

基于向量式结构力学的张拉整体结构可展性能研究

冯晓东^{1,2}, 戴冠鸥¹, 杨伟家¹, 撒剑波¹

(1. 绍兴文理学院 土木工程学院, 浙江 绍兴 312000; 2. 浙江大学 建筑工程学院, 浙江 杭州 310000)

摘要: 基于向量式结构力学理论提出了一种通过调节顶部拉索以实现张拉整体结构展开的驱动方式. 利用 MATLAB 编程确定结构折叠状态下的初始形态; 然后应用上述驱动方式对结构的展开路径进行跟踪研究, 并确定构件的受力情况; 最后利用 ANSYS 有限元软件对计算结果进行校核. 研究表明: 张拉整体结构的展开过程是一个从可发生有限位移的机构到结构的过程, 其展开过程可以通过该驱动方式实现, 并可通过结构线刚度矩阵的正定性判定其最终形态的稳定性; 在结构运动的过程中, 顶部拉索作为主动索在结构展开过程中起到了调控的作用, 同时拉索中的预应力也为结构提供了一定的初始刚度.

关键词: 张拉整体结构; 展开运动; 向量式结构力学; 运动轨迹

中图分类号: TU31

文献标志码: A

文章编号: 1006-7930(2021)03-0350-08

Research on developable property of tensegrity structures based on vector mechanics of structures

FENG Xiaodong^{1,2}, DAI Guanou¹, YANG Weijia¹, SA Jianbo¹

(1. College of Civil Engineering, Shaoxing University, Shaoxing 312000, China;

2. College of Architectural Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310000, China)

Abstract: In this paper, based on the theory of vector mechanics of structures, a driving method is proposed to realize the expansion of the tensioned whole structure by adjusting the top cable. Firstly, MATLAB programming was used to determine the initial shape of the structure. Then the development path of the structure is tracked and studied by using the above driving mode, and the force of the component is determined. Finally, ANSYS finite element software is used to check the calculation results. The results show that the expansion process of the tensegrity structure is a process from the mechanism with finite displacement to the structure, and the expansion process can be realized by the driving mode, and the stability of the final form can be determined by the positive character of the tangent stiffness matrix. In the process of structural movement, the top cable as the active cable plays a regulatory role in the process of structural development, and the prestress in the cable also provides certain initial stiffness for the structure.

Key words: tensegrity structure; motion of develop; vector mechanics of structures; motion trajectory

张拉整体结构(Tensegrity)是一种由一系列连续的受拉构件和一系列离散的受压构件组成的稳定的自平衡结构体系^[1-2]. 但在张拉整体概念提出之初, 由于未出现有效的分析设计理论与方法, 该结构在工程领域的应用较少, 而在建筑和艺术领域的应用较多. 直到 20 世纪 80 年代初, 工程界学者们才被这种具有独特魅力的结构体系所吸引, 并在航空航天^[3]、智能机器人^[4]和土木工程^[5]等不同学科领域取得了多样化的发展与应用. 随着张拉整体结构理论的推广, 可展结构领域中也出现

了张拉整体结构的身影. 蔡建国^[6]提出因为张拉整体结构体系拥有大变形、小应变的特点, 所以该结构体系在张拉成型的过程中将产生索杆机构运动, 并通过预应力获得刚度, 非常适合应用于可展结构. Sultan^[7]构造了与无穷小机构运动方向相切的路径, 并利用鲁棒非线性反馈控制对这些路径进行了精确跟踪, 证实了利用无穷小机构原理和非线性运动方程可运用于确定张拉整体结构的展开方式, 揭示了通过阻尼、无穷小机构、运动速度和部署时间所耗散的能量和功率之间的联系.

收稿日期: 2020-09-07

修改稿日期: 2021-04-06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51908356); 中国博士后科学基金资助项目(2019M662056); 浙江省自然科学基金资助项目(LQ19E080013)

第一作者: 冯晓东(1987—), 男, 博士, 副教授, 主要从事大跨度结构及智能结构研究. E-mail: xiaodong.feng@csu.edu.cn

彭海军^[8]和张亮^[9]在张拉整体结构的节点处设置一个轮滑,并推导了压杆和滑轮索的相关公式,建立了研究张拉整体动态特性的综合动力学模型,为研究张拉整体结构的可展性能提供了一种可行的动力学计算方式。

相比于其它传统的可展结构,张拉整体结构这种具有独特魅力的新体系依然年轻,其可展性能依然是近几年来学者们研究的热点。随着学者们的深入研究,针对张拉整体结构可展性能的计算理论日趋成熟与完善,其变形时的驱动原理和展开路径是研究的重要内容之一。肖特^[10]构建了一个新颖的圆柱形张拉整体结构,并利用外力对模型进行轴向拉伸和压缩,根据变形过程中索长度的变化趋势从而找到驱动索以实现结构的折叠和展开,论证了该结构在环形天线与空间伸展臂领域的适用性。李冰岩^[11]构建了可展开环形张拉整体天线,通过拉索之间长度的协调对结构进行展开和折叠,并对结构进行展开功能试验,验证了可展开环形张拉整体天线展开方案的可行性,通过刚度试验得到了样机在自由模态下的固有频率。罗阿妮^[12]在三杆张拉整体结构的基础上提出一种星形张拉整体可展结构,并在结构内部设置一个伸缩杆,通过伸缩杆的驱动实现结构的变形,对其工作过程和结构的折展可行性进行仿真研究和理论认证。刘贺平^[13]运用实体模型试验和数值模拟的方法对四杆张拉整体机器人的运动过程进行研究,提出在中部索长度不变的情况下,改变顶部索和底部索的长度就能驱动机器人的变形和移动。

上述工作在研究结构展开的过程中,都采用了索协调变形的方式驱动结构的展开。即结构在进行展开运动的过程中,结构的每一根索都始终参与了计算。受此启发,本文以 quadruplex 张拉整体结构单胞为基本单元,提出一种新的展开方式:在固定底部节点的情况下,改变顶部索的长度并施加预应力,驱动结构变形。在结构变形的过程中,中部索将从松弛状态转化为拉紧状态,即中部索除拉紧状态以外,其他状态下将不参与结构展开过程中的计算。最后结合商业软件 MATLAB 和 ANSYS 研究张拉整体结构基本单元的展开方法,分析结构中构件的运动路径和力学性能,促进张拉整体结构体系在实际工程中进行应用。

1 理论公式

1.1 基本假定

基于向量式结构力学的基本理论和张拉整体

结构的特点,在建立计算模型时采用以下假定:

- ①结构构件间的采用铰接的连接方式;
- ②结构中的构件均为二力杆件,但拉索单元只能承受轴向拉力;
- ③结构的外力、内力和质量均集中在节点上;
- ④不考虑自重效应。

1.2 向量式结构力学的基本理论

1.2.1 空间点的运动理论

根据向量式结构力学理论,每一个结构将被离散为一系列的空间点,并用这一系列有限数目点的位置来描述复杂的结构形式和几何状态,将结构运动变形问题转变为空间点的运动问题^[14]。此时,结构杆件受到的荷载、内力、约束、质量和运动的条件等都集中在同一个点上,并用力和点的位移来描述,而点的运动则用牛顿第二定律计算。由于张拉整体结构中空间点的自由度只有 XYZ 三个方向的平移自由度,所以空间点的运动所满足的控制方程如式(1)所示^[14]。

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{dx} \\ f_{dy} \\ f_{dz} \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中:假设结构中的某个空间点为 Q,其位置向量为 $[x \ y \ z]^T$,外力向量为 $[F_x \ F_y \ F_z]^T$,内力

$$\text{向量为 } [f_x \ f_y \ f_z]^T, \text{ 质量矩阵为 } \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix},$$

其中 M 可按式(2)^[14]计算。

$$M = m_Q + \sum_{\mu=1}^{\lambda} m_{\mu}/2 \quad (2)$$

式中: m_Q 为空间点的自身质量; λ 是与空间点 Q 连接的构件的个数; m_{μ} 是每个连接在空间点 Q 的单元的质量,分配到空间点时通常为两个空间点之间单元质量的一半。 $[f_{dx} \ f_{dy} \ f_{dz}]^T$ 是作用于空间点 Q 的阻尼力向量,该阻尼力在本例中是一个虚拟的阻尼力,目的是为了在该结构展开的过程中避免由荷载产生的振动效应的影响, Q 点的阻尼力向量满足式(3)^[14]。

$$\begin{bmatrix} f_{dx} \\ f_{dy} \\ f_{dz} \end{bmatrix} = -\xi \cdot M \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中, ξ 是虚拟的阻尼比。

1.2.2 运动方程的求解

为避免求解过程中出现复杂的迭代和结果不收敛的问题,根据向量式结构力学的理论,求解

式(1)时采用显示积分的方法进行求解^[14]. 因此空间点 Q 的加速度 \ddot{q}_n 为

$$\ddot{q}_n = \frac{(S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1}))}{t^2} \quad (4)$$

式中: S_{n+1} 、 S_n 和 S_{n-1} 分别时空间点 Q 在 $n+1$ 、 n 和 $n-1$ 时刻的位置向量; t 为计算时间.

将公式(4)和(3)代入式(1), 得位移得迭代式(5).

$$S_{n+1} = D_1 \frac{t^2}{M} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} + 2D_1 S_n - D_2 S_{n-1} \quad (5)$$

其中: $D_1 = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}\xi t)}$, $D_2 = D_1(1 - \frac{1}{2}\xi t)$

当 $n=0$ 时, 则需要第-1 时刻的位移 S_{-1} , 所以需要中央差分公式^[14]在运算起步时进行特殊的处理. 设某个空间点的初始位置向量 Q_0 , 初始速度向量为 \dot{Q}_0 , 初始外力向量和初始内力向量为 F_0 和 f_0 , 由中央差分公式得以下条件.

$$S_0 = Q_0 \quad (6)$$

$$\dot{S}_0 = \dot{Q}_0 = \frac{1}{2t}(S_1 - S_{-1}) \quad (7)$$

$$\ddot{Q}_0 = \frac{F_0 + f_0}{M} = \frac{1}{t^2}(S_1 - 2S_0 + S_{-1}) \quad (8)$$

将式(6)代入(8), 并联立式(7)和(8), 解得 S_1 和 S_{-1} :

$$S_{-1} = Q_0 - t\dot{Q}_0 + \frac{1}{2}t^2\ddot{Q}_0 \quad (9)$$

$$S_1 = Q_0 + t\dot{Q}_0 + \frac{1}{2}t^2\ddot{Q}_0 \quad (10)$$

所以, 将式(9)和(3)代入方程式(5)得:

当 $n>0$ 时:

$$S_{-1} = Q_0 - t(1 + \frac{1}{2}\xi t)\dot{Q}_0 + \frac{t^2}{2M}(F_0 + f_0) \quad (11)$$

$$S_1 = Q_0 + t(1 - \frac{1}{2}\xi t)\dot{Q}_0 + \frac{t^2}{2M}(F_0 + f_0) \quad (12)$$

当 $n>1$ 时, 方程式为式(5).

1.2.3 空间点的外力和内力

基于向量式结构力学的基本理论^[14], 当任意方向的力 F_r 作用于空间点 Q 时沿着坐标轴方向的等效力分量为

$$F_x = F_r \cdot e_x \quad (13)$$

$$F_y = F_r \cdot e_y \quad (14)$$

$$F_z = F_r \cdot e_z \quad (15)$$

式中, e_x 、 e_y 和 e_z 为空间点 Q 域坐标 (x, y, z) 下的基底向量.

假设杆系构件 G 的内力由构件长度的变化产生, 即只有拉力和压力. 假设空间点 Q 与空间点 W 之间由杆系构件 G 连接, 则杆系构件 G 的内力集中在空间点 Q 为^[14]:

$$f_x = f_r \cdot i_x \quad (16)$$

$$f_y = f_r \cdot i_y \quad (17)$$

$$f_z = f_r \cdot i_z \quad (18)$$

式中: i_x 、 i_y 和 i_z 为杆系构件 G 的方向向量. 假设空间点 Q 与空间点 W 的位置向量分别为 $[Q_x \ Q_y \ Q_z]^T$ 和 $[W_x \ W_y \ W_z]^T$, 则方向向量公式为^[14]:

$$i_x = \frac{|Q_x - W_x|}{L} \quad (19)$$

$$i_y = \frac{|Q_y - W_y|}{L} \quad (20)$$

$$i_z = \frac{|Q_z - W_z|}{L} \quad (21)$$

上式中, L 为杆系构件 G 的长度, 由公式(22)表示.

$$L = \sqrt{(Q_x - W_x)^2 + (Q_y - W_y)^2 + (Q_z - W_z)^2} \quad (22)$$

假设空间点 Q 与空间点 W 的初始位置向量为 $[Q_{x0} \ Q_{y0} \ Q_{z0}]^T$ 和 $[W_{x0} \ W_{y0} \ W_{z0}]^T$, 则杆系构件 G 的原长 L_0 为:

$$L_0 = \sqrt{(Q_{x0} - W_{x0})^2 + (Q_{y0} - W_{y0})^2 + (Q_{z0} - W_{z0})^2} \quad (23)$$

由材料力学的理论^[15]可知, 杆系构件 G 的拉力或压力为

$$f_r = \frac{EA(L - L_0)}{L_0} \quad (24)$$

式中, E 为弹性模量, A 为构件截面面积. 当 f_r 为正, 则为拉力; 若 f_r 为负, 则为压力.

1.2.4 中央差分步长的估算

精确的增量时间步长是中央差分计算得以稳定收敛的前提. 换言之, 当计算时间步长 t 小于临界步长 t_0 时, 持续计算所得的累积误差才可以维持在容许的范围内, 即收敛为一个较为精确的结果. 当计算时间步长 t 小于临界步长 t_0 时, 计算结果将不收敛.

然而, 构件的运动行为和参数值对临界步长的确定有直接的影响. 不同的结构对应不同的临界步长, 同一种结构不同的变量方程所要求的临界步长也不同. 因此文献^[14]中以一个刚性杆件结

构为例,推导出了临界步长的估算公式,并应用到该文献柔性结构的算例中.所以,本文的算例参考公式(25)估算临界步长为

$$t_0 \approx \frac{2L_P}{\sqrt{E/\varphi}} \quad (25)$$

式中: L_P 为连接空间点 Q 的所有构件的平均长度, φ 为构件的质量密度.

