DOI:10.15986/j.1006-7930.2011.05.003
第43卷 第5期 西 安 建 筑 科 技 大 学 学 报(自然科学版) Vol.43 No.5
2011年10月 J. Xi'an Univ. of Arch. & Tech.(Natural Science Edition) Oct. 2011

平面刚架极限分析的解析法研究

吴耀鹏, 白国良

(西安建筑科技大学结构工程与抗震教育部重点实验室, 陕西 西安 710055)

摘 要: 根据结构极限分析定理, 提出了计算刚架极限荷载的荷载增量法、线性规划法. 荷载增量法引入动态单元定位向量的概念, 根据结构塑性铰出现的位置依次更改其对应的单元定位向量, 通过循环迭代计算结构极限荷载. 线性规划法是一种在一定结构约束条件下求函数极值的方法. 通过平移变换并引入松弛变量, 可以将极限荷载问题转化为标准线性规划问题, 用单纯形法计算结构极限荷载. 算例分析表明, 荷载增量法和线性规划法均能得到结构的极限荷载. 平面刚架极限分析的解析法可以丰富结构力学的内容, 并可用于解决实际工程问题.

关键词: 平面刚架; 极限分析; 荷载增量法; 线性规划法

中图分类号: O342 文献标志码: A 文章编号: 1006-7930(2011)05-0644-05

结构极限承载力分析是结构分析中的重要课题, 涉及到结构的稳定和安全评估问题, 在理论上或实践中均有重要意义. 对于结构体系, 当荷载增加到某一极限值时, 结构出现了足够多的塑性铰, 使结构成为机构, 这一荷载称为极限荷载, 相应的状态称为极限状态. 计算结构极限荷载的方法很多, 如结构力学中常用的机构法、试算法等[1-3]. 这些方法的灵活运用, 可以解决一般结构的极限分析问题, 也是当前教学的主要内容.

近年来, 国内相关教师和科研人员, 对结构体系的极限分析问题进行了系统研究, 并提出了各种求解极限荷载的方法[4-8]. 国外研究者完成了类似工作[9-11]. 随着计算结构力学的发展, 目前已经提出了结构极限分析的计算机方法, 通过编制相应的计算机程序分析并求解结构的极限荷载. 本文基于经典增量理论和线性规划等数学方法, 应用荷载增量法和线性规划法求解平面刚架的极限荷载. 这两种方法可以作为现有结构力学求解极限荷载方法的有效补充, 应用在结构力学教学中, 丰富结构力学内容. 研究有重要理论意义和实际意义.

1 极限分析

平面刚架极限分析时有如下假定: 1)理想弹塑性材料; 2)结构变形微小; 3)忽略轴力和剪力的影响; 4)荷载为比例加载.

比例加载有两层含义: 1)结构上的所有荷载均按同一比例增长, 整个荷载系可用一个参数 P 来表示, 即所有的荷载组成一个广义力 P; 2)荷载 P 只单调增大, 不出现卸载现象.

1.1 荷载增量法

荷载增量法可以手算或者编制有限元程序计算结构极限荷载, 只是塑性铰较多时手算过程比较繁琐. 其计算原理为: 将荷载逐渐分步增加至结构上, 每步都出现新的塑性铰, 直至达到极限状态. 这种方法每一步都要改变结构形式, 形成新的结构刚度矩阵. 另外, 尽管问题本身与刚度无关, 但这种方法需要给出杆件的抗弯刚度.

荷载增量法是先对第 i 阶段的结构, 令荷载参数 $\overline{P}=1$, 得到 $\overline{M}_i$ 图. 用单元的截面极限弯矩 M_u 与上

*收稿日期: 2010-09-04 修改稿日期: 2011-07-29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51108371); 陕西省教育厅专项科研项目(2010JK634)

作者简介: 吴耀鹏(1979-), 男, 河南信阳人, 博士, 讲师, 研究方向: 结构力学.

