

# 受损简支梁固有频率变化规律研究

尚 鑫<sup>1,2</sup>, 徐 岳<sup>1</sup>, 任更锋<sup>1</sup>

(1. 长安大学公路大型结构安全教育部工程研究中心, 陕西 西安 710064; 2. 西安公路研究院, 陕西 西安 710065)

**摘 要:**以钢筋混凝土梁为研究对象, 基于 Euler-Bernoulli 梁理论和结构动力学理论, 通过数值模拟分析, 计算得到了不同损伤位置和损伤程度时简支梁单损伤情况下的固有频率. 引入损伤因子、频率变化率、频率变化率震荡幅度、频率变化率中值、频率变化率比值等概念, 研究了简支梁的固有频率以及频率变化率、频率变化率比值对梁振动响应的变化规律. 结果表明, 梁的损伤对频率和频率变化率的敏感性与梁的损伤程度和损伤位置相关, 而频率变化率比值与梁的损伤位置有关. 损伤程度对固有频率的影响大于损伤位置对固有频率的影响. 而当损伤位置和损伤程度固定时, 梁固有频率的变化率随模态阶数的增加并不是单调变化的.

**关键词:**简支梁; 固有频率; 频率变化率; 频率变化率比值

**中图分类号:** U 448

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1006-7930(2013)05-0640-07

基于动力测试的损伤识别方法是目前普遍认为最有前途的损伤识别技术. 它是一种结构整体损伤检测方法, 能全面反映结构的刚度、阻尼和惯性特性, 而且现场工作量大、试验时间短、经济代价相对较低, 更重要的是可实现实时监测, 因而受到国内外许多研究者的注意.

固有频率是振动测试中最容易获得的指标之一, 而且测试精度较高. 20 世纪 70 年代中期, Cawley 和 Adams 就开始研究自振频率和损伤之间的关系; 到 80 年代中期, 提出了一种确定损伤位置和估计损伤程度的方法, 损伤识别的结果是通过实测结构的自振频率和理论自振频率比较得出的. 基于固有频率变化的损伤识别方法的识别指标主要有频率差和固有频率变化比<sup>[1]</sup>. 当有些结构形状较为复杂, 有些位置不适合布置测试点时, 基于模态识别的损伤的方法就很难使用, 此时频率法就可以发挥较为显著的作用. 在工程测试之中, 一般只需要进行一两个测点的测试就可以得到结构多阶固有频率<sup>[2]</sup>.

简支梁是桥梁结构中最基本和最常用的形式. 本文以简支梁为例, 在推导结构频率变化率及频率变化率比值的基础上, 重点研究结构在不同的损伤位置和不同的损伤程度的单一损伤(以下简称“单损伤”)引起结构的频率、频率变化率以及频率变化率比值的规律问题.

## 1 理论分析

### 1.1 相关定义

#### (1) 损伤因子 $\alpha$

钢筋混凝土结构既有混凝土, 又有钢筋, 其损伤形式主要有混凝土裂缝(宽度、深度、间距等)、混凝土破损、钢筋锈蚀、钢筋屈服等. 由于钢筋混凝土结构的材料比较复杂, 本文将基于截面刚度降低的方法来模拟其实际的损伤状态, 即所有损伤模型的模拟采用在该位置的单元折减钢筋混凝土弹性模量  $E$  来实现.

在结构损伤识别中, 常认为质量矩阵不变, 损伤只是引起刚度矩阵的变化, 损伤程度通过刚度的折减来实现. 设  $\alpha$  为损伤单元的损伤因子,  $N$  代表单元号,  $\alpha_N$  即为  $N$  号单元的损伤因子, 代表  $N$  号单元的损伤程度. 如 2 号单元损伤 20%, 则  $\alpha_2 = 0.8$ .

#### (2) 频率变化率 $FCR_i$

收稿日期: 2013-04-07 修改稿日期: 2013-09-12

基金项目: 西部交通建设科技基金资助项目(2005 318 223 16); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(2013G1502015)

作者简介: 尚 鑫(1979-), 男, 山西运城人, 高级工程师, 博士生, 主要从事桥梁健康监测研究.

$$FCR_i = \frac{f_{ui} - f_{di}}{f_{ui}} \quad (1)$$

式中:  $f_{ui}$  为结构完好时的第  $i$  阶频率;  $f_{di}$  为结构损伤时的第  $i$  阶频率.

