

# 基于贝叶斯理论的钢筋再生混凝土梁 受剪承载力预测模型

脱 俗<sup>1</sup>, 余 勇<sup>2</sup>, 陈文广<sup>3</sup>, 郭雄伟<sup>4</sup>, 王忠东<sup>4</sup>, 徐金俊<sup>3</sup>

(1. 东莞职业技术学院 商贸学院, 广东 东莞 523808; 2. 东莞理工学院 生态环境与建筑工程学院, 广东 东莞 523808;  
3. 南京工业大学 土木工程学院, 江苏 南京 211816; 4. 中建七局(上海)有限公司, 上海 201800)

**摘要:** 受剪承载力是开展钢筋再生混凝土结构设计和修复加固所依据的重要性能指标之一, 发展其计算理论具有较强的科学与实践意义。然而受制于有限的试验数据及再生混凝土材性离散较大等原因, 现行规范在预估此类构件受剪承载力时, 往往简单对混凝土强度进行折减, 套用普通钢筋混凝土构件的计算公式。该法通常存在精度低和稳定性差等问题。为此, 首先尝试建立包含 206 根再生混凝土无腹筋梁的抗剪试验数据库, 用以评估现存规范与经验计算公式的准确性及可靠性; 紧接着, 选定预测效果较好的 ACI318-2014 规范和学者 Zsutty 建议公式为先验模型, 基于贝叶斯统计理论对先验模型和试验信息进行统计推断, 构建起无箍筋钢筋再生混凝土梁受剪承载力计算概率模型; 随后通过未知参数的筛选剔除, 修正得到后验模型。研究结果表明: 贝叶斯方法充分融合了先验模型的完备性及大量试验数据的准确性, 能更精准地预测再生混凝土无腹筋梁的受剪强度。

**关键词:** 再生混凝土无腹筋梁; 受剪承载力; 贝叶斯模型修正

**中图分类号:** TU375.3

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1006-7930(2022)02-0242-09

## Prediction model for shear capacity of reinforced recycled aggregate concrete beam based on Bayesian theory

TUO Su<sup>1</sup>, YU Yong<sup>2</sup>, CHEN Wenguang<sup>3</sup>, GUO Xiongwei<sup>4</sup>, WANG Zhongdong<sup>4</sup>, XU Jinjun<sup>3</sup>

(1. School of Commerce and Trade, Dongguan Polytechnic, Guangdong Dongguan 523808, China;

2. School of Environment and Civil Engineering, Dongguan Univ. of Tech., Guangdong Dongguan 523808, China;

3. College of Civil Engineering, Nanjing Tech University, Nanjing 211816, China;

4. China Construction Seventh Engineering Division (Shanghai) Co., Ltd., Shanghai 201800, China)

**Abstract:** Shear capacity is one of the important performance indicators for the design and repair of reinforced recycled aggregate concrete (RAC) structures, so it is of great scientific and practical significance to develop its calculation method. At present stage, due to the shortage of test results and the high variability for the RAC's mechanical property, most specifications still applies calculation formulas of conventional concrete beam to estimate that capacity by simply reducing the RAC's strength, which usually has problems such as low accuracy and poor stability. In view of this, a shear test database containing 206 reinforced RAC beams without stirrups was first established to evaluate the accuracy and reliability of existing specifications and empirical formulas. Then, the ACI318-2014 code with good prediction effect and the formula suggested by scholar Zsutty were selected as the prior model, and the prior model and test information were statistically inferred based on Bayesian statistical theory to build the probability model for calculating shear capacity of reinforced RAC beams without stirrups. Finally, Bayesian parameter culling process was adopted to eliminate the secondary influential factors, and new predictive expressions were acquired. The results showed that the Bayesian method fully integrated the completeness of the prior model and the accuracy of a large number of test data, and could predict the reinforced RAC beam's shear strength more accurately.

**Key words:** reinforced recycled aggregate concrete beam without stirrups; shear capacity; Bayesian model updating

**收稿日期:** 2021-04-01

**修改稿日期:** 2021-04-20

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(52008108)和广东省基础与应用基础研究基金粤莞区域联合青年基金项目(2019A1515110481)

**第一作者:** 脱俗(1990—), 女, 硕士, 助教, 主要研究方向: 废旧混凝土循环利用技术。E-mail: tstuosu@foxmail.com

**通信作者:** 徐金俊(1986—), 男, 工学博士, 副教授, 主要研究方向: 现代高性能组合及混合结构。E-mail: jjxu\_concrete@njtech.edu.cn

进入新世纪后,我国建筑业的发展面临着诸多困难。一方面,建筑产业快速增长,使得其对自然资源的需求日益增加,据统计截至2020年底全国砂石消耗量已增至每年178.3亿t<sup>[1]</sup>;另一方面,新、扩建及拆除活动也产生了巨量建筑垃圾,达28.0亿t/a<sup>[2]</sup>。在此背景之下,再生混凝土因能同时缓解资源短缺与环境保护难题,吸引了土木工程领域研究及设计人员的广泛关注。

与天然骨料相比,再生骨料拥有许多独特属性<sup>[3]</sup>:(1)骨料表面总是粘附一层薄弱砂浆;(2)颗粒内部常包含一类独特的旧骨料—旧砂浆结合界面;(3)由于多级破碎,老砂浆内富含破碎裂隙;(4)骨料来源区别巨大。上述差异的存在,致使再生骨料及其拌和而成的再生混凝土材料性能发生了明显变化。同济大学肖建庄教授团队的研究结果表明,天然骨料的吸水率、颗粒密度及压碎指标常在1.0%、2600 kg/m<sup>3</sup>和9.6%附近,而再生骨料的相同物理性能指标,常在5%~15%、2300~2500 kg/m<sup>3</sup>及13.5%~20%区间浮动,后者颗粒品质明显改变、离散变异性更强<sup>[4]</sup>。葡萄牙学者 Brito 的试验也发现,相比于同配合比的天然骨料混凝土,粗骨料取代率为100%时,再生混凝土的抗压强度、弹性模量和劈拉强度分别平均下降了13.5%、27.5%和19.5%,而氯离子扩散系数及收缩系数则相应增加了22.0%和39.8%<sup>[5-7]</sup>,这些结果都预示着再生混凝土的力学及耐久性能发生了一定退化。当然,再生骨料的使用,也偶尔会提升混凝土的一部分品质。吴波等学者的近期试验结果表明,掺入再生骨料,会使得混凝土制品的高温爆裂频次显著降低,其主要是因为再生骨料上粘附着砂浆,使得高温蒸汽的疏散通道增多,混凝土内部蒸汽压力有效减小<sup>[8]</sup>。

本文在此聚焦于钢筋再生混凝土梁的抗剪能力。众所周知,传统钢筋混凝土构件在受到外部剪力作用时,其抗力主要由压区混凝土的拱效应、已开裂混凝土的牵引力、粗骨料咬合作用、纵筋销栓作用及箍筋抗力五部分贡献<sup>[9]</sup>。但因传力机理过于复杂及抗剪试验结果离散性较大等原因,钢筋普通混凝土构件的受剪承载力计算理论至今尚未被准确建立<sup>[10]</sup>。再生粗骨料的掺入,无疑进一步复杂化了这类构件的抗剪失效机理,这是因为:(1)再生骨料产地高度随机,颗粒表面粘附着大量

砂浆,导致混凝土拉、压力学性能及弯剪斜裂缝上骨料咬合作用均发生明显改变;(2)现存研究结果表明,再生混凝土与钢筋的粘结能力已发生了改变,由此可推断纵筋销栓作用和箍筋抗力也可能产生一定变动。然而,现存多数研究在预测钢筋再生混凝土梁的受剪承载力时,仍使用传统钢筋混凝土梁的计算式,仅简单采用一定系数折减混凝土的力学性能指标,用以“确保”构件受力安全。由此可见,钢筋再生混凝土梁的抗剪承载力计算模型研究尚待进一步加强。

为此,本文尝试采用贝叶斯理论及其推断建立此类问题的精准计算式。贝叶斯理论的实质在于用样本信息更新先验经检,进而得到信息的后验分布<sup>[11]</sup>。贝叶斯理论及其推断在土木工程领域已有了一些尝试,并取得了丰硕成果,如利用其解决混凝土耐久性<sup>[12]</sup>、结构抗震性能<sup>[13]</sup>与FRP约束混凝土极限压应变<sup>[14]</sup>问题。同样地,将钢筋再生混凝土的抗剪承载力预测科学问题与贝叶斯理论结合,采用已有模型和广泛收集的试验数据作为先验信息,对模型进行基于贝叶斯理论的更新修正,以此得到后验分布,其可解决现有模型预测准确度不高的问题。

## 1 贝叶斯理论及其统计推断

### 1.1 贝叶斯定理

古典概率理论中,对连续型随机变量 $\theta$ 与 $x$ ,依乘法法则可导出,

$$f(\theta, x) = f(\theta | x)f(x) = f(x | \theta)f(\theta) \quad (1)$$

式中: $f(\theta, x)$ 称为联合概率密度; $f(\theta | x)$ 与 $f(x | \theta)$ 为条件概率密度; $f(\theta)$ 及 $f(x)$ 称为边缘概率密度。对式(1)进行变形可得

$$f(\theta | x) = \frac{f(\theta)f(x | \theta)}{f(x)} \propto f(\theta)f(x | \theta) \quad (2)$$

上式即为贝叶斯概率理论的奠基公式—贝叶斯定理。在贝叶斯定理中,等式右侧的 $f(\theta)$ 称为随机变量 $\theta$ 的先验分布, $f(x | \theta)$ 为似然函数,等式左侧的 $f(\theta | x)$ 则代表着在知道一定信息 $x$ 过后变量 $\theta$ 的更新后验分布。

真实观察试验中,先验信息 $y$ 可能在不同时刻被收集。为此,可进一步导出经不同时刻信息序列 $\{x(k)\}$ 修正过后,随机变量 $\theta$ 的后验分布 $f(\theta | x(k))$ 为

$$f(\theta | x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(t)}) \propto \prod_{k=1}^t f(\theta)f(x^{(k)} | \theta) \quad (3)$$

通过式(3)可知, 贝叶斯理论通过对参数  $\theta$  进行估计, 进而更新先验信息与修正先验模型。

## 1.2 贝叶斯概率模型

国内外当前已有较多学者提出了钢筋普通混凝土梁的受剪承载力计算模型<sup>[15]</sup>。这些模型均可采纳为再生混凝土无腹筋梁受剪承载力预测的贝叶斯修正先验模型。后期经过完善建立(即开展观察试验)试验数据库, 并修正这些现存先验模型, 进而发展起来预测精度较高的后验模型。这一过程通常可用下述数学公式表达。

$$V(x, \Theta) = V_c(x) + \gamma(x, \theta) + \sigma\epsilon \quad (4)$$

式中:  $x$  代表控制着普通混凝土无腹筋梁受剪承载力的关键变量向量;  $\Theta = (\theta, \sigma)$  为经贝叶斯方法估计得到的模型控制变量, 其中  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p]^T$  代表着对  $x$  的修正系数;  $\sigma$  为修正模型存在的误差;  $V_c$  代表着现有无箍筋钢筋普通混凝土梁受剪承载力计算公式;  $\gamma(x, \theta)$  为偏差校正项;  $\epsilon$  为随机变量。需强调的是, 为使贝叶斯概率模型适合于已有试验结果, 应对式(4)的右侧变量选取做一定限制: (a)  $V(x, \Theta)$  的自变量应是误差  $\sigma$ ; (b) 误差  $\sigma$  必须与变量  $x$  相互独立; (c)  $\epsilon$  需服从标准正态分布。

为简化计算, 实际操作中偏差校正项  $\gamma(x, \theta)$  常用  $p$  个初等函数的线性组合近似表示<sup>[14]</sup>, 即

$$\gamma(x, \theta) = \sum_{k=1}^p \theta_k g_k(x) \quad (5)$$

式中:  $g_k(x)$  是由控制混凝土无腹筋梁受剪承载力的关键因素经简单组合得到的一些基本函数。

由贝叶斯定理得知, 后验分布  $f(\theta | x)$  (或  $f(\Theta | x)$ ) 的建立关键, 在于确定先验信息  $f(\theta)$  (或  $f(\Theta)$ ) 及似然函数  $f(x | \theta)$  (或  $f(x | \Theta)$ )。贝叶斯概率模型中一般假定变量  $(\theta, x)$  的无信息先验分布服从如下均匀分布<sup>[14]</sup>。

$$f(\theta) \propto 1, \quad \theta \in \phi \quad (6)$$

$$f(x) = 1/x, \quad x > 0 \quad (7)$$

则似然函数  $f(x | \theta)$  可表达为<sup>[14]</sup>

$$f(x | \theta) = \prod_{\text{破坏}} \left\{ \frac{1}{\sigma} \phi \left[ \frac{V_i - V_c(x_i) - \gamma(x_i, \theta)}{\sigma} \right] \right\} \times \prod_{\text{下界}} \phi \left[ -\frac{V_i - V_c(x_i) - \gamma(x_i, \theta)}{\sigma} \right] \times \prod_{\text{上界}} \phi \left[ \frac{V_i - V_c(x_i) - \gamma(x_i, \theta)}{\sigma} \right] \quad (8)$$

式中:  $\varphi(\cdot)$  为正态分布函数;  $\phi(\cdot)$  为正态分布的概率密度函数;  $V_i$  为抗剪承载力试验值;  $V_c$

( $x_i$ ) 为抗剪承载力模型预测值。

## 1.3 贝叶斯参数剔除

为使计算值与试验值偏差较小, 应剔除对整体预测结果影响不显著的  $g_k(x)$ 。由公式(4)和(5)可知

$$V - V_c(x) = \gamma(x, \theta) + \sigma\epsilon = \theta_1 g_1(x) + \theta_2 g_2(x) + \dots + \theta_k g_k(x) + \sigma\epsilon \quad (9)$$

令  $W = V - V_d$ , 可得

$$W = g(x)\theta + \sigma\epsilon \quad (10)$$

式中:

$$W = [W_1, W_2, \dots, W_n]^T \quad (11)$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & \dots & g_p(x_1) \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) & \dots & g_p(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_1(x_n) & g_2(x_n) & \dots & g_p(x_n) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p]^T \quad (13)$$

$$\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]^T \quad (14)$$

$$\epsilon = [\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n]^T \quad (15)$$

式(11)~(15)中:  $n$  为样本数。

由最小二乘法<sup>[14]</sup>可知,  $\theta' = (g(x)^T g(x))^{-1} g(x)^T W$ , 形参数  $v = n - p$ , 误差  $S_n^2 = [W - g(x)\theta']^T (W - g(x)\theta')$ 。整合式(8)和(9), 可得似然函数为

$$f(x | \theta) = \left( \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{\frac{n}{2}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [S_n^2 + (\theta - \theta')^T g(x)^T g(x) (\theta - \theta')] \right\} \quad (16)$$

由公式(6)和(7)又可知

$$f(\theta, \sigma) \propto \frac{1}{\sigma} \quad (17)$$

将式(16)和(17)代入贝叶斯定理, 可得

$$f(\theta, \sigma | W, g(x)) \propto f(x | \theta) f(\theta, \sigma) \propto \frac{1}{\sigma^{n+1}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [S_n^2 + (\theta - \theta')^T g(x)^T g(x) (\theta - \theta')] \right\} \quad (18)$$

对等式两侧  $\theta$  同时积分, 可得到标准差  $\sigma$  的后验边缘分布<sup>[14]</sup>为

$$f(\sigma | W, g(x)) = \int f(\sigma | W, g(x)) d\theta \propto \int (x | \theta) f(\theta, \sigma) d\theta \propto \int \frac{1}{\sigma^{v+1}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [S_n^2 + (\theta - \theta')^T g(x)^T g(x) (\theta - \theta')] \right\} d\theta \propto \frac{1}{\sigma^{v+1}} \exp \left\{ -\frac{S_n^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (19)$$

方差  $\sigma^2$  的后验边缘分布密度函数为

$$f(\sigma^2 \mid W, g(x)) \propto \frac{1}{\sigma^{v+2}} \exp\left\{-\frac{S_n^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (20)$$

在概率论中, 逆 Gamma 分布的定义为<sup>[14]</sup>

$$\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} = x^{-a-1} \exp\left(-\frac{\lambda}{x}\right),$$
$$x \sim IG(a, \lambda), E(x) = \frac{\lambda}{a-1} \quad (21)$$

对比式(20)和式(21), 可知  $\sigma^2$  后验分布为逆 Gamma 分布, 即  $\sigma^2 \sim IG(v/2, S_n^2/2)$ , 于是有

$$E(\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{v-2} = \frac{\sigma^2}{n-p-2} \quad (22)$$

由此, 可通过分析方差  $\sigma^2$  的变化趋势来判断修正项对再生混凝土无腹筋梁抗剪承载力的决定

程度, 进而剔除对整体预测结果影响不显著的  $g_k(x)$ , 达到参数剔除目的.

2 试验数据库建立、贝叶斯计算分析

2.1 试验数据库的建立

当前, 已有一些学者意识到了钢筋再生混凝土梁在剪力作用时受荷机理可能发生了变化, 为此开展了一系列试验探究<sup>[15]</sup>. 本文作者在此整理汇编这些宝贵试验, 并初步形成了一个再生混凝土无腹筋梁受剪承载力试验数据库. 相关信息见表 1.

