

# 双模量圆板中心在冲击荷载作用下的弹性计算

吴 晓, 杨立军, 黄 翀

(湖南文理学院土木建筑工程学院, 湖南 常德, 415000)

**摘 要:**采用弹性理论建立了双模量圆板在外荷载作用下的静力平衡方程, 利用此静力平衡方程确定了双模量圆板的中性面位置, 建立了双模量圆板在外荷载作用下的弯曲微分方程, 并求得了圆板在集中荷载作用下的静力挠度表达式. 在此基础上, 考虑了冲击物和被冲击双模量圆板的质量影响, 采用能量法及相当质量法将具有分布质量的双模量圆板转化为只有一个集中质量的弹性系统, 从而导出双模量圆板中心在冲击荷载作用下的动力因数. 算例分析表明, 冲击重物的质量与冲击重物冲击前瞬间具有的速度对动力因数的影响要比其他因素大些.

**关键词:**双模量; 圆板; 冲击荷载; 动力因数

**中图分类号:** O321

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1006-7930(2012)05-0614-06

在工程实际中, 土木工程中的混凝土、航天航空及机械工程中的石墨、增强复合材料、金属合金、陶瓷等许多材料都具有明显的拉压弹性模量不同的双模量特性. 其中, 石墨材料的拉压弹性模量之比最高可达四倍. 所以, 用不同弹性模量本构关系对这些材料制成的结构进行计算分析已备受关注. 对于双模量材料来说, 弹性系数不仅依赖于结构材料特性, 还根据结构各点位移或应力状态的不同而不同, 亦即与结构材料、形状、边界条件及外荷载有关. 在梁、弹性平面等结构计算中, 已开始考虑材料的双模量特性<sup>[1-10]</sup>. 另外, 由双模量材料制成的结构在工程实际中经常受到冲击荷载的弹性撞击. 为了给经常受到冲击荷载撞击的双模量圆板设计提供理论依据, 本文确定了双模量圆板的中性面位置, 建立了双模量圆板在外荷载作用下的弯曲微分方程, 并求得了圆板在集中荷载作用下的静挠度表达式. 在考虑冲击物和被冲击双模量圆板的质量影响基础上, 采用能量法及相当质量法将具有分布质量的双模量圆板转化为只有一个集中质量的弹性系统, 从而导出双模量圆板中心在冲击荷载作用下的动力因数.

## 1 双模量圆板弯曲微分方程

对于双模量板的弯曲, 其中性面不再位于板厚的正中央, 而是形成了拉压弹性模量不同的各向同性的拉伸区和压缩区. 由弹性力学理论可知双模量板弯曲时的应力表达式为

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{E_i z}{1 - \mu_i^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_i \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y = -\frac{E_i z}{1 - \mu_i^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} = -\frac{E_i z}{1 + \mu_i} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $i = 1$  或  $2$ ;  $E_i$ 、 $\mu_i$  为拉伸弹性模量及泊松比;  $E_2$ 、 $\mu_2$  为压缩弹性模量及泊松比;  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  分别为  $x$ 、 $y$  面上的正应力;  $\tau_{xy}$  为  $x$  面上与  $y$  轴平行的剪应力;  $w$  为板的位移.

设板厚为  $h$ , 受拉区高度为  $h_1$ , 受压区高度为  $h_2 = h - h_1$ , 由弹性理论可知双模量板弯曲时横截面内力应满足

收稿日期: 2012-04-18 修改稿日期: 2012-10-08

基金项目: 湖南省“十二五”重点建设学科(机械设计及理论)和湖南省教育厅项目(11A081)

作者简介: 吴 晓(1965-), 男, 湖南常德人, 教授, 主要从事结构振动理论研究.

$$\begin{cases} \frac{E_1}{1-\mu_1^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_0^{h_1} z dz + \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h_2}^0 z dz = 0 \\ \frac{E_1}{1-\mu_1^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \int_0^{h_1} z dz + \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \int_{-h_2}^0 z dz = 0 \end{cases} \quad (2)$$

把式(2)中两分式相加可得

$$\frac{E_1}{1-\mu_1} \int_0^{h_1} z dz + \frac{E_2}{1-\mu_2} \int_{-h_2}^0 z dz = 0 \quad (3)$$

由式(3)可以确定中性面的位置为

$$h_1 = h \sqrt{E_2(1-\mu_1)} / (\sqrt{E_1(1-\mu_2)} + \sqrt{E_2(1-\mu_1)}) \quad (4)$$

由弹性理论可知双模量微单元在直角坐标系下的平衡微分方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \end{cases} \quad (5)$$

对于双模量圆板可知其上下面的边界条件为

$$(\tau_{xz})|_{z=h_1} = 0, (\tau_{yz})|_{z=-h_2} = 0 \quad (6)$$

由式(5)、式(6)可以求得

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \frac{E_1}{2(1-\mu_1^2)} (z^2 - h_1^2) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \\ \tau_{yz} = \frac{E_1}{2(1-\mu_1^2)} (z^2 - h_1^2) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \end{cases} \quad 0 \leq z \leq h_1 \quad (7a)$$

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \frac{E_2}{2(1-\mu_2^2)} (z^2 - h_2^2) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \\ \tau_{yz} = \frac{E_2}{2(1-\mu_2^2)} (z^2 - h_2^2) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \end{cases} \quad -h_2 \leq z \leq 0 \quad (7b)$$

利用式(1)、式(7)可以求得弯矩、扭矩、剪力表达式为

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{E_1}{1-\mu_1^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_0^{h_1} z^2 dz - \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h_2}^0 z^2 dz \\ &= -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} M_y &= -\frac{E_1}{1-\mu_1^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \int_0^{h_1} z^2 dz - \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \int_{-h_2}^0 z^2 dz \\ &= -D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (8b)$$

$$M_{xy} = -\frac{E_1}{1+\mu_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_0^{h_1} z^2 dz - \frac{E_2}{1+\mu_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-h_2}^0 z^2 dz = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (8c)$$

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{E_1}{2(1-\mu_1^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \int_0^{h_1} (z^2 - h_1^2) dz + \frac{E_2}{2(1-\mu_2^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \int_{-h_2}^0 (z^2 - h_2^2) dz \\ &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} Q_y &= \frac{E_1}{2(1-\mu_1^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \int_0^{h_1} (z^2 - h_1^2) dz + \frac{E_2}{2(1-\mu_2^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \int_{-h_2}^0 (z^2 - h_2^2) dz \\ &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \end{aligned} \quad (9b)$$

$$\text{式中: } D = \frac{E_1 h_1^3}{3(1-\mu_1^2)} + \frac{E_2 h_2^3}{3(1-\mu_2^2)}; D_1 = \frac{\mu_1 E_1 h_1^3}{3(1-\mu_1^2)} + \frac{\mu_2 E_2 h_2^3}{3(1-\mu_2^2)}.$$

由弹性理论可知外分布荷载与双模量板内力满足以下关系

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x, \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y \quad (10a)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q(x, y) = 0 \quad (10b)$$

利用式(8)~式(10)即可得到双模量板在分布荷载作用下的弯曲微分方程为

$$D \nabla^4 w = q(x, y) \quad (11)$$

$$\text{式中, } \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

若双模量圆板发生轴对称弯曲变形时,可把式(11)化为

$$D \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) = \frac{1}{r} \int_0^r q(r) r dr \quad (12)$$

$$\text{式中, } \nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}.$$

对于图1所示半径为 $a$ 且周边固支的双模量圆板,在双模量圆板中心作用有集中力 $P$ .由弹性理论可知图1所示双模量圆板的静挠度函数为

$$w(r) = \frac{P}{16\pi D} (a^2 - r^2 + 2r^2 \ln \frac{r}{a}) \quad (13)$$

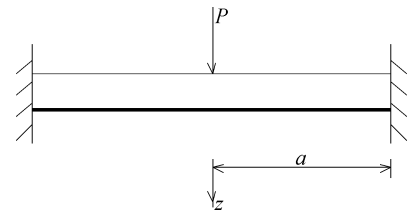


图1 固支双模量圆板

Fig. 1 Bimodulus circular plate with fixed bearing

## 2 双模量圆板受荷载的冲击

为了简化问题可作如下假定:不考虑阻尼对冲击系统的作用,忽略冲击过程中的能量损失,被冲击物体局部的塑性变形不考虑,被冲击物的最大动力挠度仍在线性范围,最大的动力应力不超过圆板材料的比例极限。