1.2.5 被动索限值的确定

对于本文的驱动方式,在张拉整体结构运动的过程中,被动索往往会受压并退出计算,其限值 F_B 由公式(26)求出.

$$F_B = f_r \quad (26)$$

$$F_{PD} = \frac{F_Z}{(q_Z \cdot L_Z) \cdot (q_B \cdot L_B)} \quad (27)$$

式(26)和(27)中, F_B 为被动索受到的压力; f_r 由式(26)计算可得; F_{PD} 是被动索是否参与下一时刻计算的判定条件; F_Z 是主动索连接的两个空间点所受到的力; q_Z 和 q_B 分别是主动索和被动索力密度的比值; L_Z 和 L_B 分别是几何稳定下,张拉整体结构中主动索和被动索的长度.在确定结构折叠形态的过程中,当 $F_B < F_{PD}$ 时,被动索继续参与下一时刻的计算;当 $F_B \geq F_{PD}$ 时,被动索不参与下一时刻的计算.

令

$$F_B = F_{PD} \quad (28)$$

联立方程(26)、(27)和(24)可得当被动索受到的压力 F_B 等于 F_{PD} 时,被动索的长度 L_{PD} 由下式表示:

$$L_{PD} = \frac{L_B(F_{PD} + EA)}{EA} \quad (29)$$

式中: E 为杨氏模量; A 为截面面积; F_B 由第一个程序输出.在结构进行展开运动的过程中,当被动所连接的两个空间点上的距离 $L_{BD} < L_{PD}$ 时,则被动索不进入下一个时刻的计算;当 $L_{BD} > L_{PD}$ 时,被动索进入下一个时刻的计算.

1.3 张拉整体结构的几何稳定性

假设一个空间网格体系有 w 根杆件和 v 个自由度,其自应力模态数为 Z_S 和独立机构位移模态数 D_m 可分别由以下公式确定^[16]:

$$Z_S = w - r_A \quad (30)$$

$$D_m = d_K v - r_A \quad (31)$$

式中: r_A 是平衡矩阵的秩, d_K 是结构的空间维数.当 $Z_S = 0$ 和 $D_m > 0$ 时,结构将转化为可发生有限位移的机构;当 $Z_S > 0$ 和 $D_m > 0$ 时,结构将变成同时拥有机构位移和自应力模态的张拉整体

结构.在分析张拉整体结构时,首先需要考察其自应力模态能否刚化其无穷小机构位移模态,同时最终的自应力模态必须满足压杆受压、拉索受拉的条件,因为拉索只具有单向的受拉刚度,无法承受压力^[17].

切线刚度矩阵 K_T 的正定性可判断张拉整体结构的稳定性,其表达式(32)所示^[18]:

$$K_T = K_E + K_G = B \operatorname{diag}\left(\frac{EA}{L_T} - q\right)B^T + I \otimes b \quad (32)$$

式中: K_E 是结构的切线刚度; K_G 是与自应力模态有关的几何刚度矩阵; E 为弹性模量; A 为构件截面面积; L_T 为杆件的原长; $I \in R^{3 \times 3}$ 为单位矩阵; \otimes 为张量积.平衡矩阵 B 和矩阵 β 由式(33)和(34)表示^[19]:

$$B = \begin{bmatrix} C^T \operatorname{diag}(Cx) \\ C^T \operatorname{diag}(Cy) \\ C^T \operatorname{diag}(Cz) \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\beta = C^T H C \quad (34)$$

其中: $H = \operatorname{diag}(q)$

式中, H 是力密度矩阵; 矩阵 q 由式(35)和(36)表示:

$$q = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_w\}^T \quad (35)$$

$$q_\delta = \frac{F_\delta}{L_{T\delta}} (\delta = 1, 2, \dots, w) \quad (36)$$

式中: $L_{T\delta}$ 为单元长度; F_δ 为单元的力.假设 φ 和 ψ ($\varphi < \psi$) 为连接构件两端的节点,则关联矩阵 C 第 γ 行的元素公式(37)表示

$$C_{(\gamma, \epsilon)} = \begin{cases} 1 & \text{if } \epsilon = \varphi \\ -1 & \text{if } \epsilon = \psi \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (37)$$

在忽略刚体位移的情况下,若切线刚度矩阵是正定的,即满足式(38)时该张拉整体结构体系是稳定的:

$$\operatorname{eig}(K_T) = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_\sigma \quad (38)$$

式中, σ 为最后一项.

2 算例分析

2.1 结构折叠形态的确定

如图1所示, Quadruplex 张拉整体结构单胞由4根压杆和12根拉索组成,沿着坐标轴 X 轴和 Y 轴方向的跨度均为10 m,高5 m.图中黑色的粗线为压杆,紫色的细线为拉索,其中拉索 bd 、 dg 、 gv 和 vb 为顶部索,拉索 da 、 gc 、 ve 和 bu 为中部索,拉索 ac 、 ce 、 eu 和 ua 为底部索.表1是该单

胞的节点坐标位置. 表 2 是 Quadruplex 单胞结构的几何、材料和力学参数.

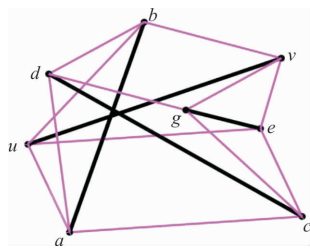


图 1 Quadruplex 张拉整体结构单胞

Fig. 1 Quadruplex tensegrity cell

表 1 Quadruplex 张拉整体结构单胞的空间点坐标

Tab. 1 The node coordinates of a single cell in a quadruplex tensegrity structure

空间点	X 坐标/mm	Y 坐标/mm	Z 坐标/mm
空间点 <i>b</i>	5 000	10 000	5 000
空间点 <i>d</i>	0	5 000	5 000
空间点 <i>e</i>	5 000	0	5 000
空间点 <i>v</i>	10 000	5 000	5 000
空间点 <i>a</i>	0	0	0
空间点 <i>c</i>	10 000	0	0
空间点 <i>g</i>	10 000	10 000	0
空间点 <i>u</i>	0	10 000	0

在折叠过程中假设空间点 *a*、*c*、*e* 和 *u* 的位置不变, 四根顶部索为主动索, 四根中部索为被动索. 为确定空间点在展开运动以前的初始位置, 假设构件的预应力为零的情况下, 对空间点 *d*、*g*、*v* 和 *b* 施加 100 kN 的节点外力, 方向沿顶部拉索的轴线方向向外, 并且当中部索的压力大于由公式(29)所求出的值时将不参与下一个时间步的计算, 并且在计算的全过程中忽略顶部索长度的变化对结构的影响(如图 2 所示).

表 2 Quadruplex 张拉整体结构单胞的结构参数

Tab. 2 Structure parameter of quadruplex tensegrity cell

项目	数值
压杆的弹性模量 E_y/GPa	206
拉索的弹性模量 E_s/GPa	195
压杆截面面积/ mm^2	16 838.94
顶部索截面面积/ mm^2	380.13
中部索截面面积/ mm^2	1 590.43
底部索截面面积/ mm^2	380.13
中部索原长/mm	7 065
顶部索的拉力/kN	100
中部索的拉力/kN	100
底部索的拉力/kN	70.711
压杆的压力/kN	-173.207

续表 2

项目	数值
顶部索力密度的比值	2
中部索力密度的比值	2
底部索力密度的比值	1
压杆力密度的比值	-2
密度/ $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$	7.85

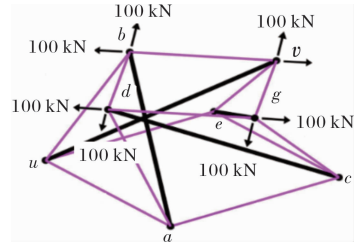


图 2 确定空间点初始位置时的计算模型

Fig. 2 The computational model for determining the initial position of the points

表 3 折叠状态下空间点的坐标

Tab. 3 The initial coordinate of the points

空间点	X 坐标/mm	Y 坐标/mm	Z 坐标/mm
空间点 <i>b</i>	-47.98	11 979.29	2 550.28
空间点 <i>d</i>	-11 979.29	-47.98	2 550.28
空间点 <i>g</i>	10 047.98	-1 979.29	2 550.28
空间点 <i>v</i>	11 979.29	10 047.98	2 550.28
空间点 <i>a</i>	0	0	0
空间点 <i>c</i>	10 000	0	0
空间点 <i>g</i>	10 000	10 000	0
空间点 <i>u</i>	0	10 000	0

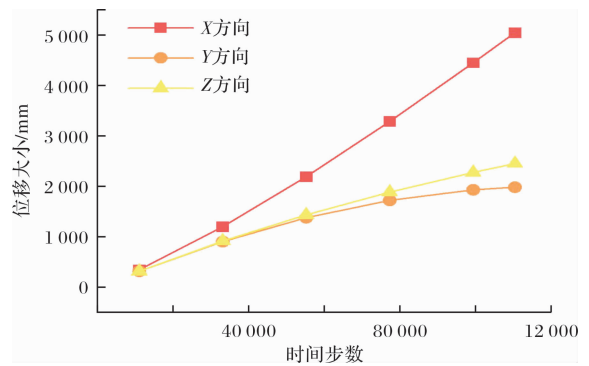


图 3 折叠时空间点 *b* 的时间步数——位移大小关系图

Fig. 3 Time steps-Displacement graph of point *b* in folding process

由图 2 可知, Quadruplex 张拉整体结构单胞是一个中心对称的结构并受到了中心对称的力和约束条件, 所以在结构展开过程中构件的运动轨迹也是中心对称. 因此本文以杆件 *ab* 为例进行分析. 由第 1 节的计算理论可知, 空间点 *b* 在展开过程中的时间步数——位移大小关系(图 3)和结构折叠

状态下空间点的坐标(表 3).

2.2 展开过程的运动分析

确定了空间点的在结构折叠状态下的坐标位置, 即确定了结构在结构折叠状态下的形态(图 4). 在展开过程中, 通过收缩顶部索的长度对结构进行驱动, 并在中部索的长度大于其原长时开始考虑中部索的拉力对空间点的影响. 在 matlab 中只需将 100 kN 的力施加到节点处, 并与被动索的方向向量相乘的方式实现.

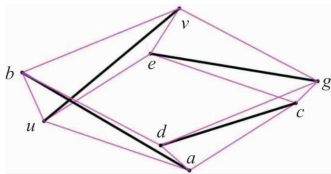


图 4 结构在折叠状态下的形态

Fig. 4 The shape of the structure in the folded state

由图 4 可知, 该结构的形态、驱动方式和约束方式沿着结构的中心对称. 所以, 在结构展开过程中构件的运动轨迹也是中心对称. 由第一节中的计算理论可知空间点 b 在的折叠过程中的时间步数与位移大小的关系并与其展开时的数据作对比(如图 5 所示), 并求出结构的展开过程(如图 6 所示)以及展开过程中构件预应力的变化过程(如图 7 所示).

由图 5 可知, 在确定该结构初始形态时, 空间点 b 的位移与该点在结构展开过程中产生的位移相等、路径相似. 所以通过 2.1 小节的方法计算空间点的初始位置和结构的初始形态是可行的.

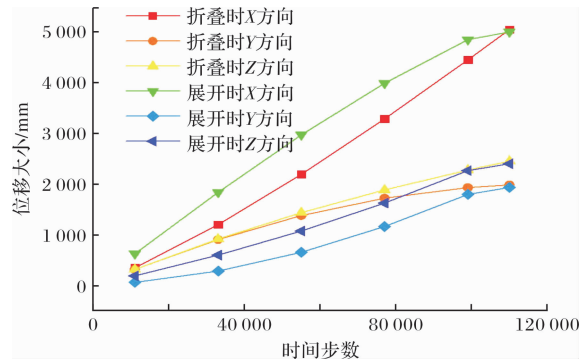


图 5 展开时空间点 b 的时间步数——位移大小关系图
Fig. 5 Time steps-Displacement graph of point b in deploying process

图 6(a)~(d)展示了该结构展开的过程, 这个过程证实 Quadruplex 张拉整体结构可以转化为可展结构, 通过收缩顶部索的长度实现结构展开. 这个过程的逆过程就是确定空间点初始位置和结构初始形态的过程.

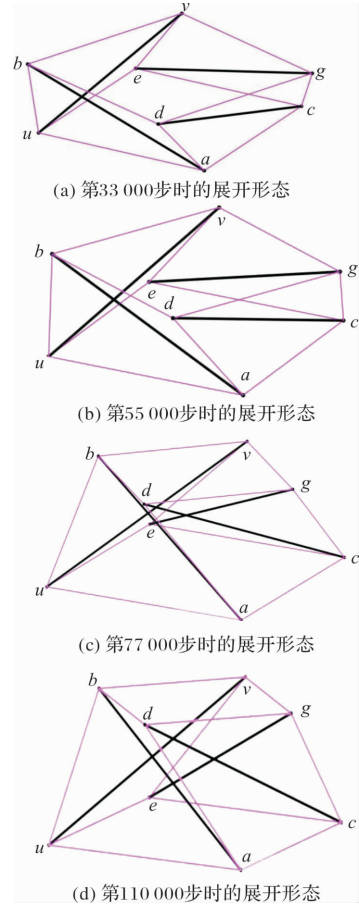


图 6 结构的展开过程

Fig. 6 Deploying process of structures

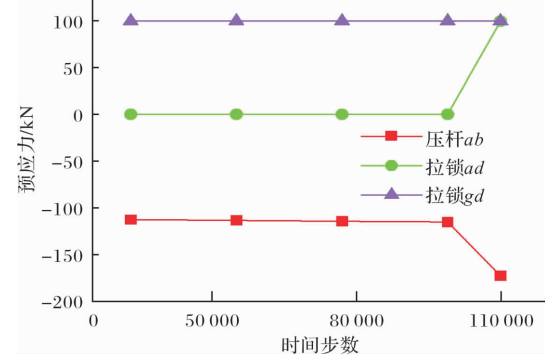


图 7 结构的展开时构件预应力的变化过程
Fig. 7 The change process of prestress of the components during the expansion of the structure

表 4 Quadruplex 张拉整体结构单胞的空间点坐标

Tab. 4 The node coordinates of a single cell in a quadruplex tensegrity structure

空间点	X 坐标/mm	Y 坐标/mm	Z 坐标/mm
空间点 b	4 954	10 048	4 948
空间点 d	-48.08	4 954	4 948
空间点 g	5 046	-48.09	4 948
空间点 v	10 048	5 046	4 948
空间点 a	0	0	0
空间点 c	10 000	0	0
空间点 e	10 000	10 000	0
空间点 u	0	10 000	0

在结构展开的过程中,当中部索的长度小于或等于式(29)所求出的长度时,结构的 $Z_s=0$ 和 $D=12>0$,此时结构变为可发生有限位移的机构;当结构运动到最终形态时,结构的 $Z_s=1>0$ 和 $D=9>0$. 在忽略刚体位移的情况下,切线刚度矩阵 K_T 的特征值如图 8 所示.

由图 8 可知,切线刚度矩阵 K_T 的特征值大于等于零且满足式(38). 所以当结构运动到最终形态时,该张拉整体结构是稳定的.

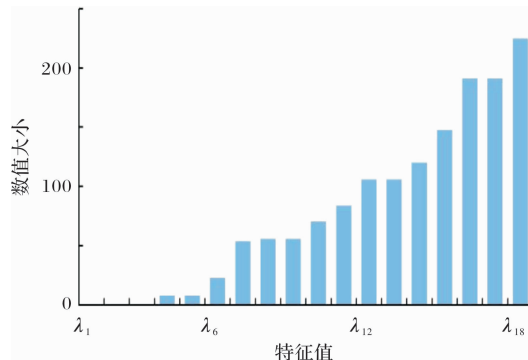


图 8 切线刚度矩阵的特征值

Fig. 8 Eigenvalues of the tangent stiffness matrix

2.3 ANSYS 软件的校核

采用通用有限元软件 ANSYS 对结构的展开过程进行动力学几何非线性分析. 前处理中采用 Link180 单元模拟结构的压杆和拉索,并利用温度荷载改变顶部索的长度从而驱动结构展开. 根据 zhang^[20] 的建议引用虚拟单元的概念释放固定节点,将有支撑预应力张拉整体结构转化为无外界支撑的自平衡结构. 计算结果如图 9 所示并与 MATLAB 的计算结果作对比(表 5).

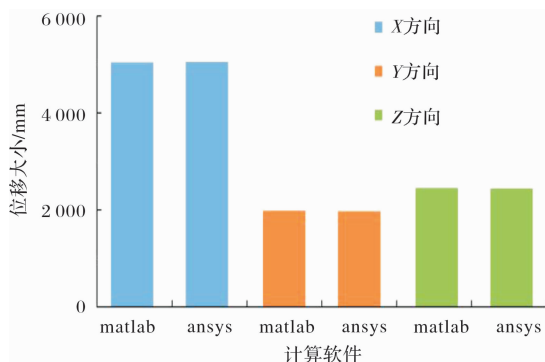


图 9 空间点 b 的位移大小

Fig. 9 Displacement of point b

由图 9 和表 5 可知,该结构经过 ANSYS 有限元软件的计算后,空间点 b 的位移大小和各个构件的预应力与 MATLAB 中的计算结果一致. 所以通过对主动索施加预应力的方式,可以驱动各个构件产生运动并获得预应力,使结构刚化成型.

表 5 构件的预应力(kN)

Tab. 5 Prestress of member /kN		
构件	MATLAB	ANSYS
顶部索 gd	100.00	99.972
中部索 ad	99.246	99.939
底部索 ac	71.238	70.710
压杆 ab	-173.20	-173.16

3 结论

本文采用固定底部节点和缩短顶部索长度的方式驱动 Quadruplex 张拉整体结构进行展开运动,并得出以下结论:

(1)由图 5 可知,该结构在折叠与展开过程中,空间点 b 的位移大小相似. 所以确定结构折叠形态的过程就是结构展开的逆过程.

(2)将底部节点设置为铰支座的情况下,通过调节顶部索长度的方式可驱动结构进行展开运动. 在运动的过程中,由于结构的 $Z_s=0$ 和 $D=12>0$,所以结构将不存在用于刚化机构位移模式的自应力模式,因此这个运动属于机构运动. 但当结构展开至最终形态时,结构的 $Z_s=1>0$ 和 $D=9>0$,即结构同时存在自应力模式和机构位移模式,并且其切线刚度矩阵是正定的,所以该结构的展开过程是一个可发生有限位移的机构转化为张拉整体结构的过程.

(3)由图 7 和表 5 可知所示,在运动结束时,结构的各个构件均获得了预应力,并经过 ANSYS 软件的计算中到了验证. 并由结构的自应力模式数、机构位移模式数和切线刚度矩阵的正定性可知,各个构件所获得的预应力可使结构刚化. 说明在驱动过程中顶部索发挥了主动索的作用,为结构中的其他构件施加了预应力.

参考文献 References

- [1] FENG Xiaodong, GUO Shaohua. A novel method of determining the sole configuration of tensegrity structures [J]. Mechanics Research Communications, 2015, 69: 66-78.
- [2] ZHANG Liyuan, ZHAO Zilong, ZHANG Qingdong, et al. Chirality induced by structural transformation in a tensegrity: theory and experiment[J]. Journal of Applied Mechanics-transactions of The Asme, 2016, 83: 1-7.
- [3] 张福,张天昊,吴明儿,等. 环向张拉弹性肋可展结构概念与初步分析[J]. 载人航天,2020,26(1):94-99.

ZHANG Fu, ZHANG Tianhao, WU Minger, et al.

- Concept and preliminary analysis of a deployable structure with circularly tensioned elastic ribs[J]. *Manned Spaceflight*, 2020, 26(1): 94-99.
- [4] 车士俊. 六杆张拉机器人变形与运动分析[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2018.
CHE Shijun. Deformation and motion analysis of six-bar tensegrity robot[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2018.
- [5] 冯晓东, 罗尧治, 丁毅, 等. 基于共旋坐标法的张拉整体结构弹塑性静力分析[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2019, 47(11): 122-129.
FENG Xiaodong, LUO Yaozhi, DING Yi, et al. Static elasto-plastic analysis of tensegrity structures based on corotational formulation[J]. *Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition)*, 2019, 47(11): 122-129.
- [6] 蔡建国. 新型可展结构形态分析与运动过程研究[D]. 南京: 东南大学, 2012.
CAI Jianguo. Shape and stress analyses and moving process research of new types of deployable structures[D]. Nanjing: Southeast University, 2012.
- [7] SULTAN Cornel. Tensegrity deployment using infinitesimal mechanisms[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, 51(21/22): 3653-3668.
- [8] KAN Ziyun, PENG Haijun, CHEN Biaoshong, et al. A sliding cable element of multibody dynamics with application to nonlinear dynamic deployment analysis of clustered tensegrity[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, 130/131: 61-79.
- [9] ZHANG Liang, GAO Qiang, LIU Yin, et al. An efficient finite element formulation for nonlinear analysis of clustered tensegrity[J]. *Engineering Computations*, 2016, 33(1): 252-273.
- [10] 肖特. 可展圆柱形张拉整体结构的构型及研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2018.
XIAO Te. The configuration and research of deployable cylindrical-type tensegrity structure[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2018.
- [11] 李冰岩. 可展开环形张拉整体天线机构设计与分析[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2015.
LI Bingyan. Design and analysis of deployable annular tensegrity antenna[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2015.
- [12] 罗阿妮, 刘贺平. 星形张拉整体可展结构分析[J]. *空间科学学报*, 2019, 39(2): 222-227.
LUO Ani, LIU Heping. Analysis for the star-tensegrity deployable structure[J]. *Chinese Journal of Space Science*, 2019, 39(2): 222-227.
- [13] LIU Heping, CHEN Hongxi, LUO Ani. Research on driving method of four-bar tensegrity mechanism[C]. //2017 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA), Japan: Takamatsu: IEEE, 2017.
- [14] 丁承先, 段元锋, 吴东岳. 向量式结构力学[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
DING Chengxian, DUAN Yuanfeng, WU Dongyue. *Vector Mechanics of Structures*[M]. Beijing: Science Press, 2012.
- [15] 孙训方. 材料力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
SUN Xunfang. *Mechanics of Materials*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2002.
- [16] PELLEGRINO S, CALLADINE C R. Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks[J]. *International Journal of Solids & Structures*, 1986, 22(4): 409-428.
- [17] 许贤. 张拉整体结构的形态理论与控制方法研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2009.
XU Xian. Morphology and control of tensegrity structures[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2009.
- [18] CALLADINE C R, Pellegrino S. First-order infinitesimal mechanisms[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1991, 27(4): 505-515.
- [19] 冯晓东, 赵容舟, 黄世荣, 等. 具有约束支撑的张拉整体结构初始找形方法[J]. *绍兴文理学院学报(自然科学)*, 2018, 38(2): 72-81.
FENG Xiaodong, ZHAO Rongzhou, HUANG Shirong, et al. Form-finding method of tensegrity structures with constrained supports[J]. *Journal of Shaoxing University*, 2018, 38(2): 72-81.
- [20] ZHANG J Y, OHSAKI M, KANNO Y. A direct approach to design of geometry and forces of tensegrity systems[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43 (7/8): 2260-2278.

(编辑 吴海西 沈 波)