表 1 再生混凝土无腹筋抗剪试验数据库汇总  
Tab. 1 Test database for steel bar reinforced RAC beams without stirrups under shear loading

文献	数量	$b \times h$ [mm×mm]	$d/\text{mm}$	$a/d$	$r$	$w/c$	$s_{\max}/\text{mm}$	$f_c/\text{MPa}$	$\rho_s/\%$	$f_y/\text{MPa}$	$v_u/\text{MPa}$
[16]	2	200×350	303	3.3	0~0.5	0.55	25	39.7~40.2	2.98	571	3.14~3.85
[17]	3	200×375	309	2.59	0~0.64	0.45	19	35.9~38.0	1.43	407	1.50~2.43
[18]	24	200×400	360	1.5~3.75	0~1	0.5	25	22.6~24.7	0.53~1.61	456~522	0.79~2.45
[19]	18	200× 250~550	201~476	1.5~3.93	0~0.74	0.45	19	38~49.1	1.00~2.46	407~425	1.10~3.11
[20]	18	300×460	407	3	0~1	0.4	25	30.0~37.2	1.27~2.71	414	0.91~1.42
[21]	12	150×230	200	3.83	0~1	0.44	19	31.2~46.4	1.34	572	1.04~1.46
[22]	10	206×300	260~267	2	0~1	0.5	20	23.2~28.3	1.85~1.90	457	0.85~1.36
[23]	3	200×300	235	4.2	0~1	0.58~0.60	31.5	33.3~37.0	4.09	560	1.95~2.26
[24]	13	150×420	388	3	0~0.75	0.50~0.54	12.5	32.2~37.6	0.79	534	0.69~0.94
[25]	6	200×300	269	2.6	0~1	0.45	20	42.8	0.75~1.31	591	1.51~1.99
[26]	9	200×250	225	1.5~3.0	0~1	0.41~0.49	20	34.5~37.5	1.79	600	1.09~3.34
[27]	6	170×300	270	1.5~4.0	0~1	0.40	25	30.6~39.6	1.11	430	1.11~3.14
[28]	13	150×300	263~272	1.0~3.0	0~1	0.57~0.60	20	23.7~31.0	2.49	357	1.44~6.39
[29]	4	120× 120~300	105~266	1.69~1.71	1.0	0.34	20	42.7	1.25	414~481	2.45~3.43
[30]	10	150×300	267	1.85	0~0.75	0.5	31.5	23.4~26.8	0.9	370	3.55~4.24
[30]	15	150×200	160	4.4	1.0	0.45~0.60	19.0	28.4~46.5	0.59~1.65	331~342	0.50~1.30
[32]	15	200~400× 350~680	300~600	2.5	0~1	0.45	25	31.8~34.9	2.85~3.02	600~651	1.05~1.26
[33]	14	400×600	525	2~5	0~1	0.44	25	29~37	1.88	433	1.96~4.11
[34]	3	100×200	180	2	0~0.5	0.45	20	29.6~31.7	1.9	560	3.50~4.81
[35]	4	200×350	300	3.3	0~1	0.55	25	41.3~42.4	2.92	500	1.40~1.73
[36]	4	200×300	260	2.3	0~1	0.46	25	32.5~42.4	1	359	2.20~3.13

从表 1 中容易看出, 各试验梁的参数基本涵盖以下信息: 混凝土圆柱体抗压强度( $f_c$ ); 粗骨料最大粒径( $s_{\max}$ ); 再生骨料取代率( $r$ ); 梁高( $h$ ); 剪跨比( $a/d$ ); 纵筋配筋率( $\rho_s$ ); 纵筋抗拉强度( $f_y$ )

及梁抗剪强度( $v_u=V_u/bd$ , 其中  $V_u$ 、 $b$  和  $d$  分别为梁极限抗剪承载力、截面宽度和有效高度). 需特别指出的是, 表 1 数据库形成过程中采用了如下筛选原则:

(1) 所有梁在弯曲荷载作用时, 必须表现出十分明显的剪切破坏特征, 梁受荷方式必须为三点或四点集中加载. 与此同时, 梁剪跨比需小于 5, 因为文献[37]的研究结果曾表明剪跨比太大的梁常发生弯曲破坏;

(2) 浇筑所用混凝土必须完整给定水灰比、再生骨料取代率及粗骨料粒径等信息;

(3) 钢筋再生混凝土梁在制作过程仅使用了再生粗骨料, 细骨料仍为天然砂;

(4) 完整给定了混凝土和纵筋等的强度信息. 当浇筑或试验条件不满足上述要求时, 梁会被人剔除.

经筛选后, 表 1 最终包含了 206 根再生混凝土无腹筋梁. 所有梁的抗压强度、剪跨比及纵筋配筋率均值分别为 32.7 MPa、2.71 和 1.81%, 均在工程运用正常范围内.

## 2.2 贝叶斯先验模型的选定

如前文所述, 目前大部分研究在预估再生混凝土无腹筋梁抗剪强度时, 一般沿袭套用传统钢筋混凝土梁的半经验半理论公式. 在这些经典理论中, 一般并不独立剥离压区混凝土拱效应、已开裂混凝土牵引力、粗骨料咬合作用及纵筋销栓作用的抗剪贡献. 以欧洲混凝土模式规范为例, 其无箍筋受弯构件抗剪强度公式源于简化修正压力场理论<sup>[37]</sup>, 即

$$v_c = \beta \sqrt{f_c} d_v / d \quad (23)$$

式中: 考虑了参数  $\beta$  影响的粗骨料颗粒尺寸、截面高度及加载剪跨比等因素对梁抗剪承载力的影响.

表 2 列举了本文收集的 8 个主流无腹筋受弯构件抗剪强度预测公式. 结合表 1 的试验数据库, 可计算得到各式在预测钢筋再生混凝土梁抗剪强度时的精度. 此处采用均方根误差 RMSE 和置信指数 CI 作为误差评判标准.

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (C_i - T_i)^2}{n}} \quad (24)$$

$$CI = \left[ 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (C_i - T_i)^2}{\sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T}_i)^2} \right] \times \left[ 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (C_i - \bar{C}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (|C_i - \bar{T}_i| + |T_i - \bar{T}_i|)^2} \right] \quad (25)$$

式(24)~(25)中:  $n$  为试验样本数;  $T$  为试验实测值;  $C$  为模型计算值;  $CI$  较传统相关系数  $R^2$  更适合作为误差评判指标的原因是其对预测结果与试验结果之间差异更敏感<sup>[14]</sup>.  $CI$  的取值范围一般为  $(-\infty, 1)$ , 当其值接近 1 时, 表明模型预测准确度更高.

表 2 最后两列展示了运用上述 8 个公式预测再生混凝土无腹筋梁抗剪强度的计算结果. 结合各模型相互之间比较可发现: (1) 现有的钢筋混凝土梁抗剪强度公式并未考虑压区混凝土拱效应、已开裂混凝土牵引力、粗骨料咬合作用及纵筋销栓作用四方面贡献, 模型都具有一定的局限性; (2) 总体来讲, 学者 Zsutty、Zhang 及 ACI318-2014 规范所建议的抗剪强度计算式具有较高预测精度, 其余模型的 RMSE 值一般偏大,  $CI$  指标也偏离 1.0 较远.

基于上述计算结果, 并考虑到学者 Bentz<sup>[37]</sup> 在预测普通混凝土无腹筋梁受剪承载力时曾指出 Zsutty 模型拥有较高精度、学者 Bazant<sup>[45]</sup> 报道 ACI 模型虽然基于经验回归但能较好描述剪跨比和尺寸效应等重要因素作用, 本文在此选定 Zsutty 及 ACI318-2014 公式为贝叶斯修正的先验模型 (Zhang 所建议公式精度较 ACI318-2014 稍高, 但形式较为复杂).

## 2.3 $g_k(x)$ 选取

从表 2 所列公式容易发现, 以往学者普遍认为参数  $f_c$ 、 $s_{\max}$ 、 $a/d$ 、 $\rho_s$  及  $h$  显著影响着无箍筋钢筋混凝土梁的抗剪承载能力. 基于此事实, 并结合再生骨料特性, 本文在此选取  $g_1(x) = \ln(e)$  为修正常数项,  $g_2(x) \sim g_8(x)$  分别为  $\ln(e^r)$ 、 $\ln(f_c)$ 、 $\ln(s_{\max})$ 、 $\ln(a/d)$ 、 $\ln(d)$ 、 $\ln(1 + \rho_s f_y)$  和  $\ln(f_y/f_c)$ , 来保证贝叶斯概率模型的可靠性及全面性.

由式(4)和(5)可得如下再生混凝土无腹筋梁抗剪承载力计算式(注: 为简化最终计算模型的数学形式, 对  $v$  和  $v_d$  进行了对数化处理), 即

$$\ln[v] - \ln[v_c(x)] = \ln[v/v_c(x)] = \gamma(x, \theta) + \alpha = \sum_{k=1}^7 \theta_k g_k(x) + \alpha \quad (26)$$

结合前述假定  $g_k(x)$  函数, 可利用贝叶斯定理对再生混凝土无腹筋梁抗剪承载能力先验模型进行修正, 计算结果列于表 3. 由该表可知,  $g_2(x)$  项的变异系数最大, 而  $g_1(y)$  项的变异系数最小.

表 2 再生混凝土无腹筋梁抗剪强度预测模型归纳

Tab. 2 Calculation models for predicting shear strength of steel bar reinforced RAC beams without stirrups

来源	预测公式	RMSE	CI
ACI318-2014 规范 <sup>[38]</sup>	$v_c = \left( 0.167 \sqrt{f_c} + 17 \rho_s \frac{d}{a} \right) \quad (a/d) \geq 2.5$	1.814	0.077
	$v_c = \left( 3.5 - 2.5 \frac{d}{a} \right) \left( 0.167 \sqrt{f_c} + 17 \rho_s \frac{d}{a} \right) \quad (a/d) < 2.5$		
GB50008-2010 规范 <sup>[39]</sup>	$v_c = \frac{1.75}{(a/d)+1} f_t \quad \frac{a}{d} = \min \left[ \max \left( \frac{a}{d}, 1.5 \right), 3.0 \right]$	1.854	0.037
JSCE No. 15 规范 <sup>[40]</sup>	$v_c = \min(1.5, \sqrt[4]{1000/d}) \times \min(1.5, \sqrt[3]{100\rho_s}) \times 0.2 \sqrt[3]{f_c} \quad d/\text{mm}$	2.070	-0.199
NZS3101-2006 规范 <sup>[41]</sup>	$v_c = (0.70 + 0.015 s_{\max}) \times \min\{1.0, \left(\frac{400}{d}\right)^{0.25} \} k \sqrt{f_c}$	1.997	-0.116
	$0.08 \leq k = 0.07 + 10\rho_s \leq 0.20 \quad d/\text{mm}$		
学者 Zsutty <sup>[42]</sup>	$v_c = 2.175 \left( f_c \rho_s \frac{d}{a} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (a/d) \geq 2.5$	1.787	0.106
	$v_c = 2.175 \left( 2.5 \frac{d}{a} \right) \left( f_c \rho_s \frac{d}{a} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (a/d) < 2.5$		
MCFT 理论 <sup>[37]</sup>	$v_c = \beta \sqrt{f_c} d_v / d$	2.101	-0.236
	$\beta = \frac{0.4}{(1+1500\epsilon_x)} \cdot \frac{1300}{(1000+s_{xe})} \quad \epsilon_x = \frac{V_c}{2E_s \rho_s b d} \left( 1 + \frac{a}{d_v} \right)$		
	$s_{xe} = d_v \times \min \left( 1.0, \frac{34}{16+s_{\max}} \right) \quad d_v = \max(0.9d, 0.72h)$		
CSCT 理论 <sup>[43]</sup>	$v_c = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{(1+120) \frac{\epsilon d}{16+s_{\max}}} \sqrt{f_c}$	1.840	0.052
	$\epsilon = \frac{V_c \left( a - \frac{d}{2} \right)}{E_s \rho_s b d (d - c/3)} \cdot \frac{0.6d - c}{d - c} \quad c = d \rho_s \frac{E_s}{E_c} \left( \sqrt{1 + \frac{2E_c}{\rho_s E_s}} - 1 \right)$		
学者 Zhang <sup>[44]</sup>	$v_c = 0.25 v_0 f_c \left( \sqrt{1 + \left( \frac{a-x}{h} \right)^2} - \frac{a-x}{h} \right) h/d$	1.814	0.078
	$v_0 = 1.512 \frac{15\rho_s + 0.58}{\sqrt{f_c}} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{h/1000}} \right) \quad h/\text{mm}$		
	$x \approx \begin{cases} 0.74(a-2h), & \frac{a}{h} \geq 2.0 \\ 0, & \frac{a}{h} < 2.0 \end{cases}$		

表 3  $g_k(x)$  计算结果的统计

Tab. 3 Statistics for the calculation results of  $g_k(x)$

函数	平均值	标准差	变异系数	函数	平均值	标准差	变异系数
$g_1(x)$	1.000	0.000	0.000	$g_5(x)$	0.949	0.310	0.327
$g_2(x)$	0.515	0.398	0.773	$g_6(x)$	5.761	0.307	0.053
$g_3(x)$	3.476	0.209	0.060	$g_7(x)$	2.140	0.428	0.200
$g_4(x)$	3.087	0.210	0.068	$g_8(x)$	2.673	0.233	0.087

2.4 贝叶斯参数剔除及公式简化

如前所述, 分别选定学者 Zsutty 及 ACI318-2014 规范所建议公式作为式(26)的先验模型  $V_c$ , 代入  $g_k(x)$  后, 一般可通过分析方差  $\sigma^2$  的变化趋势, 来剔除对整体预测精度影响不显著的  $g_k(x)$  及

其对应的  $\theta_k$ : 当  $\sigma^2$  变化微小时, 说明该  $g_k(x)$  及其对应的  $\theta_k$  对整体预测影响不显著, 应予以剔除, 并重复上述步骤; 当  $\sigma^2$  变化明显时, 说明该  $g_k(x)$  及对应的  $\theta_k$  对整体预测影响显著, 应停止参数剔除过程。

表4详细展示了以Zsutty模型和ACI318-2014规范为先验模型、 $g_1(x) \sim g_8(x)$ 为预估控制变量的贝叶斯修正计算全过程。通过系列参数剔除后,

可最终得到如下再生混凝土无腹筋梁的抗剪强度计算后验计算式,即修正的Zsutty模型及ACI318-2014规范模型为

表4 参数剔除过程  
Tab. 4 Parameter removal process

模型	概率模型参数剔除过程										贝叶斯更新后 $\theta_i$ 的后验期望值							
	步骤	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$	$g_8$	$\sigma^2$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$	$\theta_8$
Zsutty	1	O	O	O	O	O	O	O	O	0.101	2.144	-0.106	-0.152	0.843	0.112	-0.354	-0.292	-0.545
	2	O	X	O	O	O	O	O	O	0.103	2.108	—	-0.154	0.823	0.122	-0.352	-0.294	-0.533
	3	O	X	O	O	X	O	O	O	0.103	1.484	—	-0.052	0.835	—	-0.311	-0.294	-0.489
	4	O	X	O	O	X	O	X	O	0.114	4.012	—	-0.470	0.643	—	-0.353	—	-0.815
	5	O	X	O	O	X	O	X	X	0.133	-0.655	—	0.193	0.744	—	-0.376	—	—
ACI	1	O	O	O	O	O	O	O	O	0.146	2.135	-0.133	-0.400	0.634	0.055	-0.151	0.078	-0.663
	2	O	X	O	O	O	O	O	O	0.148	2.090	—	-0.402	0.609	0.068	-0.149	0.076	-0.648
	3	O	X	O	O	X	O	O	O	0.148	1.744	—	-0.346	0.616	—	-0.126	0.076	-0.624
	4	O	X	O	O	X	O	X	O	0.148	1.095	—	-0.239	0.665	—	-0.115	—	-0.540
	5	O	X	O	O	X	O	X	X	0.155	-1.995	—	0.201	0.732	—	-0.131	—	—

注:(1)表中“X”表示剔除函数项,“O”表示未剔除函数项;(2)最终选取的修正Zsutty模型中 $g_1$ 、 $g_3$ 、 $g_4$ 、 $g_6$ 和 $g_8$ 对应修正常数分别为4.01、-0.47、0.64、-0.35和-0.81;(3)最终选取的修正ACI模型中 $g_1$ 、 $g_3$ 、 $g_4$ 、 $g_6$ 和 $g_8$ 对应修正常数分别为1.09、-0.23、0.66、-0.11和-0.54。

$$\ln[v/v_{c,Zsutty}]=4.012-0.470\ln(f_c)+0.643\ln(s_{max})-0.353\ln(d)-0.815\ln(f_y/f_c) \tag{27}$$

$$\ln[v/v_{c,ACI}]=1.095-0.239\ln(f_c)+0.665\ln(s_{max})-0.115\ln(d)-0.540\ln(f_y/f_c) \tag{28}$$

从上述两式可发现,经贝叶斯统计推断过后,所得预测公式仍不显示包含粗骨料取代率,这说明造成本文收集的再生混凝土无腹筋梁抗剪强度预测偏差较大的主要原因是传统的钢筋再生骨料混凝土梁的抗剪计算模型并未被准确建立。

### 3 试验验证与讨论

图1给出了再生混凝土无腹筋梁抗剪强度的试验值与Zsutty模型、ACI318-2014规范模型及各自贝叶斯修正后验模型计算值的比较。以图1(a)为例,在Zsutty先验模型中, $V_{test}/V_{cal}$ 的平均值和变异系数分别为1.264和0.441,经贝叶斯统计修正后的Zsutty后验模型的 $V_{test}/V_{cal}$ 平均值和变异系数变化为1.058和0.353。显而易见,贝叶斯修正模型具有更高的计算精度及稳定性。

综上所述可知,相比于已有的经验模型,基于贝叶斯概率理论修正的模型计算值更接近试验实测值,偏差和随机性都会显著减小,这体现了贝叶斯统计推断在模型修正过程中的合理性与科学性。

