

# 刚体位移的补充方法及对壳单元有限元解的影响分析

黄 义<sup>1,2</sup>, 淡 勇<sup>1,3</sup>, 李 华<sup>2</sup>

(1. 西安建筑科技大学土木工程学院, 陕西 西安 710055; 2. 西安建筑科技大学理学院, 陕西 西安 710055; 3. 西北大学化工学院, 陕西 西安 710069)

**摘 要:** 精度和收敛问题是有限元分析研究的重点和热点, 而刚体位移对壳单元有限元解的精度和收敛性有着显著影响, 但学者对位移对壳单元有限元解的精度和收敛性的影响作用有不同的观点, 本文给出了在等参壳单元有限元分析中补充刚体位移的又一方法, 并通过算例分析说明了刚体位移对壳单元解收敛性和精度的影响. 结果表明刚体位移对壳单元解的收敛性影响明显, 不容忽视.

**关键词:** 刚体位移; 壳单元; 有限元

中图分类号: O 242 2

文献标志码: A

文章编号: 1006-7930(2011)03-0305-04

精度和收敛问题是有限元分析研究的重要课题<sup>[1]</sup>, 长期以来, 在壳单元研究中, 刚体位移对有限元解的精度和收敛性影响受到广大学者的关注. 有限元单元的完备性要求位移函数中包含不产生应变的刚体位移, 这是解答的必要条件. 曲线坐标系上的壳单元, 刚体位移呈三角函数  $\sin\varphi$ 、 $\cos\varphi$  的形式存在, 通常采用多项式插值时, 试探函数中未能明确包含刚体位移. 若以 Taylor 展开式表示三角函数, 可认为多项式插值的试探函数隐含刚体位移. 一般情况下, 面内位移  $u$ 、 $v$  只用线性插值, 而法向位移  $w$  采用较高次数的多项式作为试探函数, 这样隐含的刚体位移只有一次近似. 考虑刚体位移而使  $u$ 、 $v$ 、 $w$  具有相同次数的试探函数, 这样构造的柱壳单元<sup>[2]</sup>, 精度高且收敛性好. 多项式不能完整地包含壳体的刚体位移, 在位移模式中补充完整的刚体位移是很好的方法<sup>[3]</sup>. 也可在试探函数中直接包含刚体位移, 仍可获得较好的精度. 例如, 应变单元<sup>[4]</sup>其试探函数是由壳体的几何方程直接导出的, 由刚体位移和变形位移两部分组成. 本文通过在等参壳单元分析中补充刚体位移, 经过算例分析说明刚体位移对解的精度和收敛性的影响.

## 1 刚体位移的补充方法

本文以等参变换的 20 自由度柱壳单元来讨论刚体位移的补充方法. 四边形柱壳单元(图 1)的节点位移向量为:

$$\{\delta\} = \left\{ u_i \ v_i \ w_i \ \frac{\partial w_i}{\partial \xi} \ \frac{\partial w_i}{\partial \eta} \right\}^T$$

形成位移场时, 面内位移  $u$ 、 $v$  采用 Lagrange 多项式插值, 法向位移  $w$  及其导数  $\frac{\partial w}{\partial \xi}$ 、 $\frac{\partial w}{\partial \eta}$  用 Hermit 多项式插值, 单元内坐标变换仍用 Lagrange 多项式描述, 即:

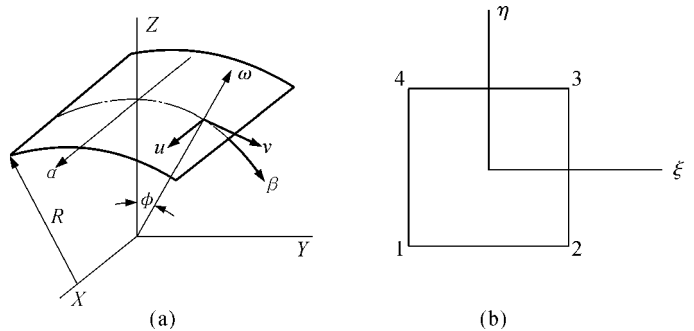


图 1 柱壳单元

Fig.1 Cylindrical Shell Element

收稿日期: 2010-05-24 修改稿日期: 2010-07-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59075240)

作者简介: 黄 义(1935-), 男, 陕西汉中, 教授, 博士生导师, 主要从事壳体结构和强度研究.