(3) 频率变化率震荡幅度  $AFCR_i$

$$AFCR_i = \max FCR_i - \min FCR_i \quad (2)$$

式中:  $\max FCR_i$  为在某损伤程度  $\alpha$  下, 结构单损伤的第  $i$  阶频率变化率的最大值;  $\min FCR_i$  为在某损伤程度  $\alpha$  下, 结构单损伤的第  $i$  阶频率变化率的最小值.

(4) 频率变化率均值  $\overline{FCR}_i$

$$\overline{FCR}_i = \frac{1}{m} \sum_m FCR_i \quad (3)$$

式中:  $m$  表示第  $i$  阶模态下所有受损单元的和.

(5) 频率变化率比值  $FCR_{j,i}$

$$FCR_{j,i} = \frac{FCR_j}{FCR_i} \quad (4)$$

## 1.2 理论分析

根据结构的基本运动方程可得:

$$((K - \omega^2 M)\varphi = 0 \quad (5)$$

其中:  $(K)$  为刚度矩阵,  $(M)$  为质量矩阵,  $(\omega)$  代表频率,  $(\varphi)$  代表振型, 以下等同.

其振动形式为

$$[(K + \Delta K) - (\omega^2 - \Delta\omega^2)(M + \Delta M)](\varphi + \Delta\varphi) = 0 \quad (6)$$

$(\Delta K)$ 、 $(\Delta M)$ 、 $(\Delta\omega)$  代表刚度矩阵、质量矩阵、频率的变化量.

由于质量的变化几乎可以忽略不计, 结构的损伤仅看做是刚度的变化, 有  $(\Delta M = 0)$ , 展开并忽略二阶项, 简化得:

$$\Delta\omega^2 = (\varphi^T \Delta K \varphi) / (\varphi^T M \varphi) \quad (7)$$

结构的整体刚度矩阵可分解成单元刚度矩阵, 单元的变形可由结构的振型求出, 即

$$\epsilon_m(\varphi) = f(\varphi) \quad (8)$$

对于第  $i$  阶模态, 有

$$\varphi_i^T K \varphi_i = \sum_{m=1}^M \epsilon_m^T(\varphi_i) \Delta k_m \epsilon_m(\varphi_i) \quad (9)$$

其中  $M$  为总单元数.

代入(7)式得:

$$\Delta\omega_i^2 = [\sum_{j=1}^J \epsilon_j^T(\varphi_i) \Delta k_j \epsilon_j(\varphi_i)] / (\varphi_i^T M \varphi_i) \quad (10)$$

其中  $J$  为损伤单元总数. 对于单个损伤单元  $N$ , 式(10)可简化为

$$\Delta\omega_i^2 = [\epsilon_N^T(\varphi_i) \Delta k_N \epsilon_N(\varphi_i)] / (\varphi_i^T M \varphi_i) \quad (11)$$

假设  $\Delta k_N = \alpha_N \cdot k_N$ , 可得<sup>[3]</sup>:

$$\Delta\omega_i^2 = [\alpha_N \epsilon_N^T(\varphi_i) k_N \epsilon_N(\varphi_i)] / (\varphi_i^T M \varphi_i) \quad (12)$$

联立式(5)可得

$$FCR_i = \frac{\Delta\omega_i}{\omega_i} = \sqrt{\frac{\varphi_i^T [\Delta K] \varphi_i}{\varphi_i^T [K] \varphi_i}} = \sqrt{\frac{\alpha_N \epsilon_N^T(\varphi_i) k_N \epsilon_N(\varphi_i)}{\varphi_i^T [K] \varphi_i}} \quad (13)$$

该式表明, 频率变化率与单元损伤的程度  $\alpha_N$  与位置(单元  $N$ )相关.

当采用  $i, j$  两阶频率信息, 则可得频率变化率的比值

$$FCR_{j,i} = \frac{\frac{\Delta\omega_j}{\omega_j}}{\frac{\Delta\omega_i}{\omega_i}} = \left( \frac{\frac{\epsilon_N^T(\varphi_j) k_N \epsilon_N(\varphi_j)}{\varphi_j^T [K] \varphi_j}}{\frac{\epsilon_N^T(\varphi_i) k_N \epsilon_N(\varphi_i)}{\varphi_i^T [K] \varphi_i}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

显然,频率变化率的比值,仅是与损伤位置有关的量,不再包含损伤程度(即损伤因子  $\alpha_N$ ) 的信息.

## 2 数值模拟

简支梁,计算跨径  $l=10.5$  m,截面高度 0.6 m,宽度 0.4 m,采用 30 号混凝土,弹性模量  $E=$

$3.030\ 3\times 10^4$  MPa,见图 1.有限元模型单元长度 0.5 m,共计 21 个单元,有限元模型计算简图如图 2 所示.

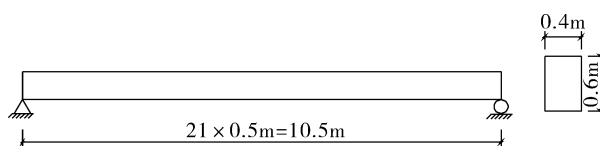


图1 简支梁图示

Fig. 1 Graphic of the simple supported beam

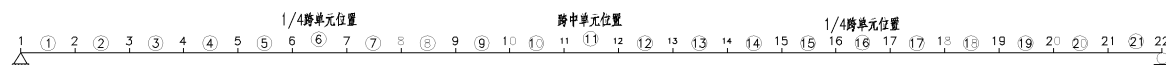


图2 简支梁计算简图

Fig. 2 Calculation diagram of the simple supported beam

## 3 受损梁频率分析

本算例简支梁的数值模拟以单元弹性模量的折减来表示单元损伤,并假设梁为经典梁(即 Euler-Bernoulli 梁).为能够全面反映频率对结构不同位置、不同程度的损伤的敏感性,本算例共考虑 2-20 号单元(梁支座附近时应按 Timoshenko 梁来分析,本文不考虑支座附近的损伤),分别有  $\alpha=0.8$ 、 $\alpha=0.6$ 、 $\alpha=0.4$ 、 $\alpha=0.2$  等 4 种程度损伤,共 76 种工况,均为单损伤.

本节中的损伤结果是在理想状态下得到,即未考虑模态不完整和噪声的影响.

### 3.1 单损伤简支梁频率 $f_{di}$ 变化规律

以简支梁单元号为横坐标,以 2~20 号单元单损伤的频率值为纵坐标,得到在单损伤的损伤程度不同时,共 76 种工况的简支梁单损伤频率图(仅列出 1~4 阶频率),见图 3(a)~(d).

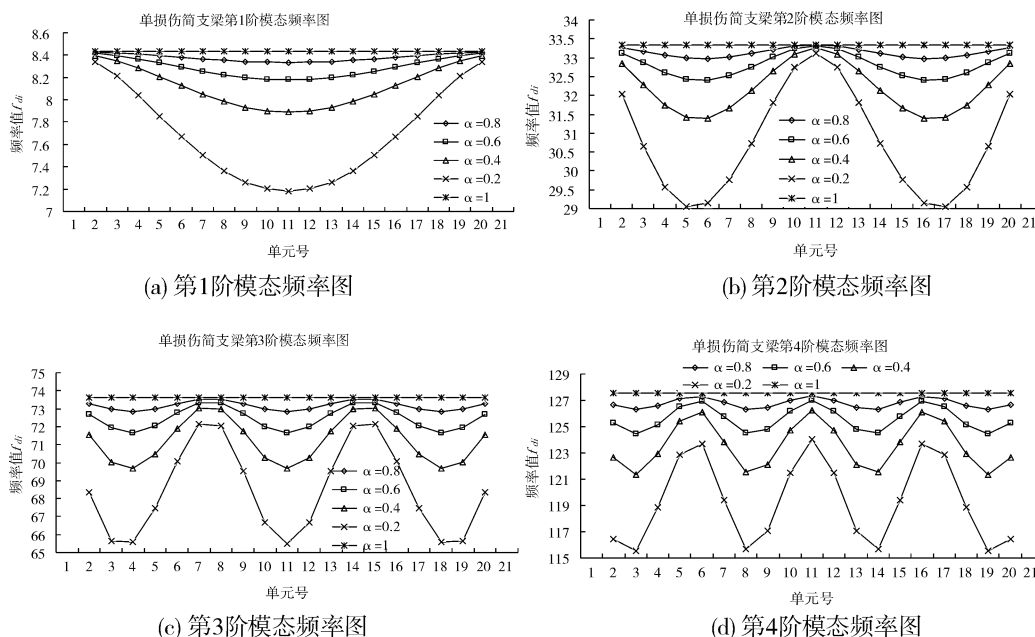


图3 单损伤简支梁模态频率图

Fig. 3 Single damaged beam modal frequency diagram

由图 3(a)~(d)可知,单损伤简支梁不同损伤位置的频率  $f_{di}$  是一条震荡曲线,震荡次数随模态阶数的增大而迅速增多,震荡幅度随模态阶数的变化而变化.梁的损伤对频率  $f_{di}$  的敏感性与梁的损伤程度相关,损伤程度越大,其各阶模态的频率  $f_{di}$  降低越多;梁的损伤对频率  $f_{di}$  的敏感性与梁的损伤位置  $N$  和频率的模态阶数  $i$  有关,比如梁的损伤对第 1 阶模态频率的敏感性在跨中最大,越靠近支点第 1 阶

模态频率的敏感性越小, 损伤程度对固有频率  $f_{di}$  的影响大于损伤位置  $N$  对固有频率的影响。

### 3.2 单损伤简支梁频率变化率 $FCR_i$ 变化规律

以简支梁单元号为横坐标, 以 2~20 号单元单损伤的频率变化率  $FCR_i$  为纵坐标, 在损伤因子  $\alpha=0.8$  的情况下 (19 种工况), 得到 1~10 阶模态的简支梁不同损伤位置的频率变化率图, 见图 4(a)~(d)。

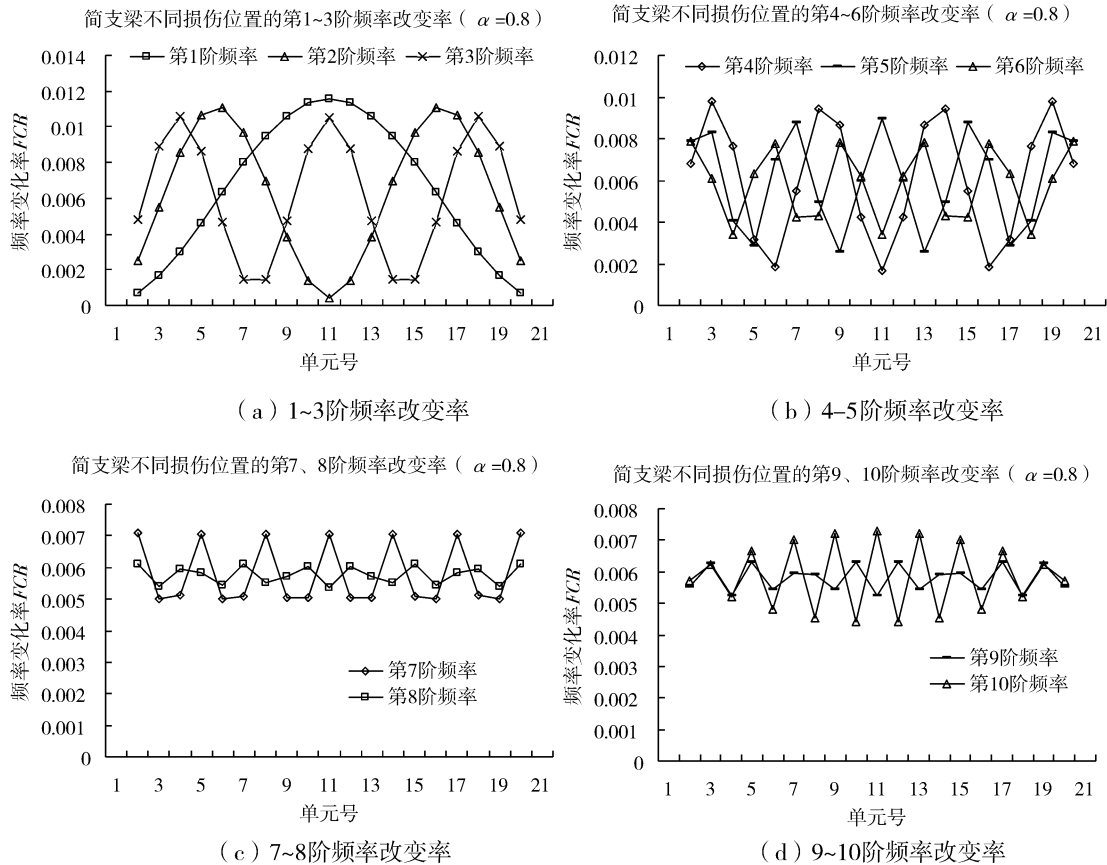


图4 简支梁不同损伤位置的频率变化率

Fig. 4 The beam frequency change rates in different damaged location

由图 4(a)~(d)可知, 在损伤程度一定时 ( $\alpha=0.8$ ), 简支梁不同损伤位置的频率变化率是一条震荡曲线, 震荡次数随模态阶数的增大而迅速增多, 震荡幅度随模态阶数的变化而变化. 梁的损伤对频率变化率  $FCR_i$  的敏感性与梁的损伤位置  $N$  和频率的模态阶数  $i$  有关, 比如, 梁的损伤对第 1 阶模态频率变化率  $FCR_1$  的敏感性在跨中最大, 越靠近支点第 1 阶模态频率变化率的敏感性越小。

### 3.3 单损伤简支梁频率变化率震荡幅度 $AFCR_i$ 变化规律

以模态阶数为横坐标, 以该阶模态 2~20 号单元单值损伤的频率变化率的幅值为纵坐标, 在损伤因子  $\alpha=0.8\sim0.2$  的情况下 (76 种工况), 得受损简支梁频率变化率震荡幅度变化图, 见图 5。

由图 5 可知, 在损伤因子  $\alpha_N=0.2$  时, 简支梁不同损伤位置的频率改变率曲线的震荡幅度值在前 8 阶模态随模态值的增加而减小, 第 8 阶至第 10 阶模态该曲线的震荡幅度值逐渐增大. 在损伤因子  $\alpha_N=0.4$  时, 简支梁不同损伤位置的频率改变率曲线的震荡幅度值在前 8 阶模态随模态值的增加而减小, 第 8 阶至第 10 阶模态该曲线的震荡幅度值逐渐增大. 在损伤因子  $\alpha_N=0.6$  时, 简支梁不同损伤位置的频率改变率曲线的震荡幅度值在前 7 阶模态随模态值的增加而减小, 第 7 阶至第 10 阶模态该曲线的震荡幅度值逐渐增大. 在损伤因子  $\alpha_N=0.8$  时, 简支梁不同损伤位置的频率改变率曲线的震荡幅度值在前 6 阶模态随模态值的增加而减小, 第 6 阶至第 10 阶模态该曲线的震荡幅度值逐渐增大。

由以上分析知: (1) 单损伤简支梁不同损伤位置的频率改变率曲线的震荡幅度值  $AFCR_i$  随模态阶数  $i$  的变化而变化. (2) 在损伤因子  $\alpha$  相同的情况下, 单损伤简支梁不同损伤位置  $N$  的频率改变率曲线的震荡幅度值  $AFCR_i$  随模态阶数  $i$  的增加先单调减小, 后单调增加. (3) 单损伤简支梁不同损伤位置的频率改变率

曲线的震荡幅度  $AFCR_i$  曲线弯折变化点(模态阶数  $i$ )随损伤程度的增大而单调减小。(4)单损伤简支梁不同损伤位置的频率改变率曲线的震荡幅度  $AFCR_i$ ,在非弯折点位置,随损伤程度的增大而增大。

### 3.4 单损伤简支梁频率变化率均值 $\overline{FCR}_i$ 变化规律

以模态阶数  $i$  为横坐标,以该阶模态 2~20 号单元单值损伤的频率变化率的均值  $\overline{FCR}_i$  为纵坐标,在损伤因子  $\alpha=0.8\sim0.2$  的情况下(76 种工况),得受损简支梁频率变化率中值图,见图 6。

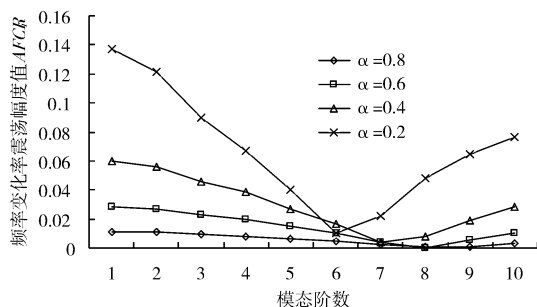


图5 单损伤简支梁频率变化率震荡幅度变化图

Fig. 5 Frequency change rates amplitude variations

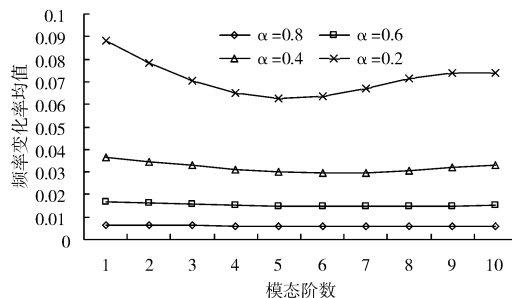


图6 单损伤简支梁频率变化率均值图

Fig. 6 Frequency change rates average diagram

由图 6 知,单损伤简支梁不同损伤位置的频率改变率的均值  $\overline{FCR}_i$  随损伤程度的增大而增大。

### 3.5 简支梁损伤固定时各阶频率变化率走势规律

以模态阶数  $i$  为横坐标,在损伤位置  $N$  和损伤程度固定的情况下,即分别在  $\alpha_2=0.8$ 、 $\alpha_6=0.8$ 、 $\alpha_{11}=0.8$  (3 种工况)时,得到损伤固定时各阶频率变化率  $AFCR_i$  走势图,见图 7。

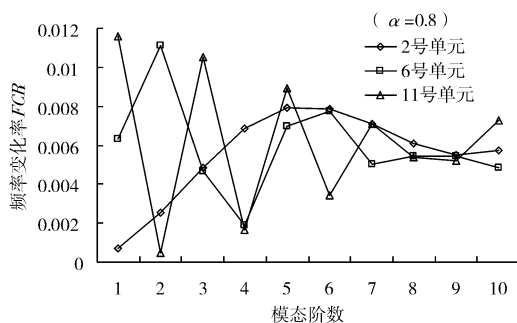


图7 损伤固定时各阶频率变化率走势图

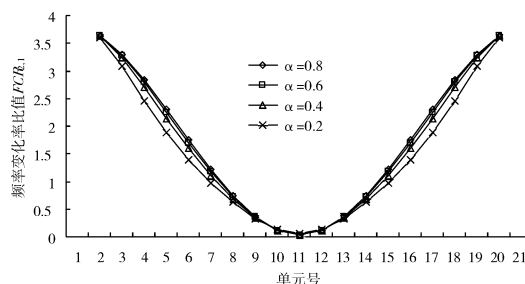
Fig. 7 Each order frequency change rates chart

由图 7 可知,当损伤位置  $N$  和损伤程度  $\alpha$  固定时,梁固有频率的变化率  $FCR_i$  随模态阶数  $i$  的增加并不是单调变化的。在损伤程度  $\alpha$  不变,梁的损伤位置  $N$  从梁的两端到跨中移动,固有频率的变化率  $FCR_i$  随模态阶数  $i$  的增加是由大致增大趋势逐渐转为大致减小趋势。

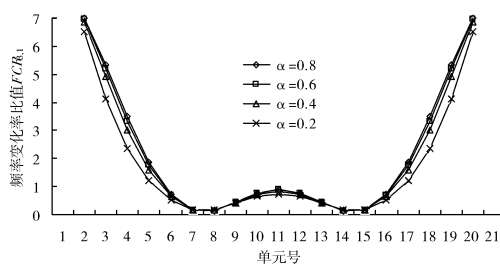
### 3.6 单损伤简支梁频率变化率比值规律

以简支梁单元号为横坐标,以 2~20 号单元单值损伤的频率变化率比值  $FCR_{j,i}$  为纵坐标,在损伤因子  $\alpha=0.8\sim0.4$  的情况下,得  $FCR_{2,1}$ 、 $FCR_{3,1}$ 、 $FCR_{3,2}$  的简支梁不同损伤位置的频率改变率比值图,见图 8(a)~(c)。

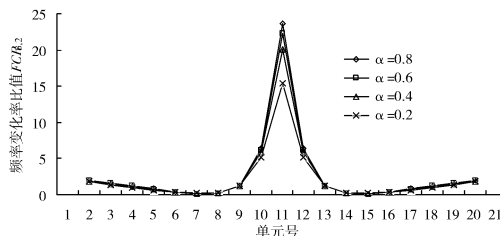
由图 8(a)~(c)知,单损伤简支梁频率变化率比值  $FCR_{j,i}$  与损伤的程度无关,与梁的损伤位置  $N$  有关,图形为对称分布。



(a) 频率变化率比值  $FCR_{2,1}$



(b) 频率变化率比值  $FCR_{3,1}$



(c) 频率变化率比值  $FCR_{3,2}$

图8 单损伤简支梁频率变化率比值

Fig. 8 Single damaged beam frequency change ratio

## 4 结 论

本文以简支梁为例,在数值试验的基础上,共划分了19个损伤单元位置及4种损伤程度即76种组合工况,研究了结构在不同的损伤位置和不同的损伤程度的单损伤引起结构的频率、频率变化率以及频率变化率比值的规律,证明了理论推导的正确性,可为进一步的损伤定位和损伤程度识别提供研究基础。

(1) 单损伤简支梁不同损伤位置的频率和频率变化率均是一条震荡曲线,震荡次数随模态阶数的增大而迅速增多,震荡幅度随模态阶数的变化而变化。

(2) 梁的损伤对频率和频率变化率的敏感性与梁的损伤程度相关,损伤程度越大,其各阶模态的频率降低越多或频率变化率越大;梁的损伤对频率和频率变化率的敏感性与梁的损伤位置和频率的模态阶数有关。损伤程度对固有频率的影响大于损伤位置对固有频率的影响。

(3) 单损伤简支梁不同损伤位置的频率改变率曲线的震荡幅度值随模态阶数的变化而变化;在损伤因子相同的情况下,频率改变率曲线的震荡幅度值随模态阶数的增加先单调减小,后单调增加;频率改变率曲线的震荡幅度曲线弯折变化点(模态阶数)随损伤程度的增大而单调减小;频率改变率曲线的震荡幅度在非弯折点位置,随损伤程度的增大而增大。

(4) 当损伤位置和损伤程度固定时,梁固有频率的变化率随模态阶数的增加并不是单调变化的。单损伤简支梁频率变化率比值与损伤的程度无关,与梁的损伤位置有关,图形为对称分布。

## 参考文献 References

- [1] 杨雅勋. 基于动力测试的桥梁结构损伤识别与综合评估理论研究[D]. 西安:长安大学,2008.  
YAN Ya-xun. Bridge structure damage identification research based on the dynamic testing and the research of bridge comprehensive evaluation theory[D]. Xi'an: Chang'an University,2008.
- [2] 刘文峰,刘春图,应怀樵. 通过频率改变率进行损伤定位的方法研究[J]. 振动与冲击,2004,23(2):28-30.  
LIU Wen-feng, LIU Chun-tu, YING Huai-qiao. Research on damage orientation by change of eigenfrequency[J]. Journal of Vibration and Shock, 2004, 23(2): 28-30.
- [3] KAMINSKI P C. The approximate location of damage through the analysis of natural frequencies with artificial neural networks[J]. Journal of Process Mechanical Engineering 1995,209(2): 117-123.
- [4] 杜金龙,郭少华. 钢筋混凝土损伤梁动力特性的有限元分析[J]. 石家庄铁道学院学报:自然科学版,2007,20(3): 18-23.  
Du Jin-long, GUO Shao-hua. Finite element analysis of dynamic characteristics of damaged reinforced concrete beam [J]. Journal of Shijiazhuang Railway Institute: Natural Science Edition, 2007,20(3):18-23.
- [5] 贾彬,王汝恒,郭文. 基于频率指纹的梁类结构损伤定位方法研究[J]. 西南科技大学学报,2007,22(4):35-39.  
JIA Bin, WANG Ru-heng, GUO Wen. Study on damage locating method in beam-like structure by frequency identification[J]. Journal of Southwest University of Science and Technology, 2007,22(4): 35-39.
- [6] 王哲,丁桦. 固有频率法评估损伤的阈值研究[J]. 力学与实践,2009,31(2): 50-54.  
WANG Zhe, DING Hua. Estimating thresholds of damages based on natural frequency method[J]. Mechanics in Engineering, 2009,31(2): 50-54.
- [7] 徐飞鸿,张佳文. 简支梁损伤识别的特征方程曲线交点法[J]. 长沙理工大学学报:自然科学版,2009,6(3):11-16.  
XU Fei-hong, ZHANG Jia-wen. Damage identification of simple supported beam based on the curve intersection of characteristic equation[J]. Journal of Changsha University of Science and Technology: Natural Science Edition, 2009,6(3): 11-16.
- [8] 赵亚平,王书茂,焦群英,等. 钢筋混凝土梁振动特性参数与损伤状况关系的数值仿真研究[J]. 应用力学学报, 2007,24(1): 141-145.  
ZHAO Ya-ping, WANG Shu-mao, JIAO Qun-ying, et al. Numerical simulation to relation between vibration characteristic and damage condition of reinforced concrete beam[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2007,24 (1): 141-145.
- [9] 施洲,赵人达. 桥梁结构损伤对其固有振动特性的影响[J]. 地震工程与工程震动,2007,27(5):117-123.

SHI Zhou, ZHAO Ren-da. Effects of bridge damage on its free-vibration characteristics[J]. Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2007, 27(5): 117-123.

## Research on natural frequency characteristics of damaged simply supported beam

SHANG Xin<sup>1,2</sup>, XU Yue<sup>1</sup>, REN Geng-feng<sup>1</sup>

(1. Research Center of Highway Large Structure Engineering on Safety, Ministry of Education, P. R. C., Chang'an University, Xi'an 710064, China; 2. Xi'an Highway Research Institute, Xi'an 710065, China)

**Abstract:** Taking damaged reinforced concrete beam as the research object, and based on Euler-Bernoulli beam and structure dynamics theory and by means of dynamic finite element analysis, the natural frequencies are obtained through calculations in various kinds of damage states. With the concept of damage factor, frequency change rate, frequency change rate oscillation amplitude, frequency change rate mid-value and the ratio of frequency change rate, the paper researches the natural frequency, frequency change rate and the ratio of frequency change rate characteristics of the simply supported beam. The results show that the sensitivities of the damaged beam about natural frequency and frequency change rate relate to damage degree and damage location, and that the sensitivities of the damaged beam about the ratio of frequency change rate relates to damage location only, and that the effect of damage degree on the natural frequency is greater than that of damage location, and that the frequency change rate of the beam is not a monotonic variation with the increase of modes order.

**Key words:** *simply supported beam; natural frequency; frequency change rate; the ratio of frequency change rate*

**Biography:** SHANG Xin, Candidate for Ph. D., Xi'an 710064, P. R. China, Tel: 0086-15829261859, E-mail: 413615633@qq.com

(上接第 639 页)

## Analysis of mechanics properties on FRP-concrete-steel double-skin tubular short columns

WANG Juan, ZHAO Jun-hai, LI Nan, ZHU Qian

(School of Civil Engineering, Chang'an University, Xi'an 710061, China)

**Abstract:** Using the twin shear unified limit solutions of thin-walled cylinder, the formula of axial bearing capacity for FRP-concrete-steel double-skin tubular short columns was presented by considering the influence of intermediate principal stress and the internal thin-walled steel tube effect. Nonlinear element analysis models of composite columns under axial load were developed by using ANSYS program. Then, the ultimate bearing capacities and the stress-strain relationship curves for members were carried out. The finite element results agree well with the calculated results obtained in the paper and test results from the references. Based on the results achieved influences of loads on the stress distribution and the thickness to diameter ratio for steel tube and the concrete strength on bearing capacities for members were studied.

**Key words:** *thin-walled cylinder; the twin shear unified strength theory; nonlinear finite element analysis; FRP-concrete-steel double-skin tubular; mechanics properties*

**Biography:** WANG Juan, Candidate for Ph. D., Xi'an 710061, P. R. China, Tel: 0086-13991332762, E-mail: wangjuanchd@126.com