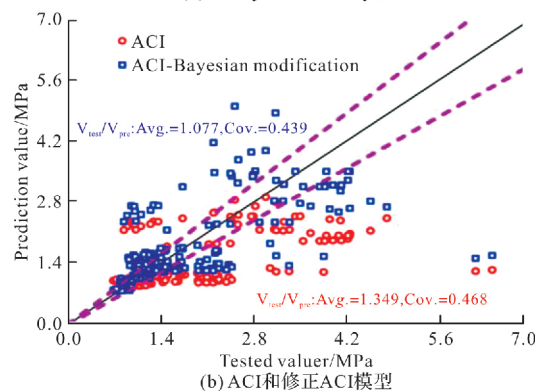
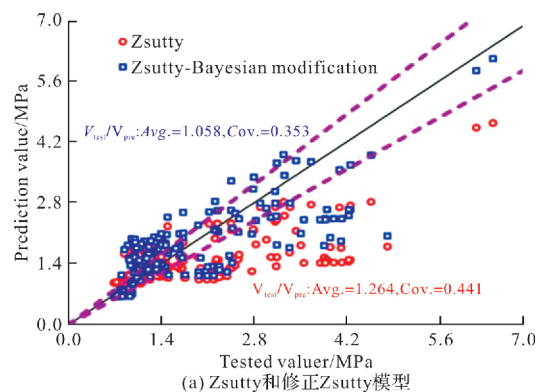


图1 模型预测精度对比

Fig. 1 Comparison of model accuracy predictive

### 4 结论

(1) 本文从既有文献中整理收集了206组再生混凝土无腹筋梁在弯曲荷载作用下的抗剪承载力试验结果,据此建立起了较为完备的试验数据库。在此基础上,对比分析了现有的8个再生混凝土无

腹筋梁抗剪承载力计算模型在运用至再生混凝土时的预测效果, 发现这些模型的预测精度普遍较差、通用性并不高, 因此很有必要发展更为合理的预测模型。综合考虑, 最终选定学者 Zsutty 及 ACI318-2014 规范所提出的两个经验模型为贝叶斯更新修正对象;

(2) 基于丰富的试验数据库和已选定的经验模型, 采用贝叶斯理论对先验信息进行统计评判, 进而构建起再生混凝土无腹筋梁的抗剪承载力计算概率模型。随后开展未知参数的筛选剔除, 最终通过引入混凝土抗压强度、界面有效高度、钢筋抗拉强度与混凝土抗压强度之比、粗骨料取代率等参数, 建立起了贝叶斯修正后验模型;

(3) 结合 206 组实测数据, 对贝叶斯修正后验模型进行评价可发现: 后验模型较先验模型在预测准度和精度上更具优势, 表明此类计算方法可以较好地应用于钢筋再生混凝土构件的抗剪性能评估。

## 参考文献 References

- [1] YU Y, ZHENG Y, GUO Y C, et al. Mesoscale finite element modeling of recycled aggregate concrete under axial tension[J]. *Construction and Building Materials*, 2021, 266, 121002,1-20.
- [2] National Bureaus of Statistics of China. China statistical yearbook[M]. Beijing: China Statistics Press, 2019.
- [3] XIE T Y, ALIAKBAR G, TOGAY O. Toward the development of sustainable concretes with recycled concrete aggregates: Comprehensive review of studies on mechanical properties[J]. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 2018, 30(9): 04018211,1-20.
- [4] XIAO J Z. Recycled aggregate concrete structures [M]. Berlin :Springer, 2018.
- [5] SILVA R V, de Brito J, DHIR R K. Tensile strength behaviour of recycled aggregate concrete [J]. *Construction and Building Materials*, 2015, 83: 108-118.
- [6] SILVA R V, de Brito J, DHIR R K. The influence of the use of recycled aggregates on the compressive strength of concrete: A review[J]. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 2015, 19(7): 825-849.
- [7] SILVA R V, de Brito J, DHIR R. K. Establishing a relationship between modulus of elasticity and compressive strength of recycled aggregate concrete[J]. *Journal of Cleaner Production*, 2016, 112: 2171-2186.
- [8] WU, B, YU, Y, ZHAO X Y. Residual mechanical properties of compound concrete containing demolished concrete lumps after exposure to high temperatures [J]. *Fire Safety Journal*, 2019, 105: 62-78.
- [9] 过镇海, 时旭东. 钢筋混凝土原理和分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
- GUO Z H, SHI X D. Reinforced concrete theory and analyse[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003.
- [10] 刘彬, 张建仁, 王磊, 等. 钢筋混凝土梁抗剪承载力计算理论综述(上)[J]. *中外公路*, 2011, 31(2): 150-158.
- LIU B, ZHANG J R, WANG L, et al. Calculation theories for reinforced concrete structures[J]. *Journal of China & Foreign Highway*, 2011, 31(2): 150-158.
- [11] 刘伯权, 刘喜, 吴涛. 基于共轭先验分布的深弯构件受剪承载力概率模型分析[J]. *工程力学*, 2015, 32(4): 169-177.
- LIU B Q, LIU X, WU T. Probabilistic shear strength model for deep flexural members based on conjugate prior distribution[J]. *Engineering Mechanics*, 2015, 32(4): 169-177.
- [12] 罗大明, 张桂涛. 基于贝叶斯理论的氯离子扩散系数计算模型[J]. *西安建筑科技大学学报*, 2019, 51(5): 710-716.
- LUO D M, ZHANG G T. Calculation model of chloride diffusion coefficient based on Bayesian theory[J]. *Xi'an Univ. of Arch. & Tech. (Natural Science Edition)*, 2019, 51(5): 710-716.
- [13] 刘佩, 袁泉, 魏庆朝. 钢筋混凝土柱恢复力模型参数识别的贝叶斯法. *华中科技大学学报*, 2013, 41(9): 72-75.
- LIU P, YUAN Q, WEI Q C. Bayesian approach for restoring force model parameter identification of reinforced concrete column[J]. *Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition)*, 2013, 41(9): 72-75.
- [14] 陈景, 李翔宇. 基于贝叶斯理论的 FRP 约束矩形混凝土柱轴压极限强度研究[J]. *复合材料科学与工程*, 2020(7): 58-67.
- CHEN J, LI X Y. Research on axial compression ultimate strength of FRP-confined rectangular concrete column based on Bayesian theory[J]. *Science and Engineering of Composite Materials*, 2020(7): 58-67.
- [15] YU Y, ZHAO X Y, XU J J, et al. Machine learning-based evaluation of shear capacity of recycled aggregate concrete beams[J]. *Materials*, 2020, 13(20): 4552,1-32.
- [16] González-Fontboa B, Martínez-Abella F. Shear strength of recycled concrete beams[J]. *Construction and Building Materials*, 2007, 21(4): 887-893.
- [17] FATHIFAZL G, RAZAQPUR A G, ISGOR O B, et al. Shear strength of reinforced recycled concrete beams with stirrups [J]. *Magazine of Concrete Research*, 2010, 62(10): 685-699.
- [18] CHOI H B, YI C, CHOI H H, et al. Experimental study on the shear strength of recycled aggregate concrete beams [J]. *Magazine of Concrete Research*, 2010, 62(2): 103-114.