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi_i, \eta_i) \alpha_i \\ \varphi &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi_i, \eta_i) \varphi_i \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

节点的刚体位移 $\{\delta\}_R$ 由单元微体的刚体运动给出,微体形心的运动包括绕三个坐标轴的转动和沿坐标轴的平动.对于柱壳单元,沿 $x$ 轴的平动已在位移 $u$ 的插值中有所反映,沿 $y$ 轴的平动与绕 $x$ 轴的转动线性相关,可不另计入.这样,柱壳单元形心的刚体运动为:

$$V_R = \{-\theta_x \quad -\theta_y \quad -\theta_z \quad S_z\}^T \tag{2}$$

按动力学方法得到这个刚体运动产生的节点刚体位移为:

$$\begin{Bmatrix} u_R \\ v_R \\ w_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -R(1-\cos\varphi) & -R\sin\varphi & 0 \\ -R(1-\cos\varphi) & \alpha\sin\varphi & \alpha\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \alpha\sin\varphi & -\alpha\cos\varphi & \varphi\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\theta_x \\ -\theta_y \\ -\theta_z \\ S_z \end{Bmatrix} \tag{3}$$

求导并考虑到坐标变换式(1),单元刚体位移可表达为:

$$\{\delta_R\} = [T_R]_{20 \times 4} \{V_R\} = [T_{R1} \quad T_{R2} \quad T_{R3} \quad T_{R4}] \{V_R\}$$

转换矩阵 $[T_R]$ 的子矩阵为:

$$[T_{Rj}] = \begin{bmatrix} 0 & -R(1-\cos\varphi_j) & -R\sin\varphi_j & 0 \\ -R(1-\cos\varphi_j) & \alpha_j\sin\varphi_j & \alpha_j\cos\varphi_j & -\sin\varphi_j \\ R\sin\varphi_j & -\alpha_j\cos\varphi_j & \alpha_j\sin\varphi_j & -\sin\varphi_j \\ R\cos\varphi_j \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} \right\}_j & \alpha_j\sin\alpha_j \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} \right\}_j - \cos\varphi_j \left\{ \frac{\partial\alpha}{\partial\xi} \right\}_i & \sin\alpha_j \left\{ \frac{\partial\alpha}{\partial\xi} \right\}_j + \alpha_j\cos\varphi_j \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} \right\}_j & -\sin\varphi_j \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} \right\}_j \\ R\cos\varphi_j \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \right\}_j & \alpha_j\sin\alpha_j \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \right\}_j - \cos\varphi_j \left\{ \frac{\partial\alpha}{\partial\eta} \right\}_i & \sin\alpha_j \left\{ \frac{\partial\alpha}{\partial\eta} \right\}_j + \alpha_j\cos\varphi_j \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \right\}_j & -\sin\varphi_j \left\{ \frac{\partial\alpha}{\partial\eta} \right\}_j \end{bmatrix} \tag{4}$$

$j = 1, 2, 3, 4$

其中:  $\frac{\partial\alpha}{\partial\xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial\xi} \alpha_i$ ,  $\frac{\partial\alpha}{\partial\eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial\eta} \alpha_i$ ;  $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial\xi} \varphi_i$ ,  $\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial\eta} \varphi_i$ .

补充刚体位移后的单元位移场全量为:

$$\{\delta\} = \{\delta\} + \{\delta_R\} = [I \ T_R] \begin{Bmatrix} \delta \\ V_R \end{Bmatrix} \tag{5}$$

其中: $I$ 是 $20 \times 20$ 的单位矩阵

刚体位移也不产生节点力,既 $P_R = 0$ ,故按文献[5]介绍的方法作静力凝聚,由虚功原理建立有限元方程如下:

$$\begin{Bmatrix} P_D \\ 0 \end{Bmatrix} = [K^e_T] \{\delta\} - V_R = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ -V_R \end{Bmatrix} \tag{9}$$

其中: $P_D$ 是单元的节点载荷, $[K^e_T]$ 是由单元原有的刚度矩阵 $[K_D]$ 经位移扩展后得到的刚度矩阵,即:

$$[K^e_T] = \begin{Bmatrix} I \\ T_R^T \end{Bmatrix} [K_D] \begin{bmatrix} I & T_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

这里

$$\begin{aligned} [K_{11}]_{20 \times 20} &= [K_D], \\ [K_{12}]_{20 \times 4} &= [K_{21}]^T = [K_D] [T_R], \\ [K_{22}]_{4 \times 4} &= [T_R]^T [K_D] [T_R]. \end{aligned}$$

由式(6)的第二式解出:

$$\{V_R\} = -[K_{22}]^{-1} [K_{21}] \{\delta\}$$

代入式(6)的第一式得:

$$\{P_D\}^e = [K^e]^* \{ \delta \}$$
(7)

