

层状地基矩形板结构系统动力响应的一种数值解法

刘俊卿, 曹书文, 周双平

(1 西安建筑科技大学理学院, 陕西 西安 710055; 2 中国京冶工程技术有限公司, 北京 100010)

摘要: 为解决矩形板在动荷载作用下的动力反应, 以矩形板和层状地基组成的系统为研究对象, 建立有限元与无限元耦合模型, 根据哈密顿原理推出系统的动力方程. 用静力凝聚法及接触面的节点位移和板中面节点位移的几何关系, 将地基反力用板中面节点位移和地基等效刚度来表示, 从而把地基反力从系统中解耦出来, 采用 Wilson 法导出系统的等效刚度矩阵和等效荷载列向量, 求解出系统在弹性阶段的动力响应. 结果表明: 应用空间有限元与无限元模型很好的解决了人工边界的不足, 使计算与实际更接近; 解决了板与地基的耦合和无限元的质量矩阵的确定的难题, 为无限元的应用提供有效的方法.

关键词: 等效刚度; 静力凝聚; 无限单元; 耦合问题; 动力响应

中图分类号: TU443

文献标志码: A

文章编号: 1006-7930(2011)02-0183-04

层状路面结构系统是工程中一种常见的路面结构形式, 有着广泛的应用. 过去的数值分析中多用有限元法, 采用了人工边界, 由于边界的人为因素, 很难真实的反映实际情况, 如果采用空间无限元和有限元来模拟地基, 就可以通过对地基位移衰减过程的描述来实现无穷远处位移为零的边界条件, 其结果和实际更接近. 无限元最早由 R. Ungless 于 1973 年提出, 后来经过 Bettess, Beer 和 Meek 等人的改进和发展, 我国学者张楚汉, 赵崇斌, 葛修润等人对无限元做了更深入的研究和应用, 大多仅限于二维单向问题. 本文建立了三维多向模型并应用于动力问题, 实践证明无限元在解决无限域问题时的优越性是十分强大的^[1-3].

1 基本理论

1.1 假设条件

板采用四节点矩形板单元^[3]来划分, 层状地基分层采用八节点实体有限元^[4]和无限元来划分, 板下地基远场和角点处用八节点单向、双向^[3]及三向映射无限元, 单元划分见图 1, 并假设板与地基是密实接触的, 不产生脱离和滑移, 并且只考虑外荷载.

1.2 基本原理

对空间 8 节点实体有限单元和无限单元, 其节点位移为 $(\delta) = \{u_i, v_i, w_i\}^T$; 对板单元, 其节点位移为 $(\delta) = \{w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}\}^T$, 按照转角的几何定义可得,

$$(\delta) = \{w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}\}^T = \left\{ w_i, \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_i, - \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_i \right\}^T \quad (1)$$

取 $w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3$, 则板底

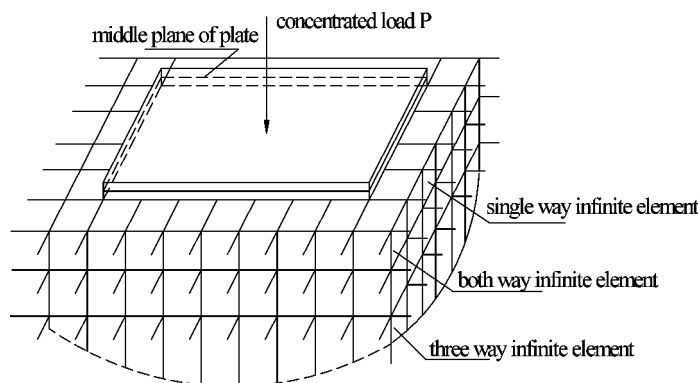


图 1 网格划分

Fig. 1 Mesh generation

面位移为 $(\delta) = \{u_i, v_i, w_i\}^T = \{\theta_{xi} \circ h/2, \theta_{yi} \circ h/2, w_i\}^T$, 和地基空间实体单元可以方便地耦合。

由文献 [6] 可以得到系统的动力平衡方程为:

$$\begin{pmatrix} m^b & 0 & 0 \\ 0 & m^{ij} & m^{if} \\ 0 & m^{fj} & m^{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\delta} \\ \ddot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c^b & 0 & 0 \\ 0 & c^{ij} & c^{if} \\ 0 & c^{fj} & c^{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{\delta} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k^b & 0 & 0 \\ 0 & k^{ij} & k^{if} \\ 0 & k^{fj} & k^{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ \delta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(t) \\ p(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

式中: $Q(t) = f(t) - p(t)$, $f(t)$ 为板上作用的已知荷载, $p(t)$ 为地基反力. $\delta, \dot{\delta}, \ddot{\delta}$ 分别为板的节点位移、板与地基接触面的节点位移和地基非接触节点的位移向量. 质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵写做与 $\delta, \dot{\delta}, \ddot{\delta}$ 相对应的分块.

展开(2)式得到:

$$m^b \ddot{\delta} + c^b \dot{\delta} + k^b \delta = f(t) - p(t) \tag{3}$$

$$m^{ij} \ddot{\delta} + m^{if} \ddot{\delta} + c^{ij} \dot{\delta} + c^{if} \dot{\delta} + k^{ij} \delta + k^{if} \delta = p(t) \tag{4}$$

$$m^{fj} \ddot{\delta} + m^{ff} \ddot{\delta} + c^{fj} \dot{\delta} + c^{ff} \dot{\delta} + k^{fj} \delta + k^{ff} \delta = 0 \tag{5}$$

根据假设条件, 板与地基密实接触, 不产生脱离和滑移, 地基与板接触处单元与板下侧单元相对应, 可以得到板中面节点位移向量和接触面地基单元节点位移向量的几何关系.

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2/h & 0 \\ 2/h & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta, \begin{pmatrix} \ddot{\delta} \\ \ddot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \ddot{\delta} \\ \ddot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2/h & 0 \\ 2/h & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

由 Wilson 直接积分法有:

$$\overline{K} \delta_{t+\theta\Delta t} = \overline{P}_{t+\theta\Delta t} \tag{7}$$

$$\overline{P}_{t+\theta\Delta t} = P_{t+\theta\Delta t} + M(a_0 \ddot{\delta} + a_2 \ddot{\delta} + 2 \ddot{\delta}) + C(a_1 \dot{\delta} + 2 \dot{\delta} + a_3 \ddot{\delta}) \tag{8}$$

(其中 $a_0 = \frac{6}{(\theta\Delta t)^2}$, $a_1 = \frac{3}{\theta\Delta t}$, $a_2 = 2a_1$, $a_3 = \frac{\theta\Delta t}{2}$, $a_4 = \frac{a_0}{\theta}$, $a_5 = -\frac{a_2}{\theta}$, $a_6 = 1 - \frac{3}{\theta}$, $a_7 = \frac{\Delta t}{2}$, $a_8 = \frac{\Delta t^2}{6}$, $\theta = 1.4$, Δt 为积分步长.)

将(3)(4)(5)式写成(7)(8)两式的形式得到:

$$\overline{K}^b \delta_{t+\theta\Delta t} = \overline{P}_{t+\theta\Delta t}^b \tag{9}$$

(其中 $\overline{K}^b = k^b + a_0 m^b + a_1 c^b$, $\overline{P}_{t+\theta\Delta t}^b = f_{t+\theta\Delta t}(t) - p_{t+\theta\Delta t}(t) + \Omega^b$, $\Omega^b = m^b(a_0 \ddot{\delta} + a_2 \ddot{\delta} + 2 \ddot{\delta}) + c^b(a_1 \dot{\delta} + 2 \dot{\delta} + a_3 \ddot{\delta})$)

$$\overline{K}^{ij} \delta_{t+\theta\Delta t} + \overline{K}^{if} \delta_{t+\theta\Delta t} = \overline{P}_{t+\theta\Delta t}(t) \tag{10}$$