- [19] FATHIFAZL G, RAZAQPUR A G, ISGOR O B, et al. Shear capacity evaluation of steel reinforced recycled concrete (RRC) beams [J]. Engineering Structures, 2011, 33(3): 1025-1033.
- [20] AREZOUMANDI M, SMITH A, VOLZ J S, et al. An experimental study on shear strength of reinforced concrete beams with 100% recycled concrete aggregate [J]. Construction and Building Materials, 2014, 53: 612-620.
- [21] KNAACK A M, KURAMA Y C. Behavior of reinforced concrete beams with recycled concrete coarse aggregates [J]. Journal of Structural Engineering, 2015, 141(3): B4014009, 2705-2716.
- [22] KATKHUDA H, SHATARAT N. Shear behavior of reinforced concrete beams using treated recycled concrete aggregate [J]. Construction and Building Materials, 2016, 125: 63-71.
- [23] Ignjatović I S, Marinković S B, Tošić N. Shear behaviour of recycled aggregate concrete beams with and without shear reinforcement [J]. Engineering Structures, 2017, 141: 386-401.
- [24] RAHAL K N, ALREFAEI Y T. Shear strength of longitudinally reinforced recycled aggregate concrete beams [J]. Engineering Structures, 2017, 145: 273-282.
- [25] PRADHAN S, KUMAR S, BARAI S V. Shear performance of recycled aggregate concrete beams: An insight for design aspects [J]. Construction and Building Materials, 2018, 178: 593-611.
- [26] WARDEH G, GHORBEL E. Shear strength of reinforced concrete beams with recycled aggregates [J]. Advances in Structural Engineering, 2019, 22(8): 1938-1951.
- [27] HAN B C, YUN H D, CHUNG S Y. Shear capacity of reinforced concrete beams made with recycled-aggregate [J]. ACI Special Publication, 2001, 200: 503-516.
- [28] ZHANG L S, ZHANG X L, YAN G X. Experimental research on the shear capacity of recycled concrete beams without stirrups [J]. Industrial Construction, 2007, 37(9): 57-61.
- [29] ZHAO J Y, YANG Q W, ZHANG Y, et al. Experimental study on shear performance of recycled concrete beams without web reinforcements [J]. Concrete, 2017, 6: 39-42.
- [30] NI T Y, SUN W, GUO Z G. Experimental study on shear behavior of recycled concrete beams without stirrup [J]. Sichuan Building Science, 2010, 36(1): 5-7.
- [31] SATO R, MARUYAMA I, SOGABE T, et al. Flexural behavior of reinforced recycled concrete beams [J]. Journal of Advanced Concrete Technology, 2007, 5(1): 43-61.
- [32] KIM S W, JEONG C Y, LEE J S, et al. Size effect in shear failure of reinforced concrete beams with recycled aggregate [J]. Journal of Asian Architecture and Building Engineering, 2013, 12(2): 323-330.
- [33] CHOI W C, YUN H D. Shear strength of reinforced recycled aggregate concrete beams without shear reinforcements [J]. Journal of Civil Engineering and Management, 2017, 23(1): 76-84.
- [34] Al-Zahraa F, El-Mihilmy M T, BAHAA T. Experimental investigation of shear strength of concrete beams with recycled concrete aggregates [J]. International Journal of Materials and Structural Integrity, 2011, 5(4): 291-310.
- [35] ETXEBERRIA M, MARÍ A R, Vázquez E. Recycled aggregate concrete as structural material [J]. Materials and Structures, 2007, 40(5): 529-541.
- [36] Ikegawa T, Saito H, Ohuchi H, et al. Flexural and shear failure tests of reinforced concrete beams with low grade recycled aggregate [J]. International Journal of Civil Engineering and Technology, 2009, 50(12): 29-36.
- [37] BENTZ E C, COLLINS M P. Updating the ACI shear design provisions [M]. Concrete International, 2017, 39: 33-37.
- [38] American Concrete Institute. Building code requirements for structural concrete: (ACI 318-14) and Commentary ACI318-2014 [S]. MI, USA: Farmington Hills, 2014.
- [39] HURD. Code for Design of Concrete Structures: GB 50010-2010 [S]. Beijing: Construction and Building Industry Press, 2010.
- [40] Japan Standardization Committee. Guidelines for concrete no. 15. standard specifications for concrete structures [M]. Tokyo, Japan: JSCE, 2007.
- [41] Standardization Commission of New Zealand. The Design of Concrete Structures: NZS 3101-2006 [S]. Wellington, New Zealand: Building Industry Authority, 2006.
- [42] ZSUTTY T C. Beam shear strength prediction by analysis of existing data [J]. ACI Journal. Proceeding, 1968, 65: 943-951.
- [43] MUTTONI A, Fernández R M. Shear strength of members without transverse reinforcement as function of critical shear crack width [J]. ACI Structure Journal, 2008, 2: 163-172.
- [44] ZHANG J P. Diagonal cracking and shear strength of reinforced concrete beams [J]. Magazine of Concrete Research, 1997, 49: 55-65.
- [45] LUO W, LE J, RASOOLINEJAD M, et al. Coefficient of variation of shear strength of RC beams and size effect [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2021, 147(2), 04020144, 1-29.