$  取值的影响,  $b$ 、 $c$  取值越大, 则  $q_u$  越大. 由表 3 的计算结果与 3.1.1 的结果相比可知, 本理论的承载力值均大于经典太沙基承载力值; 与 3.2.1 的结果相比可知, 当  $b=1$ ,  $c$  在 0~1 之间取值时, 本理论的承载力值均大于双剪强度理论的承载力值; 与 3.3.1 相比, 当  $c=0$ ,  $b$  在 0~1 之间取值时, 式(1)蜕化成双剪统一强度理论, 本理论的承载力值即为双剪统一强度理论的承载力值, 当  $b=1$ ,  $c$  在 0~1 之间取值时, 则本理论的承载力值均大于双剪统一强度理论的承载力值, 由此表明: 极限承载力在较大程度上也受到系数  $c$  的影响, 且随着  $c$  值的增加而增大.

(2)当基础底部处于完全光滑状态时, 系数  $b$  与  $c$  分别在 0~1 之间取值, 最终解得相应的极限承载力值, 如表 4 所示, 并绘制了此条件下系数  $b$ 、 $c$  与  $q_u$  之间的关系图, 如图 6 所示.

表4 完全光滑基底条件下的地基承载力值

Tab. 4 Ultimate bearing capacity of foundation with completely smooth base

$c=0$		$b=1$	
$b$	$q_u/\text{kPa}$	$c_u/\text{kPa}$	
0	1 326.3	0	1 675.1
0.2	1 413.2	0.2	2 015.2
0.4	1 490.2	0.4	2 417.5
0.6	1 558.7	0.6	2 892.6
0.8	1 620.0	0.8	3 452.7
1	1 675.1	1	4 112.1

图6 完全光滑基底条件下系数  $b$ 、 $c$  与  $q_u$  之间的关系图Fig. 6 Correlation graphs between  $b$ ,  $c$  and  $q_u$  on completely smooth base

从表4及图6中也可以看出地基极限承载力  $q_u$  受到  $b$ 、 $c$  取值的影响,  $b$ 、 $c$  取值越大, 则  $q_u$  越大。由表4的计算结果与3.1.2的结果相比可知, 本理论的承载力值均大于经典太沙基承载力值; 与3.2.2的结果相比可知, 当  $b=1$ ,  $c$  在  $0\sim 1$  之间取值时, 本理论的承载力值均大于双剪强度理论的承载力值; 与3.3.2相比, 当  $c=0$ ,  $b$  在  $0\sim 1$  之间取值时, 式(1)蜕化成双剪统一强度理论, 本理论的承载力值即为双剪统一强度理论的承载力值, 当  $b=1$ ,  $c$  在  $0\sim 1$  之间取值时, 则本理论的承载力值均大于双剪统一强度理论的承载力值, 由此表明: 极限承载力在较大程度上也受到系数  $c$  的影响, 且随着  $c$  值的增加而增大。

## 4 结论

(1)本文推导出了太沙基地基极限承载力的三剪统一强度理论解, 并可根据系数  $b$ 、 $c$  的不同取值, 将此理论解简化为其他不同的理论解。若  $b$  和  $c$  值均为0, 则简化为Mohr—Coulomb理论解; 若  $b$  不为0, 而  $c$  值为0, 则简化为双剪统一强度理论解。

(2)本文公式分别包含了以经典太沙基、双剪强度理论及双剪统一强度理论为依据的地基承载力公式, 并与前三种理论解进行了对比分析表明: 三剪统一强度理论解更加全面的考虑了材料中三个主剪应力的影响, 将其潜能发挥的更大, 既克服了传统太沙基公式保守的缺点, 又将双剪统一强度理论中忽略的最小主剪应力考虑进来。

(3)随着系数  $b$ 、 $c$  值的增加, 由本文推导的三剪应力地基承载力值也在提高。三剪统一强度理论解适用范围很广, 适用于许多不同类型地基的承载力计算, 通过合理地确定  $b$ 、 $c$  值从而得到更为真实的结果。

## 参考文献 References

- [1] 太沙基 K. 理论土力学[M]. 徐志英, 译. 北京: 地质出版社, 1960.  
TERZAGHI K. Theory mechanics[M]. XU Zhiying Translated. Beijing: Geological Publishing House, 1960.
- [2] 俞茂宏, 何丽南, 宋凌宇. 双剪应力强度理论及其推广[J]. 中国科学(A), 1985, 28(12): 1113-1120.  
YU Maohong, HE Linan, SONG Lingyu. Double-shear theory and its generalization[J]. Science in China (A), 1985, 28(12): 1113-1120.
- [3] 高江平, 杨华, 蒋宇飞, 等. 三剪应力统一强度理论研究[J]. 力学学报, 2017, 49(6): 1322-1334.  
GAO Jiangping, YANG Hua, JIANG Yufei, et al. The three-shear stress unified strength theory[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2017, 49(6): 1322-1334.
- [4] 俞茂宏. 工程强度理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.  
YU Maohong. Engineering strength theory[M]. Beijing: Science Press, 1998.
- [5] 高江平, 俞茂宏, 李四平. 太沙基地基极限承载力的双剪统一解[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(15): 2736-2740.  
GAO Jiangping, YU Maohong, LI Siping. Double-shear unified solution of Terzaghi ultimate bearing capacity of foundation[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(15): 2736-2740.
- [6] 许东俊. 岩石强度随中间主应力的变化规律[J]. 固体力学学报, 1985, 6(10): 72-80.  
XU Dongjun. The variation law of rock strength with increase of intermediate principal stress[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 1985, 6(10): 72-80.
- [7] 俞茂宏. 岩土类材料的统一强度及其应用[J]. 岩土工程学报, 1994, 16(2): 1-9.

