

# 拉压弹性模量不同矩形截面杆的弯曲

吴晓, 罗佑新

(湖南文理学院, 湖南 常德 415000)

**摘要:**研究了拉压弹性模量不同矩形截面悬臂杆由于自由端面上受切向集中力作用而产生的横向弯曲问题. 拉压弹性模量不同矩形截面悬臂杆弯曲时, 会形成弹性模量不同的拉伸区和压缩区. 把拉压弹性模量不同悬臂杆看成两种材料组成的层合杆, 先确定悬臂杆中性层的位置, 再利用弹性理论推导出了悬臂杆的应力公式, 把该应力公式计算结果与材料力学方法计算结果进行了比较. 算例分析表明, 采用材料力学方法研究拉压弹性模量不同悬臂杆的弯曲是有其局限的.

**关键词:**弹性模量; 矩形截面; 悬臂杆; 弯曲; 材料力学

**中图分类号:** O 343.5

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1006-7930(2013)04-0493-06

众所周知, 工程实际中的石墨、增强复合材料、铸铁、混凝土、金属合金、陶瓷等许多材料都具有拉压弹性模量不同的特性. 所以, 用拉压弹性模量不同本构关系对这些材料制成的结构进行计算分析已备受关注. 对于拉压弹性模量不同的材料, 弹性系数不仅依赖于结构材料, 还根据各点位移或应力状态的不同而不同, 亦即与结构材料、形状、边界条件及外载荷有关. 在梁、弹性平面等问题的结构中, 已开始考虑材料的拉压弹性模量不同特性. 文献[1-5]研究了拉压弹性模量不同材料本构关系, 文献[6-10]研究了拉压弹性模量不同板的弯曲问题, 文献[11]研究了拉压弹性模量梁的偏心问题. 对于混凝土等拉压弹性模量不同材料的悬臂杆弯曲, 理所当然应采用拉压弹性模量不同理论来研究, 但是至今未见有关采用拉压弹性模量不同理论研究拉压弹性模量不同悬臂杆的弯曲问题的文献. 需要指出的是, 要完全精确地求解这类问题是十分困难的. 一方面在实际问题中, 悬臂杆两端面上外力分布情况往往是不清楚的, 而只知道它们的静力效应. 另外, 即使知道了外力在端面上的分布情况, 也很难得到一组解答能精确地满足端面上的边界条件. 但是, 如果杆足够长, 我们就能按局部性原理对其端面处的边界条件进行放松, 而使问题得到解决. 由此所得的结果, 在一定意义上仍算是精确解. 所以, 本文研究了拉压弹性模量不同矩形截面悬臂杆的横向弯曲问题.

## 1 确定悬臂杆的中性层

图1所示弹性模量不同悬臂杆由于自由端面上受切向集中力作用而产生横向弯曲, 会形成弹性模量不同的拉伸区和压缩区. 将固定端面的拉伸区域压缩区交界线上截面宽度的中点作为坐标原点, 杆的中心轴线作为  $z$  轴,  $y$  轴代表中性层位置.

由材料力学可知拉压弹性模量不同悬臂杆弯曲时的应力和应变关系为

$$\sigma'_{z1} = \frac{E_1 x}{\rho}, \sigma'_{z2} = \frac{E_2 x}{\rho} \quad (1)$$

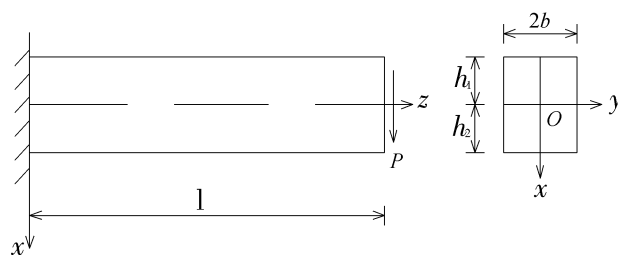


图1 拉压弹性模量不同悬臂杆

Fig. 1 Bimodulus cantilever bar

收稿日期: 2012-09-06 修改稿日期: 2013-07-20

基金项目: 湖南省科技计划项目资助(2008FJ3067); 湖南“十一五”重点建设学科项目资助

作者简介: 吴晓(1965-), 男, 湖南常德人, 教授, 主要从事结构振动理论方面研究.

式中:  $E_1$  为拉伸区弹性模量;  $E_2$  为压缩区弹性模量. 以上各式, 下角标为“1”代表拉伸区, 下角标为“2”代表压缩区, 以下类同.

由弹性理论可知拉压弹性模量不同悬臂杆弯曲时横截面内力应满足以下关系

$$\begin{aligned} \int_{-h_1}^0 \sigma'_{z1} dA + \int_0^{h_2} \sigma'_{z2} dA &= 0 \\ \int_{-h_1}^0 \sigma'_{z1} x dA + \int_0^{h_2} \sigma'_{z2} x dA &= M(z) \end{aligned} \quad (2)$$

把式(1)代入式(2)中可以求得

$$h_1 = \frac{\sqrt{E_2} h}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M(z)}{E_1 I} \quad (3)$$

式中:  $I = \frac{2bh_1^3}{3} + \frac{2E_2bh_2^3}{3E_1}$ ,  $h = h_1 + h_2$ .

所以, 材料力学推导出拉压弹性模量不同悬臂杆的应力表达式为

$$\sigma'_{z1} = \frac{M(z)x}{I}, \quad \sigma'_{z2} = \frac{E_2 M(z)x}{E_1 I} \quad (4)$$

## 2 悬臂杆应力公式

图1所示拉压弹性模量不同悬臂杆弯曲时, 会形成弹性模量不同的拉伸区和压缩区. 所以, 可假设轴向正应力同材料力学的结果一样, 而纵向纤维之间无挤压即

$$\begin{aligned} \sigma_{z1} &= -\frac{P(l-z)x}{I}, \quad \sigma_{z2} = -\frac{E_2 P(l-z)x}{E_1 I}, \\ \sigma_{x1} &= \sigma_{x2} = 0, \quad \sigma_{y1} = \sigma_{y2} = 0, \quad \tau_{xy1} = \tau_{xy2} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

由弹性理论可知, 把式(5)代入平衡方程及贝尔特拉米-米歇尔方程中可得以下各式

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial z} = 0, \frac{\partial \tau_{zy1}}{\partial z} = 0, \frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy1}}{\partial y} = -\frac{Px}{I} \\ \nabla^2 \tau_{zy1} = 0, \nabla^2 \tau_{xz1} = -\frac{P}{(1+\mu_1)I} \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{xz2}}{\partial z} = 0, \frac{\partial \tau_{zy2}}{\partial z} = 0, \frac{\partial \tau_{xz2}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy2}}{\partial y} = -\frac{E_2 Px}{E_1 I} \\ \nabla^2 \tau_{zy2} = 0, \nabla^2 \tau_{xz2} = -\frac{E_2 P}{(1+\mu_2)E_1 I} \end{cases} \quad (7)$$

式中:  $\mu_1$  为拉伸区泊松比;  $\mu_2$  为压缩区泊松比.

现引入应力函数  $\varphi_i(x, y)$  使

$$\tau_{xz1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{Px^2}{2I} + f_1(y), \quad \tau_{zy1} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \quad (8)$$

$$\tau_{xz2} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{E_2 Px^2}{2E_1 I} + f_2(y), \quad \tau_{zy2} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \quad (9)$$

把式(8)、式(9)分别代入式(6)、式(7)中的第二分式中, 利用弹性理论可以求得

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_1 = \frac{\mu_1}{1+\mu_1} \cdot \frac{Py}{I} - \frac{df_1(y)}{dy} \\ \nabla^2 \varphi_2 = \frac{\mu_2}{1+\mu_2} \cdot \frac{E_2 Py}{E_1 I} - \frac{df_2(y)}{dy} \end{cases} \quad (10)$$

由弹性理论可知拉压弹性模量不同矩形截面悬臂杆的应力边界条件为

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{ds} = \left[ \frac{Px^2}{2I} - f_1(y) \right] \frac{dy}{ds} \\ \frac{d\varphi_2}{ds} = \left[ \frac{E_2 Px^2}{2E_1 I} - f_2(y) \right] \frac{dy}{ds} \end{cases} \quad (11)$$

对于图1所示矩形截面悬臂杆在垂直于 $y$ 轴的左右边界周边上有 $\frac{dy}{ds}=0$ ,在上边界有 $x^2=h_1^2$ ,下边界有 $x^2=h_2^2$ .

因此取

$$f_1(y) = \frac{Ph_1^2}{2I}, f_2(y) = \frac{E_2Ph_2^2}{2E_1I} \quad (12)$$

所以,由弹性理论可知图1所示矩形截面悬臂杆的边界条件为

$$y = \pm b, \varphi_1 = \varphi_2 = 0; x = -h_1, \varphi_1 = 0, x = h_2, \varphi_2 = 0 \quad (13)$$

把式(12)代入式(10)中可以得到

$$\nabla^2 \varphi_1 = \frac{\mu_1}{1+\mu_1} \cdot \frac{Py}{I}, \nabla^2 \varphi_2 = \frac{\mu_2}{1+\mu_2} \cdot \frac{E_2Py}{E_1I} \quad (14)$$

由式(13)第一个条件可以取式(14)非齐次特解分别为

$$\varphi'_1 = \frac{\mu_1}{1+\mu_1} \frac{P}{6I} (y^2 - b^2)y, \varphi'_2 = \frac{\mu_2}{1+\mu_2} \frac{E_2Py}{6E_1I} (y^2 - b^2) \quad (15)$$

取式(14)齐次通解分别为

$$\varphi''_1 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m ch \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{m\pi y}{b}, \varphi''_2 = \sum_{m=1}^{\infty} B_m ch \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (16)$$

所以,拉伸区与压缩区的应力函数分别为

$$\varphi_1 = \varphi'_1 + \varphi''_1 = \frac{\mu_1}{1+\mu_1} \frac{Py}{6I} (y^2 - b^2) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m ch \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (17)$$

$$\varphi_2 = \varphi'_2 + \varphi''_2 = \frac{\mu_2}{1+\mu_2} \frac{E_2Py}{6E_1I} (y^2 - b^2) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m ch \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (18)$$

把式(17)、式(18)分别代入式(13)第二个条件中可得

$$\frac{\mu_1}{1+\mu_1} \frac{Py}{6I} (y^2 - b^2) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m ch \frac{m\pi h_1}{b} \sin \frac{m\pi y}{b} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\mu_2}{1+\mu_2} \frac{E_2Py}{6E_1I} (y^2 - b^2) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m ch \frac{m\pi h_2}{b} \sin \frac{m\pi y}{b} = 0 \quad (20)$$

对式(19)、式(20)乘以 $\sin \frac{m\pi y}{b}$ ,从 $-b$ 到 $b$ 积分,并注意三角函数的正交性可以求得

$$\begin{cases} A_m = (-1)^{m+1} \frac{2\mu_1 Pb^3}{(1+\mu_1)I\pi^3 m^3 ch \frac{m\pi h_1}{b}} \\ B_m = (-1)^{m+1} \frac{2\mu_2 E_2 Pb^3}{(1+\mu_2)E_1 I\pi^3 m^3 ch \frac{m\pi h_2}{b}} \end{cases} \quad (21)$$

所以,拉伸区与压缩区的应力函数的表达式为

$$\varphi_1 = \frac{\mu_1}{1+\mu_1} \frac{Py}{6I} (y^2 - b^2) + \frac{\mu_1}{1+\mu_1} \frac{2Pb^3}{\pi^3 I} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} ch \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{m\pi y}{b}}{m^3 ch \frac{m\pi h_1}{b}} \quad (22)$$

$$\varphi_2 = \frac{\mu_2}{1+\mu_2} \frac{E_2Py}{6E_1I} (y^2 - b^2) + \frac{\mu_2}{1+\mu_2} \frac{2E_2 Pb^3}{\pi^3 E_1 I} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} ch \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{m\pi y}{b}}{m^3 ch \frac{m\pi h_2}{b}} \quad (23)$$

利用式(8)、式(9)、式(22)、式(23)可以求得拉伸区和压缩区的应力分量表达式分别为

$$\left\{ \begin{aligned} \tau_{zx1} &= \frac{P}{2I}(h_1^2 - x^2) + \frac{\mu_1}{1+\mu_1} \frac{P}{6I}(3y^2 - b^2) \\ &\quad + \frac{\mu_1}{1+\mu_1} \frac{2Pb^2}{\pi^2 I} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} ch \frac{m\pi x}{b} \cos \frac{m\pi y}{b}}{m^2 ch \frac{m\pi h_1}{b}} \\ \tau_{zy1} &= \frac{\mu_1}{1+\mu_1} \frac{2Pb^2}{\pi^2 I} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} sh \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{m\pi y}{b}}{m^2 ch \frac{m\pi h_1}{b}} \end{aligned} \right. \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tau_{zx2} &= \frac{E_2 P}{2E_1 I}(h_2^2 - x^2) + \frac{\mu_1}{1+\mu_1} \frac{E_2 P}{6E_1 I}(3y^2 - b^2) \\ &\quad + \frac{\mu_2}{1+\mu_2} \frac{2E_2 Pb^2}{\pi^2 E_1 I} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} ch \frac{m\pi x}{b} \cos \frac{m\pi y}{b}}{m^2 ch \frac{m\pi h_2}{b}} \\ \tau_{zy2} &= \frac{\mu_2}{1+\mu_2} \frac{2E_2 Pb^2}{\pi^2 E_1 I} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} sh \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{m\pi y}{b}}{m^2 ch \frac{m\pi h_2}{b}} \end{aligned} \right. \quad (25)$$

式(24)、式(25)中的第一项即为材料力学给出的拉压弹性模量不同矩形截面杆的剪应力  $\tau_{zx}$  计算公式

$$\tau_{zx1} = \frac{P}{2I}(h_1^2 - x^2), \tau_{zx2} = \frac{E_2 P}{2E_1 I}(h_2^2 - x^2) \quad (26)$$

### 3 算例分析

已知某拉压弹性模量不同的矩形截面杆的计算参数为:  $E_1 = 93.27 \text{ GPa}$ ,  $E_2 = 124.05 \text{ GPa}$ ,  $\mu_1 = 0.22$ ,  $\mu_2 = 0.2926$ . 下面把式(24)、式(25)计算的  $\tau_{zx}$  值均列在表1、表2中. 表1中括号内的数值为材料力学方法式(26)计算的  $\tau_{zx}$  值.

对由式(24)~(26)计算结果得到的表1、表2进行分析可知,按弹性力学方法计算拉压弹性模量不同材料及拉压弹性模量相同材料截面杆的最大剪应力在  $x=0, y=b$  处;而按材料力学方法计算拉压弹性模量不同材料及拉压弹性模量相同材料矩形截面杆的剪应力在  $x=0, y=b$  处与  $x=0, y=0$  处是一样的. 拉压弹性模量不同材料及拉压弹性模量相同材料矩形截面杆在  $x=0, y=0$  处剪应力按材料力学方法计算的结果大于弹性力学方法计算的结果,  $h/2b \leq 1$  时拉压弹性模量不同材料及拉压弹性模量相同材料矩形截面杆在  $x=0, y=b$  处剪应力按材料力学方法计算的结果小于弹性力学方法计算的结果.

表1  $\tau_{zx} (\times \frac{P}{b^2})$  值 ( $x=0, y=0$ )

Tab. 1 The value of  $\tau_{zx}$  when  $x=0, y=0$

$h/2b$	2	1	0.5	0.25
材料1				
$E_1 = 93.27 \text{ GPa}$ ,	0.185 1	0.357 0	0.658 5	1.238 8
$E_2 = 124.05 \text{ GPa}$	(0.199 9)	(0.399 8)	(0.799 6)	(1.599 2)
材料2				
$E_1 = 93.27 \text{ GPa}$ ,	0.184 7	0.354 8	0.652 7	1.236 1
$E_2 = 93.27 \text{ GPa}$ ,	(0.187 5)	(0.375 0)	(0.750 0)	(1.500)
材料3				
$E_1 = 124.05 \text{ GPa}$	0.184 0	0.349 6	0.627 9	1.168 7
$E_2 = 124.05 \text{ GPa}$	(0.187 5)	(0.375 0)	(0.750 0)	(1.500)

表2  $\tau_{zx} (\times \frac{P}{b^2})$  值 ( $x=0, y=b$ )

Tab. 2 The value of  $\tau_{zx}$  when  $x=0, y=b$

$h/2b$	2	1	0.5	0.25
材料1				
$E_1 = 93.27 \text{ GPa}$ ,	0.192 4	0.412 6	0.992 0	2.729 4
$E_2 = 124.05 \text{ GPa}$				
材料2				
$E_1 = 93.27 \text{ GPa}$ ,	0.193 1	0.417 7	1.018 1	2.836 1
$E_2 = 93.27 \text{ GPa}$ ,				
材料3				
$E_1 = 124.05 \text{ GPa}$	0.194 6	0.428 6	1.086 5	3.177 3
$E_2 = 124.05 \text{ GPa}$				

对表1进行分析,拉压弹性模量不同材料矩形截面杆在  $x=0, y=0$  处剪应力当  $h/2b=2$  时材料

力学方法计算结果与弹性力学方法计算结果的误差为 7.4%;拉压弹性模量相同材料矩形截面杆在  $x=0, y=0$  处剪应力当  $h/2b=2, h/2b=1$  时材料力学方法计算结果与弹性力学方法计算结果的最大误差分别为 1.30%、7.27%;随着  $h/2b$  比值减小材料力学方法计算结果与弹性力学方法计算结果的误差越大. 当  $h/2b \geq 2$  时,拉压弹性模量相同材料矩形截面杆在  $x=0, y=0$  处的剪应力采用材料力学方法计算的结果完全可以满足工程实际的需要,而  $h/2b \leq 2$  时拉压弹性模量不同材料矩形截面杆在  $x=0, y=0$  处剪应力只能按弹性力学方法计算.

对表 2 进行分析,拉压弹性模量不同材料及拉压弹性模量相同材料矩形截面杆在  $x=0, y=b$  处的最大剪应力  $h/2b \geq 1$  时按材料力学方法计算的结果小于弹性力学方法计算的结果. 当  $h/2b=2, h/2b=1$  时,拉压弹性模量不同材料矩形截面杆在  $x=0, y=b$  处的最大剪应力,材料力学方法计算结果与弹性力学方法计算结果的最大误差分别为 3.90%、3.10%;这说明当  $h/2b \geq 1$  时,拉压弹性模量不同材料矩形截面杆在  $x=0, y=b$  处的剪应力  $\tau_{xy}$  采用材料力学方法计算的结果完全可以满足工程实际的需要,而  $h/2b < 1$  时拉压弹性模量不同材料矩形截面杆在  $x=0, y=b$  处的剪应力  $\tau_{xy}$  只能按弹性力学方法计算.

#### 4 结 论

从以上分析可以得出以下结论:

- (1)  $h/2b \leq 2$  时拉压弹性模量不同材料矩形截面杆在  $x=0, y=0$  处的剪应力  $\tau_{xy}$  只能按弹性力学方法计算.
- (2) 当  $h/2b \geq 1$  时,拉压弹性模量不同材料矩形截面杆在  $x=0, y=b$  处的剪应力  $\tau_{xy}$  采用材料力学方法计算的结果完全可以满足工程实际的需要,而  $h/2b < 1$  时拉压弹性模量不同材料矩形截面杆在  $x=0, y=b$  处的剪应力  $\tau_{xy}$  只能按弹性力学方法计算.
- (3) 采用材料力学方法研究拉压弹性模量不同悬臂杆的弯曲是有其局限的.

#### 参考文献 References

- [1] YE Zhi-ming, YU Huang-ran, YAO Wen-juan. A new elasticity and finite element formulation for different Young's modulus when tension and compression loading[J]. Journal of Shanghai University, 2001, 5(2): 89-92.
- [2] Voyiadjis G Z, Zolochovsky A. Thermodynamic modeling of creep damage in materials with different properties in tension and compression[J]. International Journal of Solids and Structure, 2000, 37(24): 3281-3303
- [3] 李战莉,黄再兴. 双模量泡沫材料等效弹性模量的细观力学估算方法[J]. 南京航空航天大学学报, 2006, 38(4): 464-468.  
LI Zhan-li, HUANG Zai-xing. Meso-Mechanical method for estimating equivalent elastic modulus of foam-solid with double-modulus[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2006, 38(4): 464-468.
- [4] 曾纪杰. 对中柔度压杆的双模量理论的修正[J]. 机械强度, 2006, 28(3): 462-464.  
ZENG Ji-Jie. Revision of the formula with bimodulus intermediate column[J]. Journal of Mechanical Strength, 2006, 28(3): 462-464
- [5] 蔡来生,俞焕然. 拉压模量不同弹性物质的本构[J]. 西安科技大学学报, 2009, 29(1): 17-21.  
CAI Lai-sheng, YU Huan-ran. Constitutive relation of elastic materials with different elastic moduli in tension and compression[J]. Journal of Xi'an University of Science and Technology, 2009, 29(1): 17-21.
- [6] 吴 晓,杨立军,孙 晋. 双模量圆板弯曲变形的计算分析[J]. 西安建筑科技大学学报:自然科学版, 2009, 41(1): 88-92.  
WU Xiao, YANG Li-jun, SUN Jin. Bending deformation calculation of bimodulus circular plate[J]. J. of Xi'an University of Architecture & Technology: Natural Science Edition, 2009, 41(1): 88-92.
- [7] 罗战友,夏建中,龚晓南. 不同拉压模量及软化特性材料的柱形孔扩张问题的统一解[J]. 工程力学, 2008, 25(9): 79-84.  
LUO Zhan-you, XIA Jian-zhong, GONG Xiao-nan. Unified solution for expansion of cylindrical cavity in strain-softening materials with different elastic moduli in tension and compression[J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(9):

- 79-84.
- [8] 阿巴尔楚米扬. 不同模量弹性理论[M]. 郭瑞锋, 张允真, 译. 北京: 中国铁道出版社, 1986: 11-22.  
AMBARTSUMYAN S A. Elasticity theory of different modulus[M]. WU Rui-Feng, ZHANG YunZhen, Translated. Beijing: China Railway Press, 1986. 11-22.
- [9] 周怡之. 双模量 Winkler 地基简支长圆板剪切屈曲[J]. 上海工业大学学报, 1993, 14(6): 478-484.  
ZHOU Yi-zhi. Shear Stability of Long Circular plates on Bi-Moduli Elastic Foundations[J]. Journal of Shanghai University of Technology, 1993, 14(6): 478-484.
- [10] 高 潮, 刘相斌, 吕显强. 用拉压不同模量理论分析弯曲板[J]. 计算力学学报, 1998, 15(4): 448-455.  
GAO Chao, LIU Xiang-bin, LÜ Xian-qiang. Analysis for the plate with the theory of different extension compression elastic modulus[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 1998, 15(4): 448-455.
- [11] 吴 莹, 赵永刚, 李世荣. 拉压弹性模量不等材料杆的纯弯曲及偏心压缩[J]. 甘肃工业大学学报, 2001, 21(1): 101-105.  
WU Ying, ZHAO Yong-gang, LI Shi-rong. Pure bend and Excentrical Compression of Rod Made of Material with Nonidentical Elastic Modulus of Tension and Compression[J]. Journal of Gansu University of Technology, 2001, 21(1): 101-105.
- [12] 吴 晓, 黄 翀, 马建勋. 双模量面板泡沫铝芯圆形层合板的非线性弯曲[J]. 应用力学学报, 2011, 28(4): 356-360.  
WU Xiao, HUANG Chong, MA Jian-xun. Nonlinear Bending of Bimodulous Panel Aluminum Foam Core Circular Laminated Plate[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2011, 28(4): 356-360.

## Bending of rectangular section bar with different elastic moduli in tension and compression areas

WU Xiao, LUO You-xin

(Hunan University of Arts and Science, Changde 415000, China)

**Abstract:** The transverse bending of rectangular section cantilever bar with different elastic moduli in tension and compression areas caused by tangential force on its free end was studied in this paper. Rectangular section cantilever bar with different elastic moduli in tension and compression areas can form tensile and compression areas in a curved state, and rectangular section cantilever bar is regarded as a laminated bar composed of two kinds of isotropic materials, so the location of neutral plane in cantilever bar is determined, and the stress formula is derived by using elastic theory. Then the calculation results got by the stress formula are compared with those obtained by mechanics of materials. The analysis of examples indicates that the method of mechanics of materials has its limitations when adopted to study the bending problem of rectangular section cantilever bar with different elastic moduli in tension and compression areas.

**Key words:** elastic moduli; rectangular section; cantilever bar; bending; mechanics of materials