其中:

$$[K^e]^* = [K_{11}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}]$$

同样用位移全量 $\{ \delta \}$  代入式(6), 便得到

$$\{ \epsilon^e \} = [B]^* \{ \delta \}$$
(8)

其中:

$$[B]^* = [B] ([I] - [T_R][K_{22}]^{-1}[K_{21}])$$

由上述推导结果可见, 补充刚体位移后, 有限元方程式(10) 保留了原有的形式. 载荷向量未变, 位移向量补充为全量 $\{ \delta \}$  后, 刚度矩阵 $[K^e]$  经过矩阵 $[T_R]$  变换而成. 在编写有限元计算程序时, 仅需在未补充刚体位移的原程序中以式(7)(8)的形式对刚度矩阵、 $B$  矩阵以及相应的应力矩阵加以修改即可.

另外为了进行比较, 对位移模式中直接含有刚体位移的应变单元也编写了程序进行计算. 这个单元位移模式的形成方法是: 令几何方程的 6 个应变为 0, 积分得刚体位移, 再以四个应变协调方程积分两次, 得到变形的位移模式. 合并两者就得到了有 20 个待定常数的位移插值关系. 节点位移向量为 $\{ \delta \} = \left\{ u_i, v_i, w_i, \frac{\partial w_i}{\partial \alpha}, \frac{1}{R} \left( \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} - V \right) \right\}^T$ , 含五个分量, 则单元的四个节点正好用以确定这些待定常数.

2 算 例

例 1 自重作用下的圆柱形屋顶, 如图 2, 两端用刚性隔板支承, 两侧是自由边界. 材料的弹性模数  $E=2.07 \times 10^4$  MPa, 泊桑比  $\mu=0.3$ , 壳体厚度  $t=7.62$  cm, 重度  $g=4.31 \times 10^3$  Pa.

由于对称性, 取 1/4 壳进行计算. 几种方法不同网格划分情况下的计算结果见图 3. 计算结果表明: 未计入刚体位移时, 解的误差明显过大; 计入刚体位移, 在网格较粗(2×2)时, 有限元解与按扁壳理论得到的解析解比较接近; 当网格进一步细化(4×6)时, 计算结果与解析解有很好的吻合; 而应变单元的网格虽较粗(2×2), 但其解比未计入刚体位移的解的精度要高.

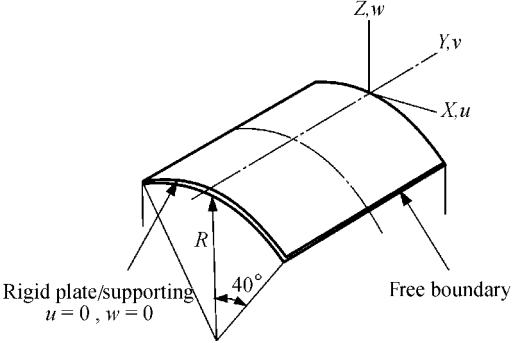


图 2 圆柱形屋顶  
Fig. 2 Cylindrical Roof

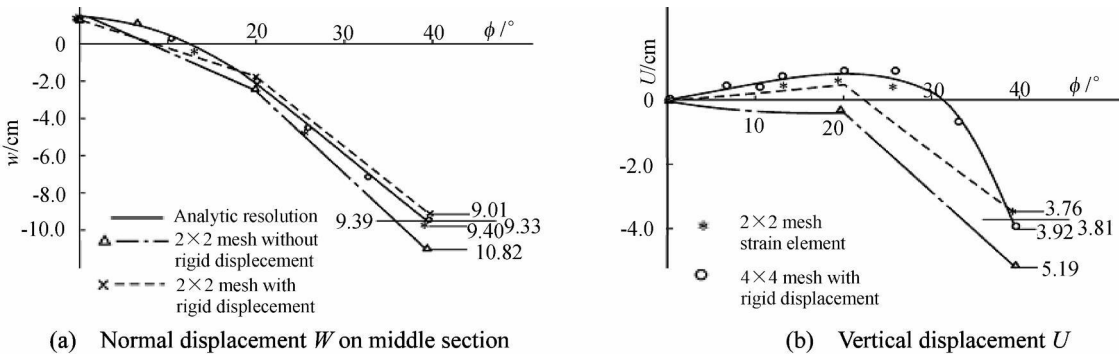


图 3 圆柱形屋顶位移  
Fig. 3 Displacement of Cylindrical Roof

例 2 一对集中力  $P$  夹紧的柱壳, 如图 4. 柱壳中面半径  $R=126$  mm, 长  $L=263$  mm, 厚度  $t=2.4$  mm. 材料的弹性模数  $E=210$  GPa, 泊桑比  $\mu=0.3$ , 夹紧力  $P=445.9$  N. 依对称条件取 1/8 进行分析, 不同方法, 不同网格划分情况下, 受力点的法向位移列于表 1.