以重物对图1所示双模量圆板的圆心进行冲击为例,在考虑双模量圆板的质量基础上,采用能量法来研究重物对双模量圆板冲击问题的动力因数。假设重物自高度 $H$ 处下落,与双模量圆板中心刚开始接触且尚未变形时设冲击物的速度为 $v_1$ 。当重物与板接触且开始变形时,重物与圆板共同的位移为 $w_d$ 。

令重物与圆板的质量分别为 $m$ 、 $M$ ,则在重物自高度 $H$ 处下落时由于不计能量损失的假设及应用能量守恒定理,当重物下落到与圆板接触前的瞬间,它原来所有的势能 $mgH$ 将全部转变为动能 $\frac{1}{2}mv_1^2$ ,于

是可知冲击前瞬间重物的速度 $v_1 = \sqrt{2gH}$ ,此时冲击物的动量为 $mv_1$ 。当重物与板接触且开始变形时,设圆板受冲击后的瞬间在冲击点得到的速度为 $v_2$ ,此时重物的动量就变成为 $mv_2$ ,而圆板在受冲击后瞬间得到的动量并不等于 $Mv_2$ 只是 $Mv_2$ 的一部分,因为圆板在其他各点的速度并不等于 $v_2$ ,特别是圆板在支承处的速度为零。设想把圆板的全部质量 $M$ 的一部分 $e_2 M$ 集中于冲击点处且其中 $e_2 < 1$ ,则圆板真正得到的动量就是 $e_2 Mv_2$ , $e_2$ 称为圆板的动量相当质量折算系数。

假设冲击重物与圆板一接触就和圆板粘连在一起。在冲击的第一阶段末,冲击重物在冲击前瞬间具有的动量 $mv_1$ 应等于冲击后瞬间该冲击重物与圆板合在一起所得到的动量 $(m + e_2 M)v_2$ ,于是可得到圆板在受冲击后瞬间在冲击点所获得的速度 $v_2 = mv_1 / (m + e_2 M)$ 。

由能量守恒定律可知,当冲击物与圆板的速度变为零时,它们的动能 $\frac{1}{2}(m + e_1 M)v_2^2$ 与势能 $mgw_d$ 之和应等于圆板上弹性力的势能即

$$\frac{1}{2}(m + e_1 M)v_2^2 + K_d w_s (m + e_1 M)g = \frac{1}{2}Qw_d \quad (14)$$

式中, $e_1$ 称为圆板的能量相当质量折算系数且 $e_1 < 1$ 。

对于圆板的能量相当质量折算系数 $e_1$ 及动量相当质量折算系数 $e_2$ 的确定,应根据:原来具有分布质量的整个圆板的弹性系统在冲击振动时的动能与折算为只有一个集中的相当质量 $e_1 M$ 的弹性系统在振动时的动能应相等,原来具有分布质量的整个圆板的弹性系统在冲击振动时的动量与折算为只有一

个集中的相当质量  $e_2 M$  的弹性系统在振动时的动量应相等.

假定重物是对双模量圆板的中心进行冲击,可设双模量圆板的初始速度分布函数为

$$\dot{w}(r) = \dot{w}_0(a^2 - r^2 + 2r^2 \ln \frac{r}{a}) \quad (15)$$

根据能量守恒有

$$\frac{1}{2} \rho h \int_0^a \int_0^{2\pi} [\dot{w}(r)]^2 r dr d\theta = \frac{1}{2} e_1 M \dot{w}_0^2 \quad (16a)$$

$$\rho h \int_0^a \int_0^{2\pi} [\dot{w}(r)]^2 r dr d\theta = e_2 M \dot{w}_0^2 \quad (16b)$$

把式(15)代入式(16)中可以求得质量折算系数为

$$e_1 = 0.1296, e_2 = 0.25 \quad (17)$$

由于双模量圆板始终工作于比例极限的范围之内有

$$Q = mgw_d/w_s \quad (18)$$

式中,  $w_s$  为由力  $mg$  在圆心处作用时引起的静位移.

