

基于二次奇异值分解法的张拉整体结构找形分析

冯晓东¹, 杨伟家¹, 李 锋², 赵颖超³, 冷新中⁴

(1. 绍兴文理学院 土木工程学院, 浙江 绍兴 312000; 2. 绍兴市城投建筑工业化制造有限公司, 浙江 绍兴 312000;
3. 浙江交工集团股份有限公司, 浙江 杭州 310000; 4. 浙江省建工集团有限责任公司, 浙江 杭州 310000)

摘要:为解决给定张拉整体结构的可行力密度找形问题, 本文提出一种基于二次奇异值分解的优化设计方法. 该方法需事先根据结构的几何对称性对构件进行合理分组, 并在此基础上重组平衡矩阵. 通过奇异值分解法求解线性齐次方程组以获得满足要求的可行初始力密度. 同时引入了切线刚度矩阵特征值的计算方法来检验张拉整体结构的稳定性. 最后, 基于空间十二杆张拉整体结构不同分组的计算结果, 利用木棒和弹力绳模拟拉压单元制作模型, 验证了结构形态的合理性及本文算法的有效性.

关键词: 张拉整体结构; 力密度找形; 几何对称性; 奇异值分解

中图分类号: TU394

文献标志码: A

文章编号: 1006-7930(2021)04-0502-08

Form-finding analysis of tensegrity structure based on quadratic singular value decomposition method

FENG Xiaodong¹, YANG Weijia¹, LI Feng², ZHAO Yingchao³, LENG Xinzhong⁴

(1. School of Civil Engineering, Shaoxing University, Shaoxing 312000, China;

2. Shaoxing City Investment & Construction Industrial Manufacturing Co., Ltd, Shaoxing 312000, China;

3. Zhejiang Communications Construction Group Co., Ltd, Hangzhou 310000, China;

4. Zhejiang Construction Engineering Group Co., Ltd, Hangzhou 310000, China)

Abstract: In order to solve the form-finding problem of feasible force density for a given tensegrity structure, an optimal design method based on quadratic singular value decomposition is presented. In this method, the component groups should be reasonably divided according to the geometric symmetry of the structure, and then the balance matrix should be reorganized. The singular value decomposition method is then used to solve the linear homogeneous system of equations in seeking the feasible force density that meets the requirements. The method of calculating the eigenvalue of the tangent stiffness matrix is also introduced to check the stability of the tensegrity structure. Finally, the wooden bar and elastic rope are used to simulate the tensegrity components, and the model is assembled based on the calculation results of different groups of the 12-strut spatial tensegrity structure, verifying the rationality of the structure configuration and the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: tensegrity structure; force density form-finding; geometric symmetry; singular value decomposition

张拉整体结构是一种由连续的拉索与离散的压杆组合而成的空间索杆张力结构, 构件内力以轴力的形式存在, 可高效利用结构材料的拉压性能. 也正因这种简单的受力形式和高效的材料利用率, 使该结构的设计思想被应用于索穹顶结构^[1]. 此外, 张拉整体结构具有可折叠性, 在产生大变形位移时只产生微小应变, 因此在机器人^[2]、航天航空^[3]及生物学领域^[4]都得以广泛应用.

初始预应力为张拉整体结构提供刚度, 使其处于一种自平衡状态, 这一过程通常称之为找形. 在现有找形方法中往往以节点坐标、拓扑连接或初始预应力为变量, 并根据变量的不同划分为拓扑找形和预应力找形. 找形策略上则大多采用优化算法、动力松弛法、数值迭代法等求解手段获取张拉整体结构的初始形态. 在拓扑找形研究中, Gan^[5]利用遗传算法寻找非对称的张拉整体结构.

收稿日期: 2021-01-14

修改稿日期: 2021-07-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51908356); 浙江省自然科学基金资助项目(LQ19E080013); 中国博士后科学基金资助项目(2019M662056); 绍兴文理学院国际科技合作项目(2019LGGH1005).

第一作者: 冯晓东(1987—), 男, 博士, 副教授, 研究方向为大跨度空间结构及智能可展结构. E-mail: xiaodong.feng@csu.edu.cn

谢胜达^[6]基于小生境遗传算法对环形张拉整体结构进行拓扑优化. Yin^[7]采用直接加杆和递归加杆方式来构造简单多边形张拉整体结构. 在预应力找形研究中, 早期由陈志华^[8]提出张拉整体结构的力密度法, 可有效解决带有索元的柔性空间结构初始形态确定问题. Estrada^[9]基于力密度法以最小弹性势能为目标函数, 采用矩阵相互迭代的方式求解结构的初始力密度. Tran^[10-12]结合力密度矩阵的特征值分解和平衡矩阵的奇异值分解, 提出了一系列求解张拉整体结构初始形态的方法. 尚仁杰^[13]则通过几何作图的方式求解张拉整体结构的初始预应力大小. Wang^[14]提出一种找形计算框架, 无需考虑自应力模态就能处理满足秩亏条件的力密度矩阵. K. Koohestani^[15]提出一种基于LU分解的数值计算找形方法.

综上所述, 张拉整体结构在找形方面的研究已较为成熟, 构形简单的张拉整体结构可快速求解其初始形态, 但在求解形态复杂的张拉整体结构的问题上, 现有的方法在求解能力上略显不足. 因此, 本文将基于力密度法和矩阵分析理论, 根据结构对称性, 对构件分组归类, 通过二次奇异值分解的方式求解张拉整体结构的初始力密度, 为复杂张拉整体结构的初始形态确定提供一条新的途径. 同时本文还提出一种新型张拉整体结构构形, 采用不同分组计算该结构的初始状态, 并制作实际模型以验证该结构的合理性, 丰富了现有张拉整体结构形态的分析理论与应用实践.

1 找形算法

1.1 基本假定

本文中张拉整体结构找形计算遵循以下基本假定:

- (1) 各单元连接方式为铰接;
- (2) 不考虑自重及外部荷载;
- (3) 不考虑压杆屈曲以及材料非线性;
- (4) 不考虑结构的局部或整体失稳.

1.2 力密度法

对于任意张拉整体结构已知有 n 个自由节点、 n_f 个固定节点、 b 个单元. 根据拓扑连接关系可知其关联矩阵为 $C^{b \times n}$, 假定连接单元 k 两端节点为 i 和 j , 则关联矩阵可如下表述:

$$C_{(k,p)} = \begin{cases} 1 & \text{if } p=i \\ -1 & \text{if } p=j \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (1)$$

定义 $Q = \text{diag}(q)$, 其中, q 为构件力密度, 根据单元的受力情况可建立平衡方程:

$$\begin{aligned} C^T Q C X + C^T Q C_f^T X_f &= P_X \\ C^T Q C Y + C^T Q C_f^T Y_f &= P_Y \\ C^T Q C Z + C^T Q C_f^T Z_f &= P_Z \end{aligned} \quad (2)$$

式中, Q 为力密度矩阵; $X, Y, Z (X_f, Y_f, Z_f)$ 为结构中自有节点(固定节点)在 x, y, z 方向上的节点坐标矩阵; C_f 为固定节点的关联矩阵.

由于张拉整体结构为自平衡结构, 节点均为自由节点, 因此式(2)可转化为

$$\begin{aligned} C^T Q C X &= 0 \\ C^T Q C Y &= 0 \\ C^T Q C Z &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

再将上式简化为

$$Aq = \begin{Bmatrix} C^T \text{diag}(CX) \\ C^T \text{diag}(CY) \\ C^T \text{diag}(CZ) \end{Bmatrix} q = 0 \quad (4)$$

式中, A 为平衡矩阵.

结构的自应力模态数 s 和独立位移模态数 m 可根据平衡矩阵 A 求得:

$$s = b - r_A \quad (5)$$

$$m = dn - r_A \quad (6)$$

1.3 矩阵分析理论

对平衡矩阵 A 进行奇异值分解得

$$A = UVW^T \quad (7)$$

$$U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{dn}] \quad (8)$$

$$W = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_b] \quad (9)$$

其中 U, W 为正交矩阵, V 为由矩阵 A 的非负奇异值组成的对角矩阵. 且此时的自应力模态可分为两种情况^[16]:

(1) 自应力模态数为 $1(-b-r_A)$

在这种情况下, 正交矩阵 W 可表示为

$$W = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_{b-1} | n_1] \quad (10)$$

其中 n_1 为力密度系数向量, 满足线性齐次方程(4).

(2) 自应力模态数大于 $1(=b-r_A)$

在多自应力模态状态下, 正交矩阵可表示为

$$W = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_{r_A} | n_1 \ \dots \ n_s] \quad (11)$$

此时, 可行自应力可由向量基的线性组合表示为:

$$q = \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \dots + \alpha_s n_s \quad (12)$$

在平衡矩阵 A 的计算过程中并不考虑结构材料特性, 经奇异值分解得到的多组向量基可通过不同的线性组合, 将存在无数种可行自应力结果, 但

并非必定满足结构拉压构件关系.为解决此问题,则需事先考虑结构的拉压关系,同时结合几何对称性,将构件划分为数组别.

定义 h 为分组数量,则力密度矩阵可表示为

$$\mathbf{q} = \left\{ \underbrace{q_1 | q_1 | q_1 | \cdots | q_i | q_i | q_i | \cdots}_{\text{拉索}} \underbrace{q_j | q_j | q_j | \cdots | q_h | q_h | q_h | \cdots}_{\text{拉杆}} \right\}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & \vdots \end{bmatrix}_{(b \times h)} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_j \\ \vdots \\ q_h \end{bmatrix}_{(h \times h)} \quad (13)$$

上式可简化为

$$\mathbf{q} = \left[\underbrace{\zeta_1 \cdots \zeta_i \cdots}_{\text{拉索}} \underbrace{-\zeta_j \cdots -\zeta_h}_{\text{压杆}} \right] \left[\underbrace{q_1 \cdots q_i \cdots}_{\text{拉索}} \underbrace{q_j \cdots q_h}_{\text{压杆}} \right]^T \quad (14)$$

$$\tilde{\zeta} = [\zeta_1 \cdots \zeta_i \cdots -\zeta_j \cdots -\zeta_h] \quad (15)$$

其中: ζ_i 中第 i 个元素为 1, 矩阵内其他元素为 0;

$\tilde{\zeta}$ 为力密度拉压关系系数矩阵.

将式(12)代入式(14)得

$$\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \cdots + \alpha_s n_s + (-\zeta_1 q_1) + (-\zeta_i q_i) + \cdots + (-\zeta_j q_j) + (-\zeta_h q_h) = 0 \quad (16)$$

定义 $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{q}}$ 为:

$$\tilde{\mathbf{A}} = [n_1 \ n_2 \cdots n_s -\zeta_1 \cdots -\zeta_i \cdots -\zeta_j \cdots -\zeta_h] \quad (17)$$

$$\tilde{\mathbf{q}} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \cdots \alpha_s \ q_1 \cdots q_i \cdots q_j \cdots q_h]^T \quad (18)$$

其中 $\tilde{\mathbf{q}}$ 中所有元素均为非负数.

因此, 式(16)可以写成

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{q}} = 0 \quad (19)$$

此时, 线性齐次方程的所有解则取决于 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的零空间矩阵维数^[17].

$$\tilde{s} = s + h - r_{\tilde{\mathbf{A}}} \quad (20)$$

$$r_{\tilde{\mathbf{A}}} = \text{rank}(\tilde{\mathbf{A}}) \quad (21)$$

此处所得到的 \tilde{s} 与自应力模态数 s 均可表示为矩阵的秩亏数.

为求解式(19), 对 $\tilde{\mathbf{A}}$ 进行奇异值分解得:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{W}}^T \quad (22)$$

$$\tilde{\mathbf{W}} = [\tilde{\mathbf{W}}_1 \ \tilde{\mathbf{W}}_2 \cdots \tilde{\mathbf{W}}_{r_{\tilde{\mathbf{A}}}} | \tilde{\mathbf{q}}_{r_{\tilde{\mathbf{A}}}+1} \cdots \tilde{\mathbf{q}}_{s+h}] \quad (23)$$

其中 $\tilde{\mathbf{U}}$, $\tilde{\mathbf{W}}$ 为正交矩阵, $\tilde{\mathbf{V}}$ 为由矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的非负奇异值组成的对角矩阵. 此时的 \tilde{s} 可分为三种情况:

(1) $\tilde{s} = 0$

在该情况下, 式(19)无解, 则说明几何对称性组别划分不合理, 即该张拉整体结构在这种几何对称性下并不处于自平衡状态. 为了得到可行解, 需要增加组别划分数量以此增大秩亏值直到以下两种情况的出现.

(2) $\tilde{s} = 1$

对于 $\tilde{s} = 1$, 存在唯一解. 该组结果不仅满足结构自平衡, 而且满足结构的几何对称约束. 此时在自平衡状态下杆件均满足压杆受压、拉索受拉.

(3) $\tilde{s} > 1$

对于 $\tilde{s} > 1$, 向量基的线性组合具有无数种可能, 即多自应力模态状态. 值得注意的是, 将一个张拉整体结构划分到 $\tilde{s} = 1$ 的情况需要花费大量时间. 而对于 $\tilde{s} > 1$, 只需根据几何对称性和工程要求进行划分, 这样的划分不仅能提高设计工作的效率, 还可以有效地指导实际施工.

定义 $\chi = [\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_h]$, 表示 h 组可行自应力模态向量基系数. 分组后的自应力计算如下式表示:

$$\tilde{\mathbf{q}}_h = \left[\underbrace{q_1 \cdots q_i \cdots}_{\text{拉索}} \underbrace{q_j \cdots q_h}_{\text{压杆}} \right]^T = \chi_1 \tilde{\mathbf{q}}_1 + \chi_2 \tilde{\mathbf{q}}_2 + \cdots + \chi_h \tilde{\mathbf{q}}_h \quad (24)$$

其中, $\tilde{\mathbf{q}}_i (i=1, \cdots, h)$ 为从式(23)中 $r_{\tilde{\mathbf{A}}} + 1$ 到 $s+h$ 部分中选取 $s+1$ 至 $s+h$ 部分.

采用内点法求解线性规划问题, 并以 $\tilde{\mathbf{q}}_h$ 内所有元素大于 0 为约束条件, 力密度标准差最小为目标函数, 实现可行预应力的求解. 需要注意的是, 对于得到的各组力密度值仍需根据式(25)进行验证, 其中本文设计误差需满足 $k \leq 10^{-13}$

$$k = (\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{q}}))^T (\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{q}})) \quad (25)$$

2 稳定性判断

为保证张拉整体结构在可行自应力状态下的几何稳定, 可根据弹性刚度矩阵和几何刚度矩阵得到切线刚度矩阵^[18-19], 其中本文拉索和压杆的轴向刚度分别采用 $e_i^c a_i^c = 125 \text{ kN}$, $e_i^s a_i^s = 1\ 200 \text{ kN}$.

$$\mathbf{K}^T = \mathbf{K}^E + \mathbf{K}^G = (\mathbf{A}\mathbf{L}^{-1}) \text{diag}\left(\frac{e\mathbf{a}}{\mathbf{L}}\right) (\mathbf{A}\mathbf{L}^{-1})^T + \mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{E} \quad (26)$$

$$L=diag(\boldsymbol{I}) \tag{27}$$

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{C}^Tdiag(\boldsymbol{q})\boldsymbol{C} \tag{28}$$

式中, \boldsymbol{I} 为单元长度的矢量表达; \boldsymbol{e} 为单元杨氏模量的矢量表达; \boldsymbol{a} 为单元横截面积的矢量表达; \boldsymbol{I}_3 为三维单位矩阵; \boldsymbol{E} 为力密度矩阵; \otimes 为张量积.

若结构稳定, 则 \boldsymbol{K}^T 正定. 所以对于任意一个无穷小位移 D , 矩阵 \boldsymbol{K}^T 的二次型是正定的.

$$D^T\boldsymbol{K}^TD>0 \tag{29}$$

$$eig(\boldsymbol{K}^T)=\underbrace{[\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=\lambda_6=0]}_{\text{刚体位移}}\underbrace{\lambda_1\leqslant\lambda_2\cdots\leqslant\lambda_{dn-r_b}}_{\text{正向刚度}} \tag{30}$$

由于 \boldsymbol{K}^E 和 \boldsymbol{K}^F 处于非满秩状态, 且零空间包含刚体位移, 因此需忽略前 6 个刚体位移情况, 通过最小特征值 λ_1 反映结构的刚度强弱情况.

3 算例

本文提出一种基于立方多面体结构的新型张拉整体结构. 该结构共有 12 个节点, 每个节点均连接 6 根构件, 共有 12 根压杆(红色)和 24 根拉索(蓝色), 结构拓扑连接方式如图 1, 具体节点坐标如表 1. 通过式(4)、(5)可得到该结构的自应力模态数为 6, 属于多自应力模态结构, 因此其初始力密度存在多种可能. 采用本文所提出的找形算法求解该张拉整体结构的初始力密度, 需事先根据结构的几何对称性对构件进行分组. 分组情况的不同可能会导致初始力密度的找形结果不同.

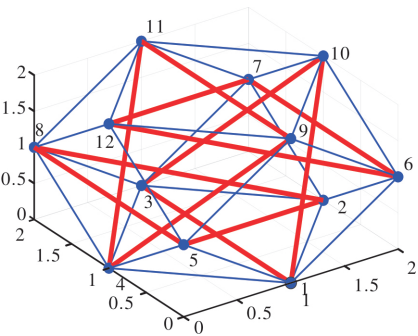


图 1 新型张拉整体结构模型

Fig. 1 The new tensegrity structure model

表 1 节点的坐标

Tab. 1 The nodal coordinates of the structure

节点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	1	2	1	0	0	2	2	0	1	2	1	0
Y	0	1	2	1	0	0	2	2	0	1	2	1
Z	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2

3.1 几何对称找形分析

根据几何对称性将索单元分为 4 组, 杆单元分为 1 组, 具体分组如图 2 所示. 经 1.3 节公式计算得 $\tilde{s}=1$, 因此可说明该结构在此对称分组状态下存在唯一初始力密度, 并与 Zhou^[20-21] 所提出的几何对称张拉整体结构找形方法求解结果一致, 如表 2, 其中设计误差 $k=1.868\ 0e^{-1}$ 满足设计要求. 但文献中所阐述的找形方法无法事先确定结构构件的拉压关系, 且找形结果单一. 而本文可根据不同的对称分组情况求解出多种初始力密度结果, 这也正是本文算法的优势所在.

在上述初始力密度作用下, 可根据式(26)考虑该结构的稳定性, 其中切向刚度矩阵特征值如表 3 所示, 从表中可以看出最小特征值为正值, 则说明结构处于稳定状态.

表 2 张拉整体结构初始力密度($h=5$)

Tab. 2 Initial force density of the tensegrity structure($h=5$)

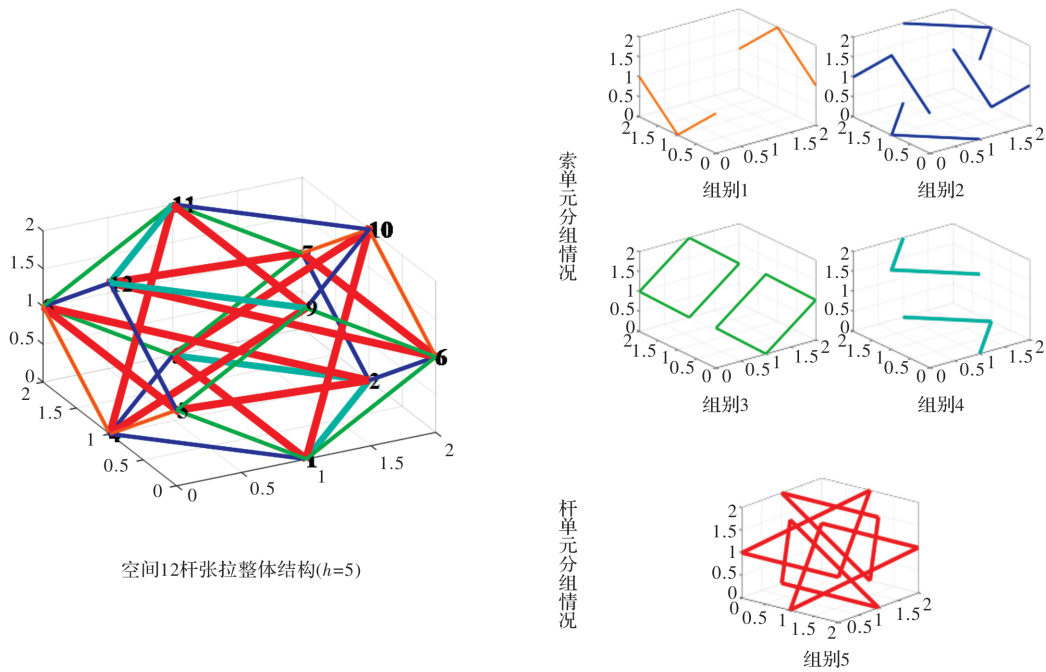
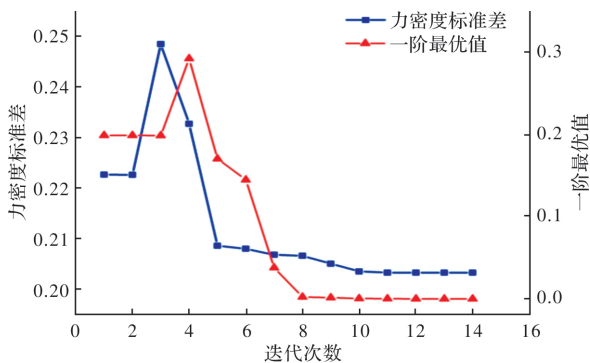
组别	单元	本文力密度值	文献[20]
组别 1	$q_1\sim q_4$	1.000 0	1.000 0
组别 2	$q_5\sim q_{12}$	0.500 0	0.500 0
组别 3	$q_{13}\sim q_{20}$	0.500 0	0.500 0
组别 4	$q_{21}\sim q_{24}$	1.000 0	1.000 0
组别 5	$q_{25}\sim q_{36}$	-0.500 0	-0.500 0

为进一步阐述本文算法优势, 展现多种初始力密度状态的求解能力, 可将空间 12 杆张拉整体结构划分为 12 组, 具体分组情况如图 4. 此时计算得到的 $\tilde{s}=2$, 则说明该分组情况下具有多种初始力密度, 因此需要以分组构件力密度标准差作为目标函数进行优化(图 3), 优化结果如表 4, 并根据式(25)求得误差值 $k=7.474\ 8e^{14}$, 满足设计要求.

表 3 12 杆张拉整体结构切线刚度矩阵特征值($h=5$)

Tab. 3 Eigenvalues of the tangent stiffness matrix of the 12-strut tensegrity structure($h=5$)

轴向刚度	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_{36}
$e_i^c a_i^c=125\text{ kN}$, $e_i^s a_i^s=1\ 200\text{ kN}$	15.657 0	42.218	81.235 6	87.204 2	87.204 2	92.051 6	1 744.493 1

图 2 空间 12 杆张拉整体结构单元分组情况($h=5$)Fig. 2 Elemental grouping of the 12-strut spatial tensegrity structure($h=5$)图 3 目标函数的迭代过程($h=12$)Fig. 3 Convergence process of the target function($h=12$)表 4 张拉整体结构初始力密度($h=12$)Tab. 4 Initial force density of the tensegrity structure($h=12$)

组别	单元	力密度	组别	单元	力密度
组别 1	$q_1 \sim q_2$	1.000	组别 7	$q_{17} \sim q_{20}$	0.4472
组别 2	$q_3 \sim q_4$	0.788 7	组别 8	$q_{21} \sim q_{22}$	0.341 5
组别 3	$q_5 \sim q_8$	0.394 3	组别 9	$q_{23} \sim q_{24}$	0.552 8
组别 4	$q_9 \sim q_{10}$	0.500 0	组别 10	$q_{25} \sim q_{28}$	-0.447 2
组别 5	$q_{11} \sim q_{12}$	0.500 0	组别 11	$q_{29} \sim q_{32}$	-0.394 3
组别 6	$q_{13} \sim q_{16}$	0.894 3	组别 12	$q_{33} \sim q_{36}$	-0.500 0

表 5 空间 12 杆张拉整体结构切线刚度矩阵特征值($h=12$)Tab. 5 Eigenvalues of the tangent stiffness matrix of the 12-struts tensegrity structure in space($h=12$)

轴向刚度	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_{36}
$e_i^T a_i^T = 125 \text{ kN}$, $e_i^T a_i^T = 1\ 200 \text{ kN}$	18.539 9	43.827 5	84.954 2	91.783 2	91.806 9	97.947 4	1 745.020 1

对比两种分组结果,由于分组的不同,最终得到的力密度值也会随之改变,从表 5 中可以看出 $h=5$ 情况下结构的切线刚度矩阵最小特征值仍为正值,因此可以保证在该力密度作用下结构仍处于稳定状态,同时对比表 3,在均满足结构稳定的条件下,12 组分组($h=12$)情况下结构所形成的刚度要略优于 5 组分组($h=5$)的结构。

现将结构分组增至 36 组,即单根构件各为一组(以不同颜色表示),如图 5。通过计算得到 $\bar{s}=6$,且与未分组时的自应力模态数 s 相同,则说明构件分组的方法并未起到减小自应力模态数的作用。但此时分组的目的是为了确保结构内部的拉压关系,进而确保计算结果满足结构杆件的拉压关系。

通过内点法优化(图 6),可以看出力密度标准差处于波动下降,在经过 60 次迭代后趋于稳定,同时一阶最优值在前 15 次迭代时已趋于 0。最终得到的初始力密度值计算设计误差为 $k=8.892\ 0\text{e}^{-14}$,具体力密度数值如表 6 所示。

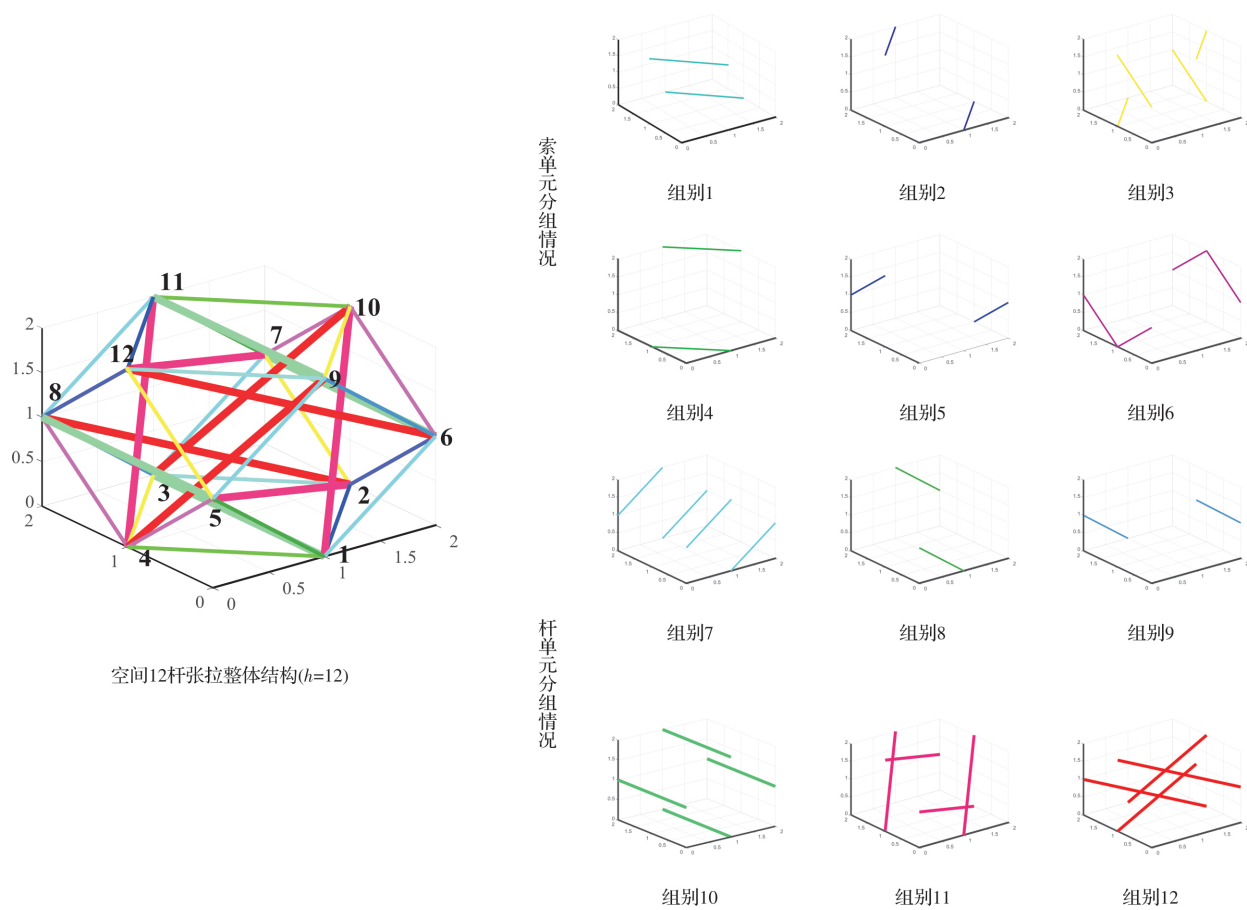


图 4 空间 12 杆张拉整体结构分组情况 ($h=12$)

Fig. 4 Elemental grouping of the 12-strut spatial tensegrity structure($h=12$)

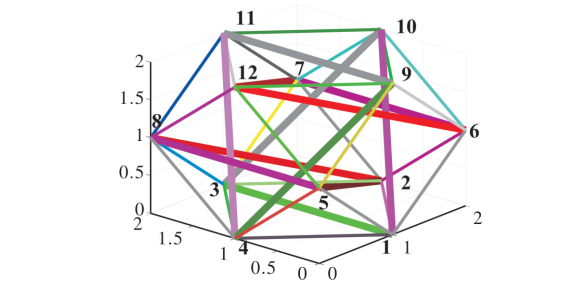


图 5 空间 12 杆张拉整体结构 ($h=36$)

Fig. 5 The 12-strut spatial tensegrity structure($h=36$)

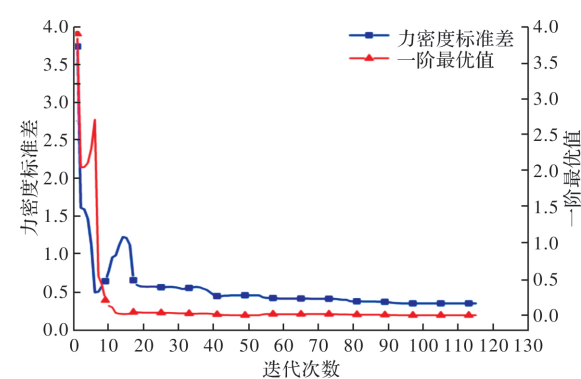


图 6 目标函数的迭代过程 ($h=36$)

Fig. 6 Convergence process of the target function($h=36$)

表 6 张拉整体结构初始力密度 ($h=36$)

Tab. 6 Initial force density of the tensegrity structure($h=36$)

单元	力密度	单元	力密度	单元	力密度	单元	力密度
q_1	1.000 0	q_{10}	1.000 0	q_{19}	1.819 0	q_{28}	-0.577 6
q_2	0.758 6	q_{11}	40.396 6	q_{20}	1.336 3	q_{29}	-0.577 7
q_3	0.638 0	q_{12}	0.638 0	q_{21}	0.698 3	q_{30}	-0.819 0
q_4	0.396 6	q_{13}	1.000 0	q_{22}	0.698 3	q_{31}	-0.577 6
q_5	1.215 6	q_{14}	0.758 7	q_{23}	0.698 3	q_{32}	-0.819 0
q_6	1.577 6	q_{15}	0.638 0	q_{24}	0.698 3	q_{33}	-0.517 3
q_7	1.577 6	q_{16}	0.396 6	q_{25}	-0.577 6	q_{34}	-0.517 3
q_8	1.215 6	q_{17}	1.457 0	q_{26}	-0.819 0	q_{35}	-0.879 3
q_9	0.758 6	q_{18}	0.974 2	q_{27}	-0.819 0	q_{36}	-0.879 3

同时需对结构进行稳定性计算, 求解得到切线刚度最小特征值为 20.4484 大于 0, 则说明结构稳定, 具体数据如表 7. 单根构件各为一组的情况同样符合非对称结构的分组求解方式. 因此, 本文算法也可适用于非对称结构的初始力密度求解.

表 7 空间 12 杆张拉整体结构切线刚度矩阵特征值($h=36$)Tab. 7 Eigenvalues of the tangent stiffness matrix of the 12-strut spatial tensegrity structure($h=36$)

轴向刚度	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_{36}
$e_i a_i^c = 125 \text{ kN}$, $e_i^s a_i^s = 1\,200 \text{ kN}$	20.448 4	44.984 7	87.645 7	95.023 0	95.214 9	102.196 7	1 745.405 3

4 张拉整体结构模型制作

由于张拉整体结构仍处于理论计算阶段,因此仍需制作模型对本文所提出的新型张拉整体结构加以验证.在模型制作过程中采用 3 mm 直径圆柱木棒为压杆,1 mm 直径弹力绳为拉索.在模型制作完成后,尝试改变弹力绳拉伸长度,用于模拟拉索上不同初始力密度的施加状态,从而进一步说明在不同初始力密度状态下,该张拉整体结构的稳定状态.

4.1 模型制作

本文所提出的新型张拉整体结构构形,由 12 根压杆与 24 根拉索组成.模型制作之前,应事先对结构尺寸进行确定.在理论模型的计算结果中,对结构构件长度进行化一处理,便可获得实际制作中的构件长度比例为 $l_1 \sim l_{24} : l_{25} \sim l_{28} : l_{29} \sim l_{36} = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$,其中, l_i 为第 i 个单元的长度.根据 $h=5$ 的计算结果,索单元力密度比例为 $q_{h_1} : q_{h_2} : q_{h_3} : q_{h_4} = 1 : 0.5 : 0.5 : 1$,其中, q_{h_i} 为第 i 组构件的力密度值.同时根据式(31)~(33)求解各个索单元的初始长度:

$$\frac{q_i l_i}{ea} = \frac{l_i - l_0^i}{l_0^i} \quad (31)$$

$$\frac{q_j l_j}{ea} = \frac{l_j - l_0^j}{l_0^j} \quad (32)$$

其中, $q_{i,j}$ 为第 i, j 个单元的力密度; $l_{i,j}$ 为第 i, j 个单元最终成形长度; $l_0^{i,j}$ 为第 i, j 个单元的初始长度; e 为弹性模量; a 为横截面积.

联立两个方程可得:

$$\frac{q_i l_i}{q_j l_j} = \frac{(l_i - l_0^i) l_0^j}{l_0^i (l_j - l_0^j)} \quad (33)$$

由于理论模型中最终索单元长度均一致,所以 $l_i = l_j$,且设置初始第 1 组索长为 10.0 cm,最终索长为 15.0 cm,根据式(33),可求解出第 2 组初始索长为 12.5 cm.而后对结构计算模型进行力学模型简化,完成初始模型制作,具体流程如下:

(1)裁剪 16 段长度为 $12.0 \pm 2 \text{ cm}$ 的弹力绳和 8 段 $10.0 \pm 2 \text{ cm}$ 的弹力绳,其中 2 cm 为预留长度,用于拉伸后的长度调节或节点绑扎固定,同时需保证拉伸后弹力绳长度均可达到 15.0 cm.再根据计算得到的最终构件长度比例,还需裁剪 4 段长度为 21.2 cm 的木棒和 8 段长度为 26.0 cm 的木棒,以及 12 段 3 cm 塑料胶管,作为节点连接套筒,具体如

图 7 所示,其中忽略木棒受压时的长度变化;

(2)可先制作 4 组由 1 根 21.2 cm 的木棒与 2 根 26.0 cm 的木棒用塑胶套筒连接形成的三角构件;

(3)根据理论模型的拓扑连接形式,利用弹力绳将 4 个三角构件连接成形.其中,索杆节点采用绑扎的方式进行固定,同时剪掉多余部分;

(4)当所有单元都已按照理论模型连接后,需测量各个拉索长度是否达到预设长度.若未达到,则需解开绑扎节点,重新调整弹力绳长度,而后重新绑扎,直至所有拉伸后的弹力绳长度达到预设长度,最终模型如图 8 所示.

当按照不同分组结果制作模型时,可根据式(33),事先假定一组构件初始长度,通过改变弹力绳的初始长度,进而改变各单元的力密度值.

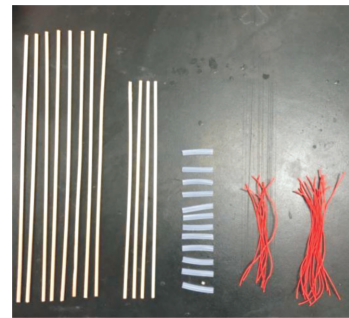


图 7 材料准备

Fig. 7 Material preparation

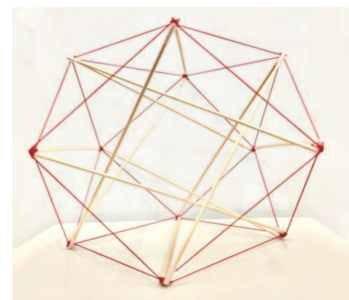


图 8 空间十二杆张拉整体结构实体模型

Fig. 8 Entity model of the 12-strut spatial tensegrity structure

5 结论

(1)本文的找形方法对几何对称张拉整体结构具有高效的求解能力,同时也适用于指定拉压构件的几何非对称张拉整体结构的初始力密度找形.

(2)本文算法将空间十二杆张拉整体结构构件分别划分为 5 组,12 组以及 36 组,以力密度标准差为目标函数,均可求解出最优初始力密度,证

实了该算法可有效求解几何对称张拉整体结构的初始力密度。

(3)基于找形结果,利用弹力线模拟拉索,木棒模拟压杆,制作空间十二杆张拉整体结构,验证了本文算法的有效性及其合理性。

参考文献 References

- [1] 陆金钰,武啸龙,赵曦蕾, et al. 基于环形张拉整体的索杆全张力穹顶结构形态分析[J]. 工程力学, 2015, 32(S1): 66-71.
LU Jinyu, WU Xiaolong, ZHAO Xilei, et al. Form finding analysis of cable-strut tensile dome based on tensegrity torus. [J]. Engineering Mechanics, 2015, 32(S1): 66-71.
- [2] LIU SB, LI Q, WANG P F, et al. Kinematic and static analysis of a novel tensegrity robot[J]. Mech Mach Theory, 2020, 149: 149-154
- [3] 路达,刘金国,高海波. 星球表面着陆巡视一体化探测机器人研究进展[J]. 航空学报, 2021(1): 93-109.
LU Da, LIU Jinguo, GAO Haibo. Integrated exploration robots for planetary surface landing and patrolling: A review[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2021(1): 93-109.
- [4] 王丽丽,陈维毅. 细胞不同铺展程度的张拉整体模型的计算分析[J]. 太原理工大学学报, 2019, 50(3): 380-385.
WANG Lili, CHEN Weiyi. Calculation analysis of tensegrity with different spreading degree of cells. [J]. Journal of Taiyuan University of Technology, 2019, 50(3): 380-385.
- [5] GAN B S, ZHANG J, NGUYEN D K, et al. Node-based genetic form-finding of irregular tensegrity structures[J]. Computers & Structures, 2015, 159: 61-73.
- [6] 谢胜达,袁行飞,马烁. 基于小生境遗传算法的新型环形张拉整体结构拓扑优化[J]. 空间结构, 2019, 25(4): 35-42.
XIE Shengda, YUAN Xingfei, MA Shuo. Topology optimization analysis of new kind of tensegrity torus based on niche genetic algorithm[J]. Spatial Structures, 2019, 25(4): 35-42.
- [7] YIN X, LI Y, ZHANG L Y, et al. Constructing various simple polygonal tensegrities by directly or recursively adding bars[J]. Composite Structures, 2020, 234: 234-239
- [8] 陈志华,王小盾,刘锡良. 张拉整体结构的力密度法找形分析[J]. 建筑结构学报, 1999(5): 29-35.
CHEN Zhihua, WANG Xiaodun, LIU Xiliang. Form-finding analysis of tensegrity structure by force density method[J]. Journal of Building Structures, 1999(5): 29-35.
- [9] ESTRADA G G, BUNGARTZ H J, Mohrdieck C. Numerical form-finding of tensegrity structures[J]. International Journal of Solids and Structures, 2006, 43(22/23): 6855-68.
- [10] TRAN H C, LEE J. Form-finding of tensegrity structures using double singular value decomposition[J]. Engineering with Computers, 2011, 29(1): 71-86.
- [11] TRAN H C, LEE J. Form-finding of tensegrity structures with multiple states of self-stress[J]. Acta Mechanica, 2011, 222(1/2): 131-47.
- [12] TRAN H C, LEE J. Self-stress design of tensegrity grid structures with exostresses [J]. International Journal of Solids and Structures, 2010, 47(20): 2660-2671.
- [13] 尚仁杰. 张拉整体三棱柱几何作图法找形与找力[J]. 力学与实践, 2019, 41(6): 718-723.
SHANG Renjie. Geometric drawing method for form-finding and force-finding for triangular prism of tensegrity[J]. Mechanics in Engineering, 2019, 41(6): 718-723.
- [14] WANG Y, XU X, LUO Y. Form-finding of tensegrity structures via rank minimization of force density matrix [J]. Engineering Structures, 2021, 227: 1-20.
- [15] KOOHESTANI K. Innovative numerical form-finding of tensegrity structures[J]. International Journal of Solids and Structures, 2020, 57: 304-313
- [16] FENG X, GUO S. A novel method of determining the sole configuration of tensegrity structures[J]. Mechanics Research Communications, 2015, 69: 66-78.
- [17] FENG X. The optimal initial self-stress design for tensegrity grid structures[J]. Computers & Structures, 2017, 193: 21-30.
- [18] ZHANG J Y, OHSAKI M. Stability conditions for tensegrity structures[J]. International Journal of Solids and Structures, 2007, 44(11-12): 3875-3886.
- [19] 张沛,冯健. 张拉整体结构的稳定性判定及刚度分析[J]. 土木工程学报, 2013, 46(10): 48-57.
ZHANG Pei, FENG Jian. Stability criterion and stiffness analysis of tensegrity structures[J]. China Civil Engineering Journal, 2013, 46(10): 48-57.
- [20] ZHOU J, CHEN W, HU J, et al. Force finding of cable-strut structures using a symmetry-based method[J]. Archive of Applied Mechanics, 2019, 89(8): 1473-84.
- [21] 冯晓东,周倩倩,章万鹏. 一种空间六杆张拉整体结构找形分析与设计[J]. 西安建筑科技大学学报(自然科学版), 2020, 52(3): 343-350.
FENG Xiaodong, ZHOU Qianqian, ZHANG Wanyong. A form finding analysis and design of a spatial six-bar tensegrity structure [J]. J. Xi'an Univ. of Arch. & Tech. (Natural Science Edition), 2020, 52(3): 343-350.

(编辑 桂智刚)