

# 非线性基础上拉压弹性模量不同矩形板的弯曲

吴 晓, 黄 翀, 杨立军

(湖南文理学院土木建筑工程学院, 湖南 常德 415000)

**摘 要:**采用弹性理论研究非线性基础上拉压弹性模量不同矩形板的弯曲问题. 建立了非线性基础上拉压弹性模量不同材料板的弯曲微分方程. 对于非线性基础上拉压弹性模量不同材料板弯曲变形问题, 选取梁函数作为试函数, 采用 Kantorovich 及 Galerkin 联合法推导出了非线性基础上拉压弹性模量不同材料板的解析解, 该方法计算结果与有关文献计算结果的误差很小. 所以, 选取梁函数作试函数, 采用 Kantorovich 及 Galerkin 联合法研究拉压弹性模量不同矩形板的弯曲变形问题是可行的. 把该方法计算结果与有限元法计算结果进行比较分析, 验证了此方法计算精度比较高. 算例分析表明, 拉压弹性模量相差较大时, 矩形板弯曲计算不宜采用相同弹性模量经典薄板理论, 而应采用拉压弹性模量不同弹性理论.

**关键词:**非线性; 基础; 弹性模量; 矩形板; 弯曲

**中图分类号:**O 343.5

**文献标志码:**A

**文章编号:**1006-7930(2013)06-0778-06

大量的试验和研究表明, 材料在绝对值相同的拉应力或压应力作用下, 会发生绝对值不同的拉应变或压应变, 即材料具有明显的拉压弹性模量不同特征. 文献[1-3]研究了拉压弹性模量不同材料的本构关系及简单弹性平面问题, 文献[4-5]研究了拉压弹性模量不同材料的简单桁架问题, 文献[6-11]研究了拉压弹性模量不同材料的板的弯曲和非线性弯曲问题, 但是, 工程实际中许多拉压弹性模量不同材料的板结构都处于非线性基础上的工作环境中, 因此对非线性基础上拉压弹性模量不同材料板弯曲变形问题要给予一定重视. 目前, 对于非线性基础上拉压弹性模量不同材料板弯曲变形问题研究文献还不多见. 所以, 本文研究了非线性基础上拉压弹性模量不同材料板弯曲变形问题, 选取梁函数作为试函数, 采用 Kantorovich 及 Galerkin 联合法推导出了非线性基础上拉压弹性模量不同材料板的解析解. 把该方法计算结果与有限元法计算结果进行比较分析, 验证了此方法计算精度比较高.

## 1 矩形板的内力方程

由弹性理论可知拉压弹性模量不同矩形板的应力表达式为

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{E_i z}{1 - \mu_i^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_i \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y = -\frac{E_i z}{1 - \mu_i^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} = -\frac{E_i z}{1 + \mu_i} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $i$  取值为 1 或 2;  $E_1$ 、 $\mu_1$  分别为拉伸弹性模量和泊松比,  $E_2$ 、 $\mu_2$  分别为压缩弹性模量和泊松比.  $\sigma_x$  为作用在垂直于  $x$  轴的面上的正应力,  $\sigma_y$  为作用在垂直于  $y$  轴的面上的正应力,  $\tau_{xy}$  为作用在垂直于  $x$  轴的面上沿  $y$  轴方向的剪应力.

拉压弹性模量不同矩形板弯曲时, 由弹性理论可知其横截面内力应满足以下关系

收稿日期: 2013-01-22 修改稿日期: 2013-11-30

基金项目: 湖南省科技计划项目(湘财企指[2011]65 号); 湖南“十二五”重点建设学科项目资助

作者简介: 吴 晓(1965-), 男, 湖南常德人, 教授, 主要从事结构振动理论研究.

$$\begin{cases} \frac{E_1}{1-\mu_1^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_0^{h_1} z dz + \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{h_1-h}^0 z dz = 0 \\ \frac{E_1}{1-\mu_1^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \int_0^{h_1} z dz + \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \int_{h_1-h}^0 z dz = 0 \end{cases} \quad (2)$$

把式(2)中两式相加可得到

$$\frac{E_1}{1-\mu_1} \int_0^{h_1} z dz + \frac{E_2}{1-\mu_2} \int_{h_1-h}^0 z dz = 0 \quad (3)$$

由式(3)可以求得中性面的位置为

$$h_1 = \frac{h \sqrt{E_2(1-\mu_1)}}{\sqrt{E_1(1-\mu_2)} + \sqrt{E_2(1-\mu_1)}} \quad (4)$$

在式(3)中还有另一个解  $h_1 = \frac{h \sqrt{E_2(1-\mu_1)}}{\sqrt{E_1(1-\mu_2)} - \sqrt{E_2(1-\mu_1)}} > h$ , 舍去该不合理解。

利用式(1)及弹性理论可以得到拉压弹性模量不同矩形板横截面弯矩及扭矩表达式为

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{E_1}{1-\mu_1^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_0^{h_1} z^2 dz - \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{h_1-h}^0 z^2 dz \\ &= \left[ \frac{E_2(h_1-h)^3}{3(1-\mu_2^2)} - \frac{E_1 h_1^3}{3(1-\mu_1^2)} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[ \frac{E_2(h_1-h)^3 \mu_2}{3(1-\mu_2^2)} - \frac{E_1 h_1^3 \mu_1}{3(1-\mu_1^2)} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} M_y &= -\frac{E_1}{1-\mu_1^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \int_0^{h_1} z^2 dz - \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \int_{h_1-h}^0 z^2 dz \\ &= \left[ \frac{E_2(h_1-h)^3}{3(1-\mu_2^2)} - \frac{E_1 h_1^3}{3(1-\mu_1^2)} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left[ \frac{E_2(h_1-h)^3 \mu_2}{3(1-\mu_2^2)} - \frac{E_1 h_1^3 \mu_1}{3(1-\mu_1^2)} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (5b)$$

$$M_{xy} = -\frac{E_1}{1+\mu_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_0^{h_1} z^2 dz - \frac{E_2}{1+\mu_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{h_1-h}^0 z^2 dz = \left[ \frac{E_2(h_1-h)^3}{3(1+\mu_2)} - \frac{E_1 h_1^3}{3(1+\mu_1)} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (5c)$$

## 2 矩形板的弯曲挠度

对于图1所示非线性基础上拉压弹性模量不同矩形板,由弹性理论可知其由弯矩引起的形变势能为

$$\begin{aligned} U_1 &= -\frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left( M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left\{ D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] + 2D_1 \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \end{aligned} \quad (6)$$

式中,  $D = \frac{E_1 h_1^3}{3(1-\mu_1^2)} - \frac{E_2(h_1-h)^3}{3(1-\mu_2^2)}$ ,  $D_1 = \frac{\mu_1 E_1 h_1^3}{3(1-\mu_1^2)} - \frac{\mu_2 E_2(h_1-h)^3}{3(1-\mu_2^2)}$ 。

假设非线性基础对拉压弹性模量不同矩形板的反力为

$$P(x, y) = -K_1 w - K_2 w^3 \quad (7)$$

式中:  $K_1$  为基础的线性刚度系数;  $K_2$  为基础的非线性刚度系数。

那么,拉压弹性模量不同矩形板在均布载荷作用下的势能为

$$U_z = \int_0^a \int_0^b (K_1 w^2 + K_2 w^4 - q w) dx dy \quad (8)$$

设拉压弹性模量不同矩形板的挠度函数表达式为

$$w(x, y) = u(x) \cdot v(y) \quad (9)$$

式中:假设  $v(y)$  为已知梁函数;  $u(x)$  为未知梁函数。

由式(6)~式(9)可知拉压弹性模量不同矩形板的总势能表达式为

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2} \int_0^a g(x, u, u', u'') dx \quad (10)$$

对于式(10)进行一阶变分可以得到

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_0^a \left( \frac{\partial g}{\partial u} \delta u + \frac{\partial g}{\partial u'} \delta u' + \frac{\partial g}{\partial u''} \delta u'' \right) dx \quad (11)$$

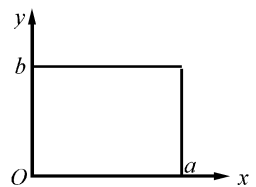


图1 拉压弹性模量不同矩形板

Fig. 1 Rectangular plate with difference elastic modulus in tension and compression

利用微分符号与变分符号的可交换性且式(11)分部积分可得

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_0^a \left[ \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial u'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial g}{\partial u''} \right) \right] \delta u dx + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g}{\partial u'} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial u''} \right) \right] \delta u \Big|_0^a + \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u''} \delta u' \Big|_0^a \quad (12)$$

令式(12)  $\delta U = 0$ , 可以得到欧拉方程为

$$\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial u'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial g}{\partial u''} \right) = 0 \quad (13)$$

把  $u(x)$  代入式(13)中利用伽辽金原理可得

$$\int_0^a \left[ \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial u'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial g}{\partial u''} \right) \right] u(x) dx = 0 \quad (14)$$

利用式(14)即可确定未知梁函数.

对于在均布载荷作用下的四边简支双模量矩形板可设

$$u(x) = A \left( \frac{x^4}{a^4} - \frac{2x^3}{a^3} + \frac{x}{a} \right), v(y) = \frac{y^4}{b^4} - \frac{2y^3}{b^3} + \frac{y}{b} \quad (15)$$

把式(15)代入式(14)中可以得到方程

$$A^3 + \frac{4 \cdot 524.904D}{K_2 a^4} (1 + \lambda^2)^2 A + \frac{92.912K_1}{K_2} A - \frac{766.284q}{K_2} = 0 \quad (16)$$

对于在均布载荷作用下的三边简支一边固定的双模量矩形板可设

$$u(x) = A \left( \frac{x^4}{a^4} - \frac{2x^3}{a^3} + \frac{x}{a} \right), v(y) = \frac{2y^4}{b^4} - \frac{5y^3}{b^3} + \frac{3y^2}{b^2} \quad (17)$$

把式(17)代入式(14)中可以得到方程

$$A^3 + \frac{6 \cdot 610.046D}{K_2 a^4} (1 + 2.301\lambda^2 + 2.447 \cdot 4\lambda^4) A + \frac{135.525K_1}{K_2} A - \frac{1 \cdot 369.863q}{K_2} = 0 \quad (18)$$

在式(16)、式(18)中  $\lambda = a/b$ .

由式(16)、式(18)求出  $A$  值后与式(15)、式(17)代入式(9)中即可得到非线性基础上拉压弹性模量不同矩形板的弯曲挠度表达式.

当  $a = b$ ,  $E_1 = E_2 = E$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 0.3$  且  $K_1 = K_2 = 0$  时, 由以上有关各式可以求各向同性材料四边简支方板的挠度表达式为

$$w(x, y) = \frac{0.042 \cdot 4qa^4}{D} \left( \frac{x^4}{a^4} - \frac{2x^3}{a^3} + \frac{x}{a} \right) \left( \frac{y^4}{b^4} - \frac{2y^3}{b^3} + \frac{y}{b} \right) \quad (19)$$

各向同性材料三边简支一边固支方板的挠度表达式为

$$w(x, y) = \frac{0.036 \cdot 1qa^4}{D} \left( \frac{x^4}{a^4} - \frac{2x^3}{a^3} + \frac{x}{a} \right) \left( \frac{2y^4}{b^4} - \frac{5y^3}{b^3} + \frac{3y^2}{b^2} \right) \quad (20)$$

由式(19)可以求得四边简支方板的中心挠度为  $w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = 0.004 \cdot 1qa^4/D$ , 而采用弹性力学经典公式得到的中心挠度为  $w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = 0.004 \cdot 07qa^4/D$ , 两者误差为 0.74%.

由式(20)可以三边简支一边固支方板的中心挠度为  $w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = 0.002 \cdot 82qa^4/D$ , 而采用弹性力学经典公式得到的中心挠度为  $w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = 0.002 \cdot 8qa^4/D$ , 两者误差为 0.71%.

从以上两个算例可以看出, 采用 Kantorovich 和 Galerkin 联合法研究各向同性材料矩形板的弯曲挠度, 不但计算过程简便, 而且计算精度也很高.

### 3 算例讨论分析

为了具体分析非线性基础拉压弹性模量不同矩形板的弯曲变形, 假设均布载荷  $q = 6.86 \times 10^5$  N/m<sup>2</sup>, 基础的线性刚度系数  $K_1 = 1.4 \times 10^8$  N/m<sup>2</sup>, 基础非线性刚度系数可在  $K_2 = 4 \times 10^{13}$  N/m<sup>4</sup> 和  $K_2 = 10 \times 10^{13}$  N/m<sup>4</sup> 之间变化.

四边简支和三边简支一边固支矩形板的尺寸  $a=2\,000\text{ mm}$ ,  $h=100\text{ mm}$ ,  $\lambda$  分别取 1 和 1.5;其材料参数为(材料 1 为拉压不同弹性模量材料,材料 2 和材料 3 是为了研究考虑拉压弹性模量不同对板中心的计算挠度影响构造的分别与材料 1 受拉区和受压区材料参数相同的材料):

- 材料 1:  $E_1 = 1.96 \times 10^{10}\text{ N/m}^2$ ,  $E_2 = 2.94 \times 10^{10}\text{ N/m}^2$ ,  $\mu_1 = 0.166$ ,  $\mu_2 = 0.25$ ;
- 材料 2:  $E = 1.96 \times 10^{10}\text{ N/m}^2$ ,  $\mu = 0.166$ ;
- 材料 3:  $E = 2.94 \times 10^{10}\text{ N/m}^2$ ,  $\mu = 0.25$ .

采用本文方法计算的材料 1 的板中心的挠度如表 1~表 3 所示,为了分析考虑拉压弹性模量对板中心的挠度影响,用相同弹性模量经典薄板理论计算了材料 2、材料 3 的板中心的挠度,如表 1、表 2 所示.

为验证本文计算方法正确性,用 ANSYS 对材料 1 的板中心的挠度进行了计算( $w_0$ ).有限元计算时采用 8 节点 SOLID185 单元,该单元具有大变形,大应变能力.由式(4)计算出受拉区高度  $h_1 = 56\text{ mm}$ ,下层 56 mm 材料参数为  $E_1 = 1.96 \times 10^{10}\text{ N/m}^2$ ,  $\mu_1 = 0.166$ ,上层 44 mm 材料材料参数为  $E_2 = 2.94 \times 10^{10}\text{ N/m}^2$ ,  $\mu_2 = 0.25$ ,计算结果如表 1、表 2 括号内的数字所示.  $\lambda = 1.5$ ,  $K_1 = 1.4 \times 10^8\text{ N/m}^2$ ,  $K_2 = 0$ ,材料 1 的四边简支板节点平面外位移如图 1 所示.

由表 1、表 2 可以看出,采用有限元方法和本文方法计算的结果非常相近,二者相差都非常小,这验证了本文方法的可靠性.

本文方法计算结果比有限元方法偏大,这主要是本文假设双模量矩形板弯曲变形的挠度并不是双模量矩形板弯曲变形的真实挠度,另外采用有限元方法计算双模量矩形板弯曲变形挠度时考虑了剪切变形的影响,而本文方法计算双模量矩形板弯曲变形挠度时没有考虑了剪切变形的影响,所以本文方法计算结果比有限元方法偏大.

当线性弹性基础上双模量矩形板长宽比一定时,随着线性刚度系数的增大,双模量矩形板中心的挠度逐渐变小.

由表 3 可知,对于非线性弹性基础上双模量

表 1     $\lambda = 1$ ,  $K_2 = 0$  时板中心的挠度 /mm  
Tab. 1    The deflection of the plane

支撑条件	$K_1$ ( $\times 10^8\text{ N/m}^2$ )	1.4	1.6	1.8	2.0
四边简支	材料 1	9.76(9.72)	8.28(8.22)	6.52(6.45)	4.85(4.77)
	材料 2	12.45	11.01	9.11	7.28
	材料 3	8.11	6.77	5.80	3.98
三边简支一边固支	材料 1	8.25(8.19)	6.80(6.73)	5.28(5.20)	4.11(4.01)
	材料 2	11.21	9.31	7.76	6.55
	材料 3	7.03	5.87	4.66	3.21

表 2     $\lambda = 1.5$ ,  $K_2 = 0$  时板中心的挠度 /mm  
Tab. 2    The deflection of the plane

支撑条件	$K_1$ ( $\times 10^8\text{ N/m}^2$ )	1.4	1.6	1.8	2.0
四边简支	材料 1	6.83(6.79)	5.75(5.69)	4.61(4.53)	3.41(3.35)
	材料 2	8.72	7.78	6.46	5.11
	材料 3	5.71	4.77	4.15	2.81
三边简支一边固支	材料 1	5.78(5.73)	4.79(4.73)	3.71(3.65)	2.90(2.82)
	材料 2	7.82	6.50	5.43	4.61
	材料 3	4.95	4.15	3.28	2.22

表 3     $\lambda = 1.5$ ,  $K_1 = 1.4 \times 10^8\text{ N/m}^2$  时材料 1 板中心的挠度 /mm  
Tab. 3    The deflection of the plane of material 1

$K_2$ ( $\times 10^{13}\text{ N/m}^2$ )		4	6	8	10
支撑条件	四边简支	4.11	3.20	2.35	1.55
	三边简支一边固支	3.38	2.51	1.68	1.10

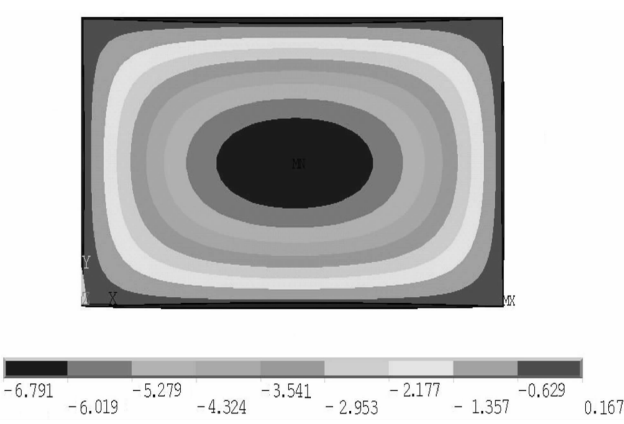


图 1    材料 1 简支板节点平面外位移

Fig. 1    Out-plane displacement of simply supported plate nodes

矩形板来说,随着非线性刚度系数的增大双模量矩形板中心的挠度也逐渐变小.

相同条件下非线性弹性基础上双模量矩形板中心的挠度要小于线性弹性基础上双模量矩形板中心的挠度.

但是,随着长宽比 $\lambda$ 的增大双模量矩形板的中点挠度将变小,这主要是随着长宽比 $\lambda$ 的增大将使双模量矩形板的刚度在增加.

对以上计算结果进行分析还可以知道,对于双模量材料矩形板弯曲变形计算,不考虑拉压弹性模量相异时其计算结果与实际情况相差较大,最小误差为18%,最大误差在了30%以上,均超过了工程上所允许的计算误差.所以,对于拉压弹性模量相差较大的矩形板弯曲变形,非线性基础上拉压弹性模量不同矩形板中心挠度的计算不宜采用相同弹性模量经典薄板理论,而应该采用双模量薄板弹性理论.从以上推导计算可以看出,由于非线性基础上拉压弹性模量不同矩形板的弯曲变形微分方程是非线性的,因此难以求得精确解析解,所以采用 Kantorovich 和 Galerkin 联合法研究非线性基础上拉压弹性模量不同矩形板弯曲挠度,不但计算简便而且计算精度也较高.

## 4 结 论

(1)当线性弹性基础上双模量矩形板长宽比 $\lambda$ 一定时,随着线性刚度系数的增大,双模量矩形板中心的挠度逐渐变小.对于非线性弹性基础上双模量矩形板来说,随着非线性刚度系数的增大双模量矩形板中心的挠度也逐渐变小,而且相同条件下非线性弹性基础上双模量矩形板中心的挠度要小于线性弹性基础上双模量矩形板中心的挠度.

(2)随着长宽比 $\lambda$ 的增大双模量矩形板的中点挠度将变小,这主要是随着长宽比 $\lambda$ 的增大将使双模量矩形板的刚度在增加.

(3)对于拉压弹性模量相差较大的矩形板弯曲变形,不考虑拉压弹性模量相异时其计算结果与实际情况相差较大,最小误差为18%,最大误差在了30%以上.所以,非线性基础上拉压弹性模量不同矩形板中心挠度的计算不宜采用相同弹性模量经典薄板理论,而应该采用双模量薄板弹性理论.

(4)由于非线性基础上拉压弹性模量不同矩形板的弯曲变形微分方程是非线性的,因此难以求得精确解析解,所以采用 Kantorovich 和 Galerkin 联合法研究非线性基础上拉压弹性模量不同矩形板弯曲挠度,不但计算简便而且计算精度也较高.

## 参考文献 References

- [1] 阿巴尔楚米扬 S A. 不同模量弹性理论[M]. 邬瑞峰,张允真,译. 北京:中国铁道出版社,1986:274-275.  
AMBARTSUMYAN S A. Elasticity theory of different modulus[M]. WU Rui-Feng, ZHANG Yun-Zhen, translated. Beijing:China Railway Press,1986:274-275.
- [2] 蔡来生,俞焕然. 拉压模量不同弹性物质的本构[J]. 西安科技大学学报,2009,29(1):17-21.  
CAI Lai-sheng, YU Huan-ran. Constitutive relation of elastic materials with different elastic moduli in tension and compression [J]. Journal of Xi'an University of Science and Technology, 2009, 29(1): 17-21.
- [3] 罗战友,夏建中,龚晓南. 不同拉压模量及软化特性材料的柱形孔扩张问题的统一解[J]. 工程力学,2008,25(9):79-84.  
LUO Zhan-you, XIA Jian-zhong, GONG Xiao-nan. Unified solution for expansion of cylindrical cavity in strain-softening materials with different elastic moduli in tension and compression[J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(9): 79-84.
- [4] 张晓月. 基于敏度分析的不同模量桁架正反问题求解[D]. 大连:大连理工大学,2008.  
ZHANG Xiao-yue. Sensitivity analysis based numerical solutions of normal and inverse problems of elastic bimodular truss structure[D]. Dalian:Dalian University of Technology, 2008.
- [5] 杨海天,张晓月,何宜谦. 基于敏度分析的拉压不同模量桁架问题的数值分析[J]. 计算力学学报,2011,28(2):237-242.  
YANG Hai-tian, ZHANG Xiao-yue, HE Yi-qian. Sensitivity analysis based numerical solution for truss structures with bi-modulus [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2011, 28(2): 237-242.
- [6] 吴 晓,杨立军,黄 肿,等. 用能量法研究双模量大挠度圆板的轴对称弯曲[J]. 计算力学学报,2011,28(2):274-278.

- WU Xiao, YANG Li-jun, HUANG Chong, et al. Large deflection axisymmetric bending of bi-modulous circular plate with energy method [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2011, 28(2): 274-278.
- [7] 吴 晓, 杨立军, 黄 翀, 等. 双模量矩形板的大挠度弯曲计算分析[J]. 工程力学, 2010, 27(1): 17-22.
- WU Xiao, YANG Li-jun, HUANG Chong, et al. Large deflection bending calculation and analysis of bimodulous rectangular plate[J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(1): 17-22.
- [8] 吴 晓, 杨立军. 拉压弹性模量不同厚壁球壳的弹性解析解[J]. 湖南科技大学学报: 自然科学版, 2012, 27(4): 35-38.
- WU Xiao, YANG Li-jun. Elastic solutions for thick wