

增量型横观各向同性损伤理论与数值分析

刘俊卿, 李红孝, 李 倩

(西安建筑科技大学理学院, 陕西 西安 710055)

摘 要: 为了研究损伤对材料力学性能的影响, 以横观各向同性损伤理论为基础, 引入损伤变量因子, 构造有效损伤张量 $M(D)$, 建立了增量型有效应力方程. 应用塑性流动的分析方法, 得到弹性应变和有效弹性应变之间的关系. 根据 von Mises 屈服准则, 得到塑性四阶对称刚度张量. 通过对带孔平板拉伸的有限元分析, 探讨了考虑损伤后材料应力集中处应力-应变曲线的变化规律, 给出损伤对材料的影响关系. 结果表明, 损伤加快了材料变形的发展.

关键词: 横观各向同性损伤; 增量型; 弹-塑性变形; 刚度张量; 有限元模拟

中图分类号: TU435

文献标志码: A

文章编号: 1006-7930(2013)01-0001-04

现代工程材料, 从毛培制造、冶炼到各种冷热工艺的加工形成过程, 不可避免的使工程材料的微细结构发生变化, 在其内部或表面产生微小缺陷(如小于 1 mm 的裂纹或空隙等). 在一定的外部因素作用下, 引起材料的微细结构缺陷扩展, 导致材料宏观力学性能劣化, 最终形成宏观裂缝或工程材料的破坏. 材料或构件的工作过程是不断损伤的过程, 用无损材料的本构关系描述受损材料的力学性能是不合理的, 因此合理的方法应该是将损伤耦合到本构方程中进行分析 and 计算, 得到损伤本构关系是有必要的. 连续介质力学认为这些微缺陷是均匀分布的, 因此, 对于材料的这种损伤的力学作用, 通过与应力、应变及温度的场概念一致的连续损伤变量场——损伤场表述. 本文以此理论为基础, 采用张量损伤变量^[1]来描述材料不同方向的损伤. 以切线刚度法为基础导出弹塑性刚度损伤张量, 并将此写入有限元分析软件 ABAQUS 的用户子程序 UMAT 中, 对带孔平板进行数值分析.

1 有效应力

假设一均匀受拉直杆, 初始面积和受损后的面积分别为 S 和 \tilde{S} , 引入损伤变量 D , 被定义为

$$D = \frac{S - \tilde{S}}{S} \quad (1)$$

所以有效柯西应力 $\bar{\sigma}$ 和名义柯西应力 σ 之间的关系可以被表示为

$$\bar{\sigma} = (I - D) - 1 : \sigma \quad (2)$$

式中: 式 $\sigma, \bar{\sigma}, D$ 均为二阶张量, φ_{ij} 被定义为损伤因子, 记 $\varphi_{ij} = (I - D_{ij}) - 1$. 构造对称损伤影响张量

$$M_{ijmn} = \frac{1}{2}(\varphi_{im}\delta_{jn} + \varphi_{in}\delta_{jm}) \quad (3)$$

所以有效应力可以表示为

$$\bar{\sigma}_{ij} = M_{ijmn}(D)\sigma_{mn} \quad (4)$$

若记 $\bar{\sigma} = [\bar{\sigma}_1 \quad \bar{\sigma}_2 \quad \bar{\sigma}_3 \quad \bar{\sigma}_4 \quad \bar{\sigma}_5 \quad \bar{\sigma}_6]^T$, $\sigma = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \quad \sigma_6]^T$, 式(4)可以写为

$$\bar{\sigma}_i = M(D)_i \sigma_j \quad (5)$$

式中: D_i 为损伤因子张量 Φ 的三个主值, 下标不求和.

对于横观各向同性材料, 选择损伤有效张量 M_{ij} 为^[1]

收稿日期: 2012-06-25 修改稿日期: 2013-01-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51178387)

作者简介: 刘俊卿(1957-), 男, 陕西神木人, 教授, 主要从事工程力学的教学与研究.

$$M_{ij}(D) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-D_1} & & & & \\ & \frac{1}{1-D_1} & & & \\ & & \frac{1}{1-D_3} & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{(1-D_1)(1-D_3)}} & \\ & & & & \frac{1}{\sqrt{(1-D_3)(1-D_1)}} \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{(1-D_1)(1-D_1)}} \end{bmatrix} \quad (6)$$

基于增量理论,定义增量型有效应力方程如下:

$$d\bar{\sigma} = M:d\sigma \quad (7)$$

即:

$$d\bar{\sigma}_{ij} = M_{ijmn} d\sigma_{mn}$$

有效偏应力增量为

$$d\bar{s}_{nm} = d\sigma_{nm} - \delta_{nm} d\sigma_{kk}/3 = M_{nmij} d\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{nm} \varphi_{kl} d\sigma_{kl} \quad (8)$$

对有效偏应力方程 $d\bar{s}_{ij} \neq M_{ijmn} d\sigma_{mn}$, 但是当 $d\bar{s}_{nm} = 0$ 是成立.

2 弹性变形与损伤

根据 Lemaitre 的应变等效原理,有

$$D = 0: \sigma = \tilde{E}\varepsilon \quad (9)$$

$$D \neq 0: \bar{\sigma} = E\varepsilon \quad (10)$$

由式(2)、(9)、(10)得

$$D = 1 - (E) \quad (11)$$

$$\tilde{E} = (1-D)E \quad \text{或} \quad \tilde{E}^{-1} = (1-D) - 1E^{-1} = ME^{-1} \quad (12)$$

$$\sigma = E(1-D)\varepsilon \quad (13)$$

对于受损材料,弹性余能为^[2]

$$\rho\psi = \frac{1}{2}\sigma:\tilde{E}^{-1}:\sigma \quad (14)$$

式中: ψ 表示弹性余能.

对于各向同性受损材料,由式(12)得柔度矩阵的分量形式为

$$\tilde{E}_{ijmn}^{-1} = E_{ijkl} - 1M_{klmn} = \left[\frac{1+\nu}{E}\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\delta_{kl} \right] M_{klmn} \quad (15)$$

式中: δ_{ij} 是 Kronecker delta, $i=j:\delta_{ij}=1, i \neq j:\delta_{ij}=0$.

将(15)式代入(14)中得

$$\rho\psi = \left(\frac{1+\nu}{2E}\sigma_{ij}^2 - \frac{\nu}{2E}(tr\sigma_{ij})^2 \right) M_{klmn} \quad (16)$$

式中: $tr\sigma_{ij}$ 表示主应力之和.

定义弹性应变增量

$$d\varepsilon^e = d\lambda_e \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \quad (17)$$

将(16)代入(17)中得

$$d\varepsilon_{mn}^e = d\lambda_e M_{mij} \left(\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk} \right) = d\lambda_e M_{mij} \left(\frac{1+\nu}{E}\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\delta_{kl} \right) \sigma_{kl} = d\lambda_e M_{mij} E_{ijkl} - 1\sigma_{kl} \quad (18)$$

定义有效弹性应变变为

$$d\bar{\varepsilon}^e = d\lambda_e \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\sigma}} = d\lambda_e E_{ijkl} - 1\sigma_{kl} \quad (19)$$

在弹性范围内,令 $d\sigma_{kl} = d\lambda_e \sigma_{kl}$, 可得到弹性应变和有效弹性应变之间的关系

$$\begin{cases} d\tilde{\epsilon}_{mn}^e = M_{mnij} d\epsilon_{ij} \\ d\epsilon_{ij} = M_{ijmn}^{-1} d\tilde{\epsilon}_{mn}^e \end{cases} \quad (20)$$

3 塑性变形与损伤

通过引用 von Mises 屈服准则^[3], 损伤材料屈服时方程如下

$$F_p = (\sigma, D, R) = F_p(\bar{\sigma}, R) = \bar{\sigma}_p - \{R_0 + R(P)\} = 0 \quad (21)$$

其中 R_0 初始应变硬化门坎值, $R(P)$ 是增量应变硬化门槛值, p 为等效塑性应变, $\bar{\sigma}_p$ 为有效 von Mises 应力. 则在材料屈服时所有 $J_2 = \frac{1}{3}\sigma_s^2$, 所以有效 von Mises 应力为

$$\bar{\sigma}_p = \bar{\sigma}_s = \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{s}_{ij} \tilde{s}_{ij}} \quad (22)$$

定义有效塑性应变增量为^[4]

$$d\epsilon_{mn}^p = d\lambda_p \frac{\partial \bar{\sigma}_p}{\partial \tilde{\sigma}_{mn}} = d\lambda_p \frac{3}{2} \frac{\tilde{s}_{mn}}{\bar{\sigma}_p} \frac{\partial \tilde{s}_{ij}}{\partial \tilde{\sigma}_{mn}} = M_{ijmn} d\lambda_p \frac{3}{2} \frac{\tilde{s}_{mn}}{\bar{\sigma}_p} \quad (23)$$

定义塑性应变增量^[4]

$$d\epsilon_{mn}^p = d\lambda_p \frac{\partial \sigma_p}{\partial \sigma_{mn}} = d\lambda_p \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{\sigma_p} \quad (24)$$

两个应变张量之间的关系为

$$\begin{cases} d\tilde{\epsilon}_{mn}^p = M_{ijmn}^{-1} d\epsilon_{ij}^p \\ d\epsilon_{ij}^p = M_{ijmn} d\tilde{\epsilon}_{mn}^p \end{cases} \quad (25)$$

在无损伤小应变情况下, 应变增量可以分成弹性和塑性两部分^[5], 即

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (26)$$

于是利用弹性应力 - 应变关系, 可将 $d\sigma_{ij}$ 表示为

$$d\sigma_{ij} = k_{ijkl}^e d\epsilon_{kl}^e = k_{ijkl}^e (d\epsilon_{kl} - d\epsilon_{kl}^p) = k_{ijkl}^e d\epsilon_{kl} - k_{ijkl}^e d\lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial \sigma_{mn}} \quad (27)$$

其中: $d\lambda_p = \frac{1}{Q} \frac{\partial F_p}{\partial \sigma_{mn}} K_{ijkl}^e d\epsilon_{kl}$, $Q = H' + \frac{\partial F_p}{\partial \sigma_{kl}} K_{kl ij}^e \frac{\partial F_p}{\partial \sigma_{rp}}$

材料进入塑性后, 强化模量 H' 的表达式为

$$H' = \frac{d\sigma}{d\epsilon} = A * B * \epsilon^{B-1} \quad (28)$$

其中: $\sigma = A\epsilon^B + C$, A, B, C 是和材料有关的常数.

将 $d\lambda_p$ 代入(27), 在有效应力空间得到应力 - 应变增量的关系式为

$$\begin{aligned} d\tilde{\sigma}_{mn} &= \tilde{K}_{mnij}^{ep} d\tilde{\epsilon}_{ij} = \tilde{K}_{mnij}^e d\tilde{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{Q} \tilde{K}_{mnij}^e \frac{\partial F_p}{\partial \tilde{\sigma}_{kl}} \tilde{K}_{klrp}^e d\tilde{\epsilon}_{rp} \frac{\partial F_p}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} \\ &= \left[\tilde{K}_{mnij}^e - \frac{1}{Q} \tilde{K}_{nmrp}^e \frac{\partial F_p}{\partial \tilde{\sigma}_{kl}} \tilde{K}_{kl ij}^e \frac{\partial F_p}{\partial \tilde{\sigma}_{rp}} \right] d\tilde{\epsilon}_{ij} \end{aligned} \quad (29)$$

其中 \tilde{K}_{mnij}^{ep} 为有效刚度张量, 有式(7)、(20)、(25) 得应力 - 应变关系为

$$d\sigma_{ij} = M_{ijkl}^{-1} \tilde{K}_{klrs}^{ep} M_{rs mn}^{-1} d\tilde{\epsilon}_{mn} = K_{ijmn} d\epsilon_{mn} \quad (30)$$

其中 k_{ijmn} 是四阶对称刚度张量, 将写入 ABAQUS 子程序 UMAT 中, 进行分析.

4 带孔平板损伤力学分析

表 1 材料常数

Tab. 1 Material constants

E	Mu	σ_s	A	B	C
200 000 MPa	0.3	400 MPa	700 MPa	0.5	400 MPa

为了验证以上理论的正确性, 说明考虑损伤对材料的影响, 算例选取方形横观各向同性损伤平板, 在中心有一半径为 5 mm 的小圆孔, 材料常数见表 1. 加载条件、边界条件、有限元网格如图 1 所示, 几何尺寸为 $a=100$ mm, $r=5$ mm, 板厚 $t=1$ mm.

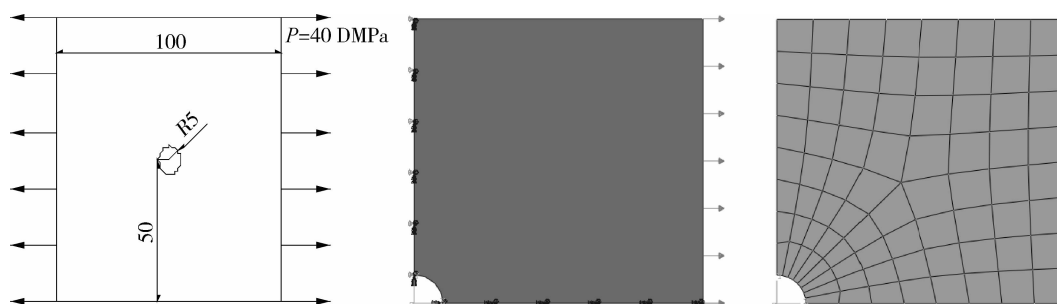


图 1 几何图、边界条件、有限元网格

Fig. 1 Geometric figure, boundary conditions and finite element grid

在算例中由于问题的对称性,选取模型的 1/4 分析,计算了三种工况,(1)不考虑损伤,即 $D1=D2=D3=0$; (2)三个主方向的损伤变量 $D1=D2=0.3, D3=0$; (3)三个主方向的损伤变量 $D1=D2=0.5, D3=0$. 通过计算,将这三种情况下应力集中处的应力-应变关系图绘制在同一个坐标系中,如图 2. 通过对图的分析得到损伤对材料的影响. 通过对各工况的比较,结果如下: (1)在开始阶段,应变随应力的增加而迅速增加,屈服之后,由于应变强化作用,应力与应变继续同步增加,到达峰值点后,应变增加,应力减小,说明材料已经局部颈缩. (2)在相同应变情况下,损伤变量的大小直接影响力值的大小. (3)虽然有损和无损有相同的变化趋势,但是两者进入颈缩的时间不同,损伤变量越大,进入越早,损伤降低了材料的整体刚度.

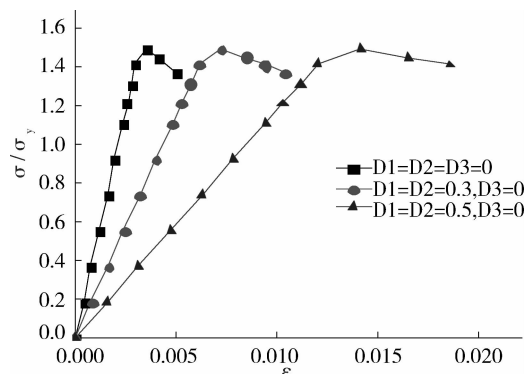


图 2 损伤效应下的应力应变图

Fig. 2 The figure of damage effects under stress and the strain

5 结 论

本文在增量型损伤理论的框架下,进行理论推导,导出考虑损伤效应的增量型弹-塑性本构方程,得到对称的刚度矩阵,将此刚度矩阵通过用户子程序 UMAT 的方式写入 ABAQUS 有限元分析中. 对单向拉伸板进行了模拟,验证了建立的弹塑性本构关系,探讨了应力集中处应力-应变曲线的变化规律,给出损伤对材料的影响关系. 结果表明,损伤加快了材料变形的发展. 主要做了以下几方面:

(1)构造增量型有效应力方程. (2)定义增量型应力-应变关系. (3)导出四阶对称弹塑性损伤刚度矩阵. (4)对推导出的损伤本构关系进行数值模拟,验证其有效性.

参考文献 References

- [1] Chow CL, Wang J. An anisotropic theory of elasticity for continuum damage mechanics[J]. International Journal of Fracture, 1987, 33: 3-16.
- [2] 余天庆. 损伤理论及其应用[M]. 北京:国防工业出版社, 1993.
YU Tian-qing. Damage theory and its application[M]. Beijing: Defense Industry Press, 1993.
- [3] Chow CL, Wang J. An anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile fracture[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1987, 27: 547-558.
- [4] 王勖成. 有限元单元法[M]. 北京:清华大学出版社, 2003: 560-561.
WANG Xu-cheng. Finite element method[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1993: 560-561.
- [5] 王勖成, 邵敏. 有限元单元法基本原理和数值方法[M]. 2 版. 北京:清华大学出版社, 1993: 500-504.
WANG Xu-cheng, SHAO Min. The basic principle and method of finite element numerical method[M]. The second edition. Beijing: Tsinghua University Press, 1993: 500-504.

(下转第 9 页)

- [11] Viswanath K G, Prakash K B, Anant Desai. Seismic Analysis of Steel Braced Reinforced Concrete Frames[J]. International Journal of Civil and Structure Engineering, 2010,1(1):112-114.
- [12] 吴永河,李胜强,习会峰,等. 后加交叉钢支撑对 RC 框架结构的影响研究[J]. 结构工程师,2011,8(4):50-57.
WU Yong-he, LI sheng-qiang, XI hui-feng, et al. Study on the Effect of Crossed Steel Bracing on RC Frames[J]. Structure Engineering, 2011,8(4): 50-57.
- [13] GB50011-2010 建筑抗震设计规范[S]. 北京:中国建筑工业出版社,2010.
GB50011-2010 Code for Seismic Design of Building[S]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2010.
- [14] 北京金土木软件技术有限公司. PUSHOVER 分析在建筑工程抗震设计中的应用[M]. 北京:中国建筑工业出版社,2012.
Civil King Software Technology Co., Ltd. PUSHOVER analysis on building engineering seismic design of application[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2012.

PUSHOVER analysis on inverted V-shape steelbrace strengthening RC frame structure

WU Yong-he, XI Hui-feng, MU Jian-chun

(Guangdong University of Petrochemical Technology, Maoming 525000, China)

Abstract: In order to reveal the performance of RC frame structure with inverted V-shape steel brace under function of rare earthquake, 4-layer RC frame structure and the RC structure with inverted V-shape steel brace as well as PUSHOVER on model is performed. The evaluation on anti-seismic performance is performed under function of rare earthquake for structure from such aspects as base shear- top displacement curve, floor displacement curve and hinged out mechanism. The results show that under function of rare occurrence earthquake, the base shear while RC frame structure with inverted V-steel brace reaching the performance point is greater than the one of original RC frame structure, and the top displacement is less than the one of original RC frame structure. As the first anti-seismic defensive line, the steel brace can absorb most earthquake energy to play the effective protection for beam and column elements. Additionally, the steel brace is provided with greater practical significance for resisting the progressive collapse.

Key words: *Inverted V-shape brace; RC frame structure; PUSHOVER analysis; seismic behavior*

Biography: WU Yong-he, Maoming 525000, P. R. China, Tel:0086-13828670385, E-mail:wuyonghe0001@163.com

(上接第 4 页)

Increment transverse isotropic damage theory and numerical analysis

LIU Jun-qing, LI Hong-xiao, LI Qian

(School of Science, Xi'an Univ. of Arch. & Tech., Xi'an 710055, China)

Abstract: In order to research the damage on the mechanical properties of materials the increment of effective stress equation is established, based on the transverse isotropic damage theory as a foundation, by introducing damage variable factor and the tectonic effective damage tensor $M(D)$. Similar to the plastic flow analysis method the relationship between elastic-strain the effective elastic-strain is acquired. By the von Mises yield criterion, plastic fourth-order symmetric stiffness tensor is obtained. The stress-strain curve of variation is discussed through the uniaxial tensile and finite element of a flat plate with a hole, giving the influence of damage on the material. The results show that the deformation is accelerated by the material damage.

Key words: *transverse isotropic damage; increment; the plastic deformation; stiffness tensor; finite element simulation*

Biography: LIU Jun-qing, Professor, Xi'an 710055, P. R. China, Tel:0086-13991319036, E-mail:liujunqingjd@126.com