(其中 $\overline{K}^{if} = k^{if} + a_0 m^{if} + a_1 c^{if}$, $\overline{P}_{t+\theta\Delta t}(t) = p_{t+\theta\Delta t}(t) + \Omega^i + \Omega^f$, $\overline{K}^{ij} = k^{ij} + a_0 m^{ij} + a_1 c^{ij}$, $\Omega^i = m^{ij}(a_0 \ddot{\delta} + a_2 \ddot{\delta} + 2 \ddot{\delta}) + c^{ij}(a_1 \dot{\delta} + 2 \dot{\delta} + a_3 \ddot{\delta})$, $\Omega^f = m^{if}(a_0 \ddot{\delta} + a_2 \ddot{\delta} + 2 \ddot{\delta}) + c^{if}(a_1 \dot{\delta} + 2 \dot{\delta} + a_3 \ddot{\delta})$)

$$\overline{K}^{fj} \delta_{t+\theta\Delta t} + \overline{K}^{ff} \delta_{t+\theta\Delta t} = \overline{P}_{t+\theta\Delta t}(t) \tag{11}$$

(其中 $\overline{K}^{fj} = k^{fj} + a_0 m^{fj} + a_1 c^{fj}$, $\overline{K}^{ff} = k^{ff} + a_0 m^{ff} + a_1 c^{ff}$, $\overline{P}_{t+\theta\Delta t}(t) = \Omega^j + \Omega^f$, $\Omega^j = m^{fj}(a_0 \ddot{\delta} + a_2 \ddot{\delta} + 2 \ddot{\delta}) + c^{fj}(a_1 \dot{\delta} + 2 \dot{\delta} + a_3 \ddot{\delta})$, $\Omega^f = m^{ff}(a_0 \ddot{\delta} + a_2 \ddot{\delta} + 2 \ddot{\delta}) + c^{ff}(a_1 \dot{\delta} + 2 \dot{\delta} + a_3 \ddot{\delta})$)

由式(5)、(6)、(7)、(8)可以导出板在 $t + \theta\Delta t$ 时刻的方程:

$$[\overline{K}^b + (\overline{K}^{ij} - \overline{K}^{if} \overline{K}^{ff-1} \overline{K}^{fj}) T] \delta_{t+\theta\Delta t} = F(t) \tag{12}$$

其中: $F(t) = f_{t+\theta\Delta t}(t) + \Omega^j + \Omega^f + \Omega - \overline{K}^{if} \overline{K}^{ff-1} (\Omega^j + \Omega^f)$

解出 $\delta_{t+\theta\Delta t}$, 联立(6)式可以得到 $\delta_{t+\theta\Delta t}$, 然后代入(11)式解出 $\delta_{t+\theta\Delta t}$.

在每一个积分步长上分别计算板节点, 地基接触面节点和地基非接触面节点的 $t + \Delta t$ 时刻的加速度, 速度, 和位移, 按 Wilson 积分法有:

$$\ddot{\delta}_{t+\Delta t} = a_4 (\delta_{t+\Delta t} - \delta) + a_5 \dot{\delta} + a_6 \ddot{\delta} \tag{13}$$

$$\dot{\delta}_{t+\Delta t} = \dot{\delta} + a_7 (\ddot{\delta} + \ddot{\delta}_{t+\Delta t}) \tag{14}$$

$$\ddot{\delta}_{t+\Delta t} = \ddot{\delta} + \Delta t v_t + a_8 (v_{t+\Delta t} + 2 \ddot{\delta})$$

(15)

可以用 Matlab^[8] 编程来实现整个迭代过程, 解出整个系统的动力响应值。

在以上的计算过程中阻尼采用瑞利阻尼, 板单元和实体有限元单元的质量矩阵很多文献都有很详细的计算方法。关于无限元的质量矩阵计算, 对每个无限单元体在其无限方向上取有限部分的土体然后按集中质量法把每个单元的质量集中到相应的节点上, 在这个范围以外认为震动已经衰减完毕, 其质量对系统不起作用。由文献[7], 对无限元中节点位置取 20~25 m 即可达到满意效果, 对于下面的算例, 在此取 20 米远的范围, 对于双向及三向无限元采用相同的方法。

2 算 例

某弹性半空间地基上的方形板的边长 $a=4\text{ m}$, 板厚 $h=0.2\text{ m}$, 材料的性质: 薄板: $E=30\text{ GPa}$, $\nu=0.167$, 密度为 $2\,550\text{ kg/m}^3$; 地基: $E=0.5\text{ GPa}$, $\nu=0.25$, 密度为 $2\,000\text{ kg/m}^3$ 。假设板与地基为密实接触。

令(1)式中的质量矩阵, 阻尼矩阵以及相对应的加速度和速度向量等于零, 则问题就退化到求解静力作用下的弹性地基板。当板中心只受集中荷载 $P=100\text{ kN}$ 时, 得到板的竖向最大挠度为 $0.176\,51\text{ mm}$, 文献[9] 采用解析法得出的结果为 $0.169\,1\text{ mm}$, 其误差为 4.3% 。

考虑层状地基, 将地基土体分为 3 层, 其弹性模量 E 、泊松比 μ 和密度 ρ 分别为: $E_1=0.5\text{ GPa}$, $\mu_1=0.25$, $\rho_1=2\,000\text{ kg/m}^3$, $E_2=0.45\text{ GPa}$, $\mu_2=0.2$, $\rho_2=2\,100\text{ kg/m}^3$, $E_3=0.55\text{ GPa}$, $\mu_3=0.27$, $\rho_3=2\,200\text{ kg/m}^3$, 板受到中心集中简谐荷载 $P=100e^{i\omega t}\text{ kN}$, 频率为 10 Hz 的动荷载, 其几何中心点的竖向最大动位移为 $0.216\,3\text{ mm}$ 。

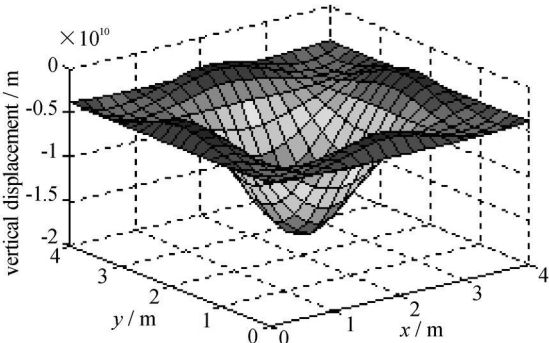


图 2 板在中心集中荷载下的竖向挠度
Fig. 2 The vertical flexibility under concentrated load of plate center

表 1 系统前 4 阶频率(Hz)
Tab. 1 First 4 order frequency (Hz)

	first order frequency	second order frequency	third order frequency	fourth order frequency
results	50.8	59.1	63.9	74.1

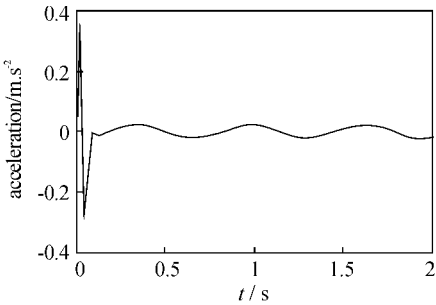
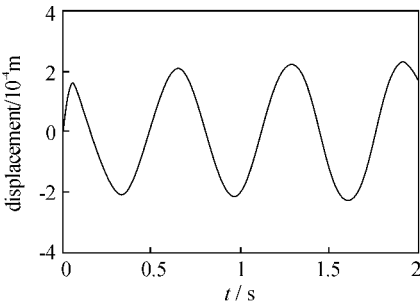


图 3 板几何中心点的竖向位移和加速度时程曲线

Fig. 3 The vertical displacement and acceleration time history curve of plate center

3 结 语

以矩形板和层状地基组成的系统为研究对象, 板单元采用四节点矩形弯曲板单元, 地基采用空间 8 节点实体有限元和无限元模拟, 对板和地基的耦合问题进行了解耦, 得到了板在动荷载作用下的位移和加速度时程曲线。

对地基的模拟采用了分层有限单元和无限单元划分, 解决了地基无穷远处位移为零的边界条件, 避

©1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

免有限元采用人工边界带来的误差,而且在相同精度下划分的单元数量比只采用有限元要少的多。

目前对路面板的设计规范中一般以静力作用为设计依据,不涉及动力问题,但是从文中的计算结果看,动力作用下的位移比静位移值大得多,且初始加速度也较大,影响不容忽视。

参考文献 References

- [1] 周世良, 胡晓, 王江. 无限元在岩土工程数值分析中的应用[J]. 重庆交通学院学报, 2004, 23(增刊): 61-64.
ZHOU Shi-liang, HU Xiao, WANG Jiang. The application of infinite element in numerical analysis of geotechnical engineering[J]. Journal of Chongqing Jiaotong University, 2004, 23(S): 61-64.
- [2] UNGLESS R F. An infinite finite element[M]. M A Sc. Thesis: University of British Columbia, 1973.
- [3] 王元汉, 李丽娟, 李银平. 有限元法基础与程序设计[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 2002.
WANG Yuan-han, LI Li-juan, LI Yin-ping. Finite element method base and programming[M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 2002.
- [4] QUEK S S, 龙述尧, 侯淑娟. 有限元法实用教程[M]. 长沙: 湖南大学出版社, 2004.
QUEK S S, LONG Shu-yao, HOU Shu-juan. Finite element method practical course[M]. Changsha: Hunan University Press, 2004.
- [5] 潘昌实. 隧道力学数学方法[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1995.
PAN Chang-shi. Tunnel mechanical mathematical method[M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1995.
- [6] Bathe K J, Wilson E L. Numerical Methods in Finite Element Analysis[M]. Prentice-Hall Inc, 1976.
- [7] 姜忻良, 徐余, 郑刚. 地下隧道-土体系地震反应分析的有限元与无限元耦合法[J]. 地震工程与工程振动, 1999, 19(3): 22-26.
JIANG Xin-liang, XU Yu, ZHENG Gang. Finite element and infinite element coupling method for seismic analysis of soil-underground tunnel system[J]. Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 1999, 19(3): 22-26.
- [8] 徐赵东, 郭迎庆. Matlab 语言在建筑抗震工程中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
XU Zhao-dong, GUO Ying-qing. The application of Matlab in building seismic engineering[M]. Beijing: Science Press, 2004.
- [9] 黄义, 何芳社. 弹性地基上的梁、板、壳[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
HUANG Yi, HE Fang-she. Beam, plate and shell on elastic foundation[M]. Beijing: Science Press, 2005.

A numerical solution to the dynamic response of layered soil pavement slab system

LIU Jun-qing¹, CAO Shu-wen¹, ZHOU Shuang-ping²

(1. School of Science, Xi'an University of Architecture & Technology, Xi'an 710055, China;

2. China Jingye Engineering Corporation Limited, Beijing 100010, China)

Abstract To solve the dynamic response of rectangle plate under dynamic load, the system composed of layered soil and rectangle plate is studied and the motion equation is deduced by the Hamilton's Principle. According to the static condensation and geometrical relationship of the nodes displacement on the contact surface and middle plane, the subgrade reaction is expressed by the nodes displacement of the middle plane and subgrade equivalent stiffness, so the subgrade reaction is decoupled out from the system. The equivalent stiffness matrix and equivalent load vector are deduced by Wilson method, and the dynamic responses in elastic step are solved. The results show that the coupling model solves the deficiency of artificial boundary condition, and the results agree with reality. The coupling problem of plate and foundation and the mass matrix of infinite element are solved, providing effective method for the application of infinite element.

Key words equivalent stiffness, static condensation, infinite element, coupling problem, dynamic response