表中的数据对比再次说明, 应变单元具有良好精度, 收敛亦快. 含有刚位移时, 解随着网格的加密逐步接近解析解; 不含刚体位移时, 解是不稳定时, 不能保证收敛.

表 1 受力点处的法向位移  $W$   
Tab. 1 Normal displacements at force point on cylindrical shell  $W/\text{mm}$

Mesh	Straining element	Without rigid displacement	With rigid displacement
2× 2	0. 275 0	0. 070 4	0. 232 4
4× 4	0. 289 8	0. 270 5	0. 256 0
6× 6	0. 289 5	0. 156 7	0. 260 8
7× 7		0. 014 2	0. 273 8
9× 9			0. 265 6

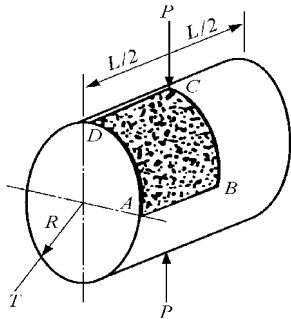


图 4 集中力夹紧的柱壳  
Fig. 4 Concentrated force on a cylindrical shell

由上述两算例结果可见, 刚体位移对等参单元解的影响是明显的.

3 结束语

刚体位移对壳单元解的收敛性和精度是有重要作用的<sup>[11-14]</sup>. 位移模式中包含准确的刚体位移可提高解的精度, 保证解的均匀收敛, 否则解的精度明显降低. 而且, 在弯矩大, 弯曲变形激烈的情况下会完全破坏解的收敛. 因此, 在构造壳单元时, 以多项式隐含刚体位移有时是不够的.

参考文献 References

[ 1 ] SIENKIEWICZ O C. Computational mechanics today [ J ] . Int. J. for Numerical Methods in Engineering 1992, 58: 9-23.

[ 2 ] BOGNER F K, FOX R L. A cylindrical shell finite element [ J ] . AIAA Journal, 1967, 5(4): 745-750.

[ 3 ] GANTIN Gills. Strain displacement relationships for cylindrical shells[ J ] . AIAA Journal, 1968, 6(9): 1787-1788.

[ 4 ] GANTIN Gills. Rigid body motions in curved finite elements [ J ] . Alaa. Journal, 1970, 8(7): 1252-1255.

[ 5 ] WILSON E L, TAYLOR R L, DOHERTY W P. Incompatible displacement models[ M ] . New York Academic Press 1973.

[ 6 ] ASHWELL D G, SABIRA B. A New cylindrical shell finite element based on simple independent strian functions [ J ] . Int. J. Sei. Program Press, 1973, 14: 171-183.

[ 7 ] ZIENKIEWICZ O C. The Finite Element Method[ M ] London: McGraw-Hill, 1977.

[ 8 ] 薛建阳, 刘祖强, 彭修宁等. 钢结构异型节点受力性能及非线性有限元分析[ J ] . 西安建筑科技大学学报: 自然科学版, 2010, 42(5): 609-613.

XUE Jian-yang, LIU Zu-qing, and PENG Xiu-ning. Mechanical properties and non-linear finite element analysis of steel abnormal joints [ J ] . J. Xi'an Univ. of Arch. & Tech.: Natural Science Edition, 2010, 42(5): 609-613.

A method of adding rigid body displacements and the analysis of convergence in shell element

HUANG Yi<sup>1,2</sup>, DAN Yong<sup>1,3</sup>, LI Hua<sup>2</sup>

- (1. School of Civil Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology; Xi'an 710055, Shaanxi, China;
2. School of Science, Xi'an University of Architecture and Technology; Xi'an 710055, Shaanxi, China;
3. School of Chemical Engineering, Northwest University, Xi'an 710069, Shaanxi, China)

**Abstract** Rigid body displacements have different form existing in shell element trial functions, and there is different opinions about its influence. It is borne out by adding rigid body displacements in isoperimetric shell element and solving numerical examples with several methods, that rigid displacement is so important for the convergence of shell element that shouldn't be neglected.

**Key words:** rigid body displacement; shell element; finite element