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

一轮得到的杆端弯矩累加值 M_{u-1} 相减后, 再与相应杆端弯矩 $\overline{M}_i$ 相比, 得到杆端弯矩比值 ΔP_i. 取杆端弯矩比值 ΔP_i 的最小值, 便是该轮的荷载增量, 即

$$\Delta P_i=\left(\frac{M_u-M_{i-1}}{\overline{M}_i}\right)_{\min} \tag{1}$$

在荷载增量 ΔP_i 作用下, 各控制截面的弯矩增量为 $\Delta M_i=\Delta P_i\circ\overline{M}_i$, 荷载和弯矩的累加值为 $P_i=P_{i-1}+\Delta P_i$ 和 $M_i=M_{i-1}+\Delta M_i$. 不难判别, ΔP_i 最小的截面出现塑性铰. 在计算过程中, 将此截面改为铰结, 准备作下一轮计算.

依照以上办法进行迭代计算, 当结构体系总刚度矩阵 K 的行列式的值为零时, 便停止计算. 这时结构已成为机构, 达到极限, 荷载累加值即为极限荷载.

$$P_{\mathrm{u}}=\sum\Delta P_i \tag{2}$$

若单元上作用有均布荷载 q, 则该单元中弯矩的最大值(亦即塑性铰)可能发生在单元内部的某一事先未知的位置. 此处采用一种近似处理方法: 将均布荷载作用的单元 m 等分, 将其上的荷载等效为结点荷载. 当 m 足够大时, 计算结果可以满足精度要求.

为了便于迭代计算, 结构体系结点采用重号技巧, 使每个杆单元有两个独立的结点编号. 荷载增量法计算极限荷载时, 若原结构有 N 个自由度, 则结构体系出现第一个塑性铰后总自由度数为 $N+1$, 根据塑性铰出现的位置, 其对应的定位向量也为 $N+1$; 出现第二个塑性铰则为 $N+2$, 依次类推.

1.2 线性规划法

线性规划是数学规划中最成熟和使用最广泛的方法之一, 其求解方法有单纯形法、初等矩阵法、内点法、鞍点法和特殊结构矩阵的分解法等. 本文将极限分析问题转化为线性规划问题, 基于单纯形法求解平面刚架的极限荷载. 这一方法只用原始结构的信息计算, 不需要结构的刚度信息, 均布荷载也较易处理, 便于程序实现.

基于下限定理, 每个杆单元都要满足平衡条件和内力局限条件. 在无单元荷载的情况下, 单元中弯矩绝对值的最大值必定在单元的两端, 因此只对单元两端弯矩应用内力局限条件加以控制即可. 即

$$-M_u^e\leqslant M_i\leqslant M_u^e \tag{3}$$

其中, M_i 为单元两端弯矩($i=1, 2$), M_u^e 为单元的极限弯矩.

局部坐标系下单元方程

$$\overline{F}^e=\overline{h}^e\overline{F}_X^e \tag{4}$$

其中, $\overline{F}^e$ 为单元杆端力向量, $\overline{h}^e$ 为系数矩阵, $\overline{F}_X^e$ 为单元未知力向量.

引入非负变量 M_i^*, 令 $M_i^*=M_i+M_u^e$. 进一步引入变量 W_i, 令 $M_i^*+W_i=2M_u^e$. 将 $M_i^*+W_i=2M_u^e$ 代入式(4), 经坐标变换得到整体坐标系下单元方程

$$F^e=h^eF_X^{*e}+F_{\mathrm{u}}^e \tag{5}$$

将单元方程集成, 得到如下整体平衡方程

$$H\circ F_X^*=P_j-F_{\mathrm{u}} \tag{6}$$

由于比例加载, 结点荷载向量 $P_j=-p\circ a$. 其中 p 为荷载比例系数, a 为与结点荷载向量 P_j 成比例的一个向量. 有了整体平衡方程, 基于下限定理求解极限荷载的问题便可表述为如下的线性规划问题

$$\begin{cases}\min(-p)\\ \mathrm{s.t.}(a\quad H)\begin{bmatrix}p\\ F_X^*\end{bmatrix}=-F_{\mathrm{u}}\end{cases} \tag{7}$$

由于各单元的轴力都是自由变量, 可以事先将其消去, 亦即利用式(8)解出 F_N^{*e}, 用杆端弯矩 M_i^{*e} 表示. 当某一轴力无法消去时, 说明该轴力取任何值都不影响结构杆端弯矩的平衡, 可以直接将其删除. 消去轴力后, 得

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{cases}\min(-p)\\ \text{s.t.}\begin{pmatrix} a & H & 0\\ 0 & I & I\end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix}p\\F_X^*\\W\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-F_{\mathrm{u}}\\2M_{\mathrm{u}}\end{bmatrix}\end{cases} \tag{8}$$

式(8)为线性规划问题的标准形式,可以用单纯形法求解.其解不但给出了极限荷载系数 p_u,而且还可以给出塑性铰位置的信息.当某个单元的杆端弯矩 $M_i^*=0$ 或 $M_i^*=2M_u^e$时,该杆端弯矩便达到了极限弯矩,因而形成一个塑性铰.

均布荷载处理方法如下

1)将作用有均布荷载 q 的单元内部设一个控制截面,其位置在距离第一个杆端 λl 处,这里 $\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant1)$为位置参数,初试值可取 $\lambda=0.5$.

2)记控制截面处的弯矩为 M_λ^e,增添约束条件$|M_\lambda^e|\leqslant M_u^e$.应用平衡条件,$M_\lambda^e$可用杆端弯矩和单元上的荷载表示.

3)用线性规划求解当前约束状态的 F_{Pu}和内力.

4)对于每个作用有 q 的单元,用杆端弯矩和单元上的荷载计算单元内绝对值最大的弯矩 $M_{\max}^e$,相应的截面位置记为 $\lambda_{\max}$,易求得 $\lambda_{\max}=0.5+(M_2+M_1)/(ql^2)$.其中:$M_1$、$M_2$为杆端弯矩.若 $\lambda_{\max}\leqslant0$,取 $\lambda_{\max}=0$;若 $\lambda_{\max}\geqslant1$,取 $\lambda_{\max}=1$.

5)检验是否满足$-M_u^e\leqslant M_{\max}^e\leqslant M_u^e$.

如果所有作用有 q 的单元都满足条件$-M_u^e\leqslant M_{\max}^e\leqslant M_u^e$,则得到结果,停止计算.否则,对于不满足的单元取 $\lambda=\lambda_{\max}$,转到步骤 3)重新计算.

2 算例分析

分别应用荷载增量法和线性规划法,计算图 1 所示平面刚架的极限荷载.各杆单元抗弯刚度均取 $EI=1$,柱的极限弯矩为 M_u,梁的极限弯矩为 $1.5M_u$.

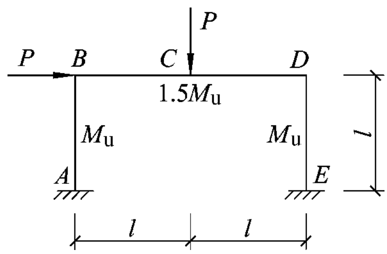

图 1 平面刚架

Fig. 1 Plane frame

荷载增量法

第一轮计算结点 E 出现塑性铰,$P_1=2.42M_u/l$,如图 2a;第二轮计算结点 D 出现塑性铰,$P_2=2.57M_u/l$,如图 2b;第三轮计算结点 A 出现塑性铰,$P_3=3.06M_u/l$,如图 2c;第四轮计算结点 C 出现塑性铰,

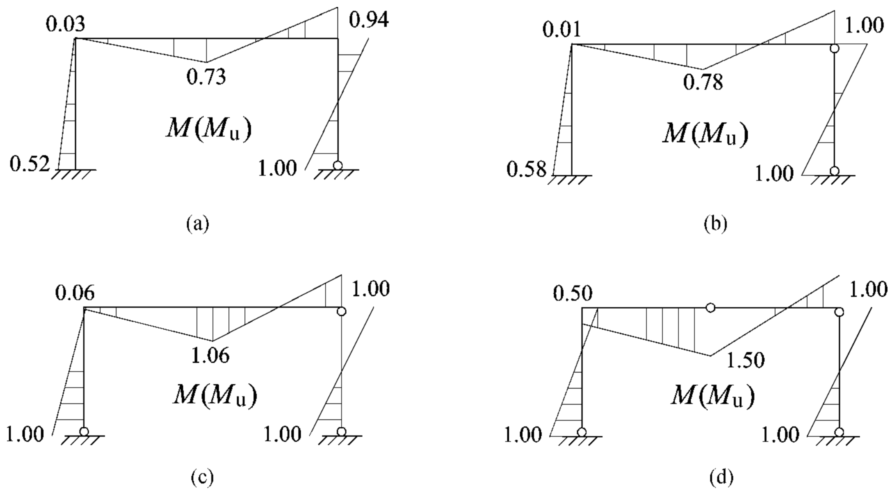

图 2 平面刚架弯矩图

Fig. 2 Bending moment diagram of plane frame

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$P_4 = 3.50 M_u / l$, 如图 2d. 此时, 结构总刚度矩阵 K 的行列式值为零, 结构已成为机构, 达到极限. 其加载过程及弯矩图如图 2 所示.

极限荷载和最终单元弯矩值分别为

$$P_u = 3.50 \frac{M_u}{L}, \quad M = M_u \begin{bmatrix} 1.00 & 0.50 \\ -0.50 & 1.50 \\ -1.50 & -1.00 \\ 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

线性规划法

经相关变换, 将单元内力平衡方程集成为整体平衡方程, 平面刚架极限荷载问题转换成标准线性规划问题

$$\begin{cases} \min(-p) \\ \text{s.t.} \begin{pmatrix} a & H & 0 \\ 0 & I & I \end{pmatrix} \circ \begin{bmatrix} p \\ F_X^* \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_u \\ 2M_u \end{bmatrix} \end{cases}$$

其中, $p \geqslant 0$, $F_X^* \geqslant 0$, $W \geqslant 0$.

用单纯形法, 易求得 $p_u = 3.5$, 即

$$F_{Pu} = 3.5 \frac{M_u}{l}, \quad M = M_u \begin{bmatrix} 1.00 & 0.50 \\ -0.50 & 1.50 \\ -1.50 & -1.00 \\ 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

故刚架结点 A、C、D、E 处的弯矩都已达到极限, 出现塑性铰. 荷载增量法与线性规划法计算结果完全一样.

3　结　论

将经典增量理论和线性规划理论引入结构力学教学中, 用荷载增量法和线性规划法计算平面刚架的极限荷载. 该研究可以丰富现有结构力学教学内容, 研究结果可以用于指导工程实践.

荷载增量法是一种将荷载逐渐分步增加至结构上直至达到极限状态的方法. 该方法依据传统的矩阵位移法, 可以依次判断结构出现塑性铰的位置, 完全吻合实际结构的破坏过程, 力学原理清晰. 不过, 荷载增量法需要反复循环迭代计算, 当塑性铰较多时, 计算量较大, 且该方法对结构上作用有均布荷载时处理不便.

线性规划法是一种在一定结构约束条件下求线性函数极值的方法. 将结构约束条件通过平移变换并引入松弛变量, 可以将极限荷载问题转化为标准线性规划问题, 用单纯形法可以求得结构极限荷载. 线性规划法计算效率高, 可以直接得出结构终态, 而且对均布荷载的处理较好. 不过, 线性规划法原理较复杂, 且通常需要编制相应的程序计算结构的极限荷载.

参考文献　References

[1] 龙驭球, 包世华. 结构力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1996.
LONG Yu-qiu, BAO Shi-hua. Structural Mechanics [M]. Beijing: Higher Education Press, 1996.

[2] 王荫长, 刘　铮, 周文群, 等. 结构力学[M]. 北京: 冶金工业出版社, 1998.
WANG Yin-chang, LIU Zheng, ZHOU Wen-qun, et al. Structural Mechanics [M]. Beijing: Metallurgical Industry Press, 1998.

[3] 杨茀康, 李家宝. 结构力学[M]. 北京: 高等教育出版, 1998.
YANG Fu-kang, LI Jia-bao. Structural Mechanics [M]. Beijing: Higher Education Press, 1998.

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　　http://www.cnki.net

[4] 张 昕，蒋 通. 框架结构极限荷载分析的便捷解法[J]. 力学季刊，2001，22(2)：252-257.
ZHANG Xin, JIANG Tong. Convenient procedure for calculating ultimate load of frame [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2001，22(2)：252-257.

[5] 惠宽堂. 机动法求刚架极限荷载时的超静定问题[J]. 西安建筑科技大学学报：自然科学版，2002，34(1)：68-71.
XI Kuan-tang. Statically indeterminate problems in calculating the ultimate load of frames [J]. J. Xi′an Univ. of Arch. & Tech.：Natural Science Edition，2002，34(1)：68-71.

[6] 杨 强，程勇刚，赵亚楠，等. 基于非线性规划的极限分析方法及其应用[J]. 工程力学，2004，21(2)：15-19.
YANG Qiang，CHENG Yong-gang，ZHAO Ya-nan，et al. Limit analysis method based on nonlinear programming and its application [J]. Engineering Mechanics，2004，21(2)：15-19.

[7] 李 力，童申家，孔旭光. 复杂边界条件钢筋混凝土矩形板的极限分析[J]. 西安建筑科技大学学报：自然科学版，2007，39(6)：814-817.
LI Li，TONG Shen-jia，KONG Xu-guang. Limit analysis of rectangular reinforced concrete slab with complex boundary conditions [J]. J. Xi′an Univ. of Arch. & Tech.：Natural Science Edition，2007，39(6)：814-817.

[8] 杨绿峰，余 波，乔永平. 用弹性模量缩减法分析刚架结构的极限承载力[J]. 防灾减灾工程学报，2009，29(3)：306-312.
YANG Lu-feng，YU Bo，QIAO Yong-ping. Ultimate load bearing capacity evaluation of frame structures by an elastic modulus reduction method [J]. Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering，2009，29(3)：306-312.

[9] BATISTA R C，BATISTA E M. Behaviour and ultimate load estimates for thin-walled trussed plane frames[J]. Thin-Walled Structures，1992，14(4)：265-278.

[10] MIKLÓS Iványi. Ultimate olad behaviour of steel-framed structures[J]. Journal of Constructional Steel Research，1992，21(1-3)：5-42.

[11] TANGARAMVONG S，TIN-Loi F. Simultaneous ultimate load and deformation analysis of strain softening frames under combined stresses[J]. Engineering Structures，2008，30(3)：664-674.

Study on the analytical method of plane frame ultimate analysis

WU Yao-peng，BAI Guo-liang

(Key Laboratory for Structural Engineering and Earthquake Resistance of China Education Ministry, Xi′an University of Architecture and Technology，Xi′an 710055，China)

Abstract: Based on the structural ultimate analysis theorem，load increment method and linear programming method are proposed to calculate the ultimate load. Load increment method introduces the dynamic element locator vector. Based on the locations of structural plastic joints，their corresponding element locator vectors are changed in turn. Then the ultimate load of structure is resolved by iteration and the linear programming method is used to calculate function extreme value，which can meet some structural restraint conditions. Through transformation and slack variables introduction，ultimate load problem can be changed to normative linear programming problem. Using simplex method，the structural ultimate load can be calculated. The results of calculation example show that the applications of both load increment method and linear programming method can be used to predict structural ultimate load. Analytical method of ultimate analysis of plane frame can enrich the contents of structural mechanics and solve practical engineering problems.

Key words: *plane frame*；*ultimate analysis*；*load increment method*；*linear programming method*

Biography: WU Yao-peng，Ph. D.，Xi′an 710055，P. R. China，Tel: 0086-29-82202947，E-mail: wyp@xauat.edu.cn

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net