- YU Maohong. Unified strength theory for geomaterials and its application[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1994, 16(2):1-9.
- [8] 周小平,黄煜斌,丁志诚. 考虑中间主应力的太沙地基极限承载力公式[J]. 岩石力学与工程学报,2002,21(10):1554-1556.
- ZHOU Xiaoping, HUANG Yubin, DING Zhicheng. Influence of intermediate principal stress on the formula of Terzaghi ultimate bearing capacity of foundations[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2002,21(10):1554-1556.
- [9] 高江平,俞茂宏. 三剪应力统一屈服准则研究[J]. 西安建筑科技大学学报(自然科学版),2005,37(4):525-531.
- GAO Jiangping, YU Maohong. Study on the unified yield criterion of three-shear stress[J]. J. Xi'an Univ. of Arch. & Tech. (Natural Science Edition), 2005, 37(4):525-531.
- [10] 王淑红. 基于三剪应力统一强度理论的挡土墙土压力计算的水平分层分析及加筋挡土墙计算理论研究[D]. 西安:长安大学,2013.
- WANG Shuhong. Calculation study of the horizontal layer analysis method on earth pressure of retaining wall and reinforced earth retaining wall based on the Triple-shear unified strength theory[D]. Xi'an: Chang'an University, 2013.
- [11] 刘华东. 强度理论及其在边坡稳定性分析中的应用[D]. 西安:长安大学,2009.
- LIU Huadong. Strength theory and application in the slope stability analysis[D]. Xi'an: Chang'an University, 2009.
- [12] 杨华. 三剪统一强度理论的理论分析及试验验证研究[D]. 西安:长安大学,2010.
- YANG Hua. The study on theory analysis and experimental verification of the three shear stress unified strength[D]. Xi'an: Chang'an University, 2010.
- [13] 蒋宇飞. 三剪应力统一强度理论对砂土的适用性研究[D]. 西安:长安大学,2015.
- JIANG Yufei. Research the applicability of the three shear unified strength theory on sandy soil[D]. Xi'an: Chang'an University, 2015.
- [14] YU Maohong. Advances in strength theories for materials under complex stress states in the 20th century[J]. Applied Mechanics Reviews, ASCE, 2002, 55(3): 169-218.
- [15] YU Maohong. Unified Strength Theory and Its Applications[M]. Berlin: Springer, 2004.
- [16] 程国勇,邱睿,段淳. 基底完全粗糙时太沙地基承载力系数的解析解[J]. 中国民航大学学报,2011,29(1):25-28.
- CHENG Guoyong, QIU Rui, DUAN Chun. Analytical formula of K. Terzaghi ultimate bearing capacity coefficient under totally coarse foundation base[J]. Journal of Civil Aviation University of China, 2011, 29(1):25-28.
- [17] 高江平,俞茂宏. 双剪统一强度理论在空间主动土压力计算中的应用[J]. 西安建筑科技大学学报(自然科学版),2006,38(1):93-99.
- GAO Jiangping, YU Maohong. Application of the twin-shear unified theory in the space earth pressure computation[J]. J. Xi'an Univ. of Arch. & Tech. (Natural Science Edition), 2006, 38(1):93-99.
- [18] 范文,白晓宇,俞茂宏. 基于统一强度理论的地基极限承载力公式[J]. 岩土力学,2005,26(10):1617-1622.
- FAN Wen, Bai Xiaoyu, YU Maohong. Formula of ultimate bearing capacity of shallow foundation based on unified strength theory[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(10):1617-1622.
- [19] 高江平,刘元烈,俞茂宏. 统一强度理论在挡土墙土压力计算中的应用[J]. 西安交通大学学报,2006,40(3):357-364.
- GAO Jiangping, LIU Yuanlie, YU Maohong. Unified strength theory with applications to earth pressure[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2006, 40(3):357-364.
- [20] 高江平,底国民,蒋持平. 克列恩空间土压力计算理论的双剪统一解[J]. 西安建筑科技大学(自然科学版),2007,39(6):752-755.
- GAO Jiangping, DI Guomin, JIANG Chiping. Twin-shear unified solution of Г. К. Клейн Space Earth pressure computing theory[J]. J. Xi'an Univ. of Arch. & Tech. (Natural Science Edition), 2007, 39(6): 752-755.

(编辑 沈 波)