把式(18)代入式(14)中可以求得动力因数为

$$K_d = \frac{w_d}{w_s} = 1 + \frac{e_1 M}{m} + \left[ \left( 1 + \frac{e_1 M}{m} \right)^2 + \frac{\xi v_1^2}{g w_s} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

$$\text{式中, } \xi = \frac{1 + \frac{e_1 M}{m}}{\left( 1 + \frac{e_2 M}{m} \right)^2}.$$

由式(13)可知双模量圆板中心挠度及,  $E_1 = E_2, \mu_1 = \mu_2$  时圆板中心挠度分别为

$$w_s = \frac{mga^2}{16\pi D}, \quad w_{s1} = \frac{mga^2}{16\pi D_0} \quad (20)$$

$$\text{式中, } D_0 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

所以,  $E_1 = E_2, \mu_1 = \mu_2$  时单模量圆板动力因数为

$$K'_d = \frac{w_d}{w_{s1}} = 1 + \frac{e_1 M}{m} + \left[ \left( 1 + \frac{e_1 M}{m} \right)^2 + \frac{\xi v_1^2}{g w_{s1}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

当双模量圆板动力因数与单模量圆板动力因数满足下式时可以不考虑材料双模量的影响

$$\frac{K_d - K'_d}{K_d} = 5\% \text{ 或 } \frac{K'_d - K_d}{K_d} = 5\% \quad (22)$$

把式(19)、(20)、(21)代入式(22)中可以得到

$$\frac{400\xi v_1^2}{g w_{s1}} > \frac{361\xi v_1^2}{g w_s} - 38 \left( 1 + \frac{e_1 M}{m} \right)^2 - 38 \left( 1 + \frac{e_1 M}{m} \right) \left[ \left( 1 + \frac{e_1 M}{m} \right)^2 + \frac{\xi v_1^2}{g w_s} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (23a)$$

$$\frac{441\xi v_1^2}{g w_s} > \frac{400\xi v_1^2}{g w_{s1}} - 40 \left( 1 + \frac{e_1 M}{m} \right)^2 - 40 \left( 1 + \frac{e_1 M}{m} \right) \left[ \left( 1 + \frac{e_1 M}{m} \right)^2 + \frac{\xi v_1^2}{g w_{s1}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (23b)$$

式(23)即为在不考虑阻尼对冲击系统的作用,忽略冲击过程中的能量损失,被冲击物体局部的塑性变形不考虑,被冲击物的最大动力挠度仍在线性范围,最大的动力应力不超过圆板材料的比例极限时的假定条件下:双模量圆板中心载荷受到冲击载荷作用时,可以忽略圆板材料双模量特性影响的判别式.

### 3 算例分析

为了说明本文方法在计算双模量圆板受到冲击荷载时动力因数中的应用,本文假设双模量圆板材料  $E_1 = 1.96 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ,  $E_2 = 2.94 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ,  $\mu_1 = 0.166$ ,  $\mu_2 = 0.25$ ,  $\rho = 2.4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $a = 5 \text{ m}$ ,  $h = 0.06 \text{ m}$ ,  $m = 80 \text{ kg}$ ,  $v_1 = 2.5 \text{ m/s}$ .

根据双模量圆板的有关计算参数可以求得

$h_1 = 0.0338 \text{ m}, h_2 = 0.0262 \text{ m}, D = 44.749 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}, w_s = \frac{mga^2}{16\pi D} = 43.591 \times 10^{-4} \text{ m}, M = \rho\pi a^2 h = 11.304 \times 10^3 \text{ kg}.$

把以上计算结果及有关参数代入式(19)中,求得双模量圆板受到冲击荷载时动力因数为

$$K_d = \frac{w_d}{w_s} = 1 + \frac{e_1 M}{m} + \left[ \left( 1 + \frac{e_1 M}{m} \right)^2 + \frac{\zeta v_1^2}{g w_s} \right]^{\frac{1}{2}} = 9.6933$$

当  $E_1 = E_2 = 1.96 \times 1010 \text{ N/m}^2, \mu_1 = \mu_2 = 0.166$  时单模量圆板受到冲击荷载时动力因为

$$K'_d = \frac{w_d}{w_s} = 1 + \frac{e_1 M}{m} + \left[ \left( 1 + \frac{e_1 M}{m} \right)^2 + \frac{\zeta v_1^2}{g w_s} \right]^{\frac{1}{2}} = 9.5578$$

当  $E_1 = E_2 = 2.94 \times 1010 \text{ N/m}^2, \mu_1 = \mu_2 = 0.25$  时单模量圆板受到冲击荷载时动力因数

$$K'_d = \frac{w_d}{w_s} = 1 + \frac{e_1 M}{m} + \left[ \left( 1 + \frac{e_1 M}{m} \right)^2 + \frac{\zeta v_1^2}{g w_s} \right]^{\frac{1}{2}} = 9.9674$$

按拉伸弹性模量  $E_1 = 1.96 \times 1010 \text{ N/m}^2$  进行计算,双模量圆板动力因数与单模量圆板动力因数误差为 2.33%;按压缩弹性模量  $E_2 = 2.94 \times 1010 \text{ N/m}^2$  进行计算,双模量圆板动力因数与单模量圆板动力因数误差为 1.40%。从以上计算可知,本文所选取的双模量圆板的动力因数与单模量圆板的动力因数误差不很大,但是冲击重物的质量与冲击重物冲击前瞬间具有的速度对动力因数的影响要比其他因素大些。

本文是在保守系统中应用能量守恒原理导出了双模量圆板受到冲击荷载时的动力因数,其中并未计及冲击处物体局部的塑性变形。在推导动力因数时,考虑到双模量圆板质量的影响,例如将双模量圆板的全部分布质量的一部份折算到冲击点,在该点它只有一个集中的相当质量,成为只有一个自由度的弹性系统。对于较复杂的双模量结构系统可化为只有少数几个自由度的弹性系统。只要知道冲击物在冲击前瞬间的速度或落体高度即可求出动力因数,而不管冲击的方向如何。本文是将对杆件系统求动力因数的方法推广并应用到双模量圆板中。只要双模量圆板被冲击点的动力位移和双模量圆板的弹性力成正比,本文所述的方法就可使用。对于被冲击的被冲击的总是希望动力因数小,这可以用如下的方法来实现降低落体高度或减少冲击前瞬间的速度,减少双模量圆板的刚度或增大其柔度,这样可使静力挠度增大;增大被冲击系统的重量或减少冲击物的重量。本文所述的方法也可推广应用于双模量矩形板、柱壳或旋转壳中,但是要知道这些双模量结构的振形曲面的函数表达式。同时算例分析还表明,冲击重物的质量与冲击重物冲击前瞬间具有的速度对动力因数的影响要比其他因素大些。

## 4 结 论

(1)采用弹性理论建立了双模量圆板在外荷载作用下的静力平衡方程,利用此静力平衡方程确定了双模量圆板的中性面位置,建立了双模量圆板在外荷载作用下的弯曲微分方程,并求得了圆板在集中荷载作用下的静力挠度表达式。

(2)在考虑了冲击物和被冲击双模量圆板的质量影响基础上,将对杆件系统求动力因数的方法推广并应用到双模量圆板中,采用能量法及相当质量法将具有分布质量的双模量圆板转化为只有一个集中质量的弹性系统,从而导出双模量圆板在冲击荷载作用下的动力因数。

(3)冲击重物的质量与冲击重物冲击前瞬间具有的速度对动力因数的影响要比其他因素大些。

## 参考文献 References

- [1] MEDRI G. A nonlinear elastic model for isotropic materials with different behavior in tension and compression[J]. Transactions of the ASME, 1982, 26(104): 26-28.
- [2] BERT C W, REDDY J N, CHAO W C, et al. Vibration of thick rectangular plates of bimodulus composite material [J]. Journal of Applied Mechanics, 1981, 48(2): 371-376.
- [3] SRINIVASAN R S, RAMACHANDRA L S. Axisymmetric nonlinear dynamic response of bimodulus annular plates[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1990, 112(2): 202-205.

- [4] 阿巴尔楚米扬. 不同模量弹性理论[M]. 郭瑞锋, 张允真, 译. 北京: 中国铁道出版社, 1986: 11-22.  
AMBARTSUMYAN S A. Elasticity theory of different modulus[M]. WU Rui-Feng, ZHANG Yun-Zhen, Translated. Beijing: China Railway Press, 1986: 11-22.
- [5] 李战莉, 黄再兴. 双模量泡沫材料等效弹性模量的细观力学估算方法[J]. 南京航空航天大学学报, 2006, 38(4): 464-468.  
LI Zhan-li, HUANG Zai-xing. Meso-Mechanical method for estimating equivalent elastic modulus of foam-solid with double-modulus[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2006, 38(4): 464-468.
- [6] 曾纪杰. 对中柔度压杆的双模量理论的修正[J]. 机械强度, 2006, 28(3): 462-464.  
ZENG Ji-Jie. Revision of the formula with bimodulus intermediate column[J]. Journal of Mechanical Strength, 2006, 28(3): 462-464.
- [7] 蔡来生, 俞焕然. 拉压模量不同弹性物质的本构[J]. 西安科技大学学报, 2009, 29(1): 17-21.  
CAI Lai-sheng, YU Huan-ran. Constitutive relation of elastic materials with different elastic moduli in tension and compression[J]. Journal of Xi'an University of Science and Technology, 2009, 29(1): 17-21.
- [8] 罗战友, 夏建中, 龚晓南. 不同拉压模量及软化特性材料的柱形孔扩张问题的统一解[J]. 工程力学, 2008, 25(9): 79-84.  
LUO Zhan-you, XIA Jian-zhong, GONG Xiao-nan. Unified solution for expansion of cylindrical cavity in strain-softening materials with different elastic moduli in tension and compression[J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(9): 79-84.
- [9] 吴 莹, 赵永刚, 李世荣. 拉压弹性模量不等材料杆的纯弯曲及偏心压缩[J]. 甘肃工业大学学报, 2001, 21(1): 101-105.  
WU Ying, ZHAO Yong-gang, LI Shi-rong. Pure bend and Excentrical Compression of Rod Made of Material with Nonidentical Elastic Modulus of Tension and Compression[J]. Journal of Gansu University of Technology, 2001, 21(1): 101-105.
- [10] 王子昆. 拉压不同模量圆柱薄壳在均匀轴压下的对称失稳[J]. 西安交通大学学报, 1989, 23(6): 94-100.  
WANG Zi-kun. Symmetrical Buckling of Circular Cylindrical Thin Shell With Different Elastic Moduli Intension and Compression Under A Well-Distributed Axial Load[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 1989, 23(6): 94-100.

## Elastic dynamic calculation for bimodulous circular plate under the condition of impact load

WU Xiao, YANG Li-jun, HUANG Chong

(Dept. of Civil and Architectural Engineering, Hunan University of Arts and Science, Changde 415000, China)

**Abstract:** Static equilibrium equation for bimodulous circular plate under the condition of external loads was established by using elastic theory. The location of neutral plane in bimodulous circular plate was determined by the utilization of static equilibrium equation. The bending deformation differential equations for bimodulous circular plate was derived, and the static deflection expression for bimodulous circular plate under the condition of impact load was acquired. On this basis, the influence of the mass of impact objects and shocked bimodulous circular plate were considered, the bimodulous circular plate with distributed mass was transformed into a flexible system with only a concentrated mass, and the dynamic factor for bimodulous circular plate under the condition of impact load was derived. The computational result indicates that the mass and the momentary speed before the shocked mement of impact objects had more influence on dynamic factor than other factors.

**Key words:** bimodulous; circular plate; impact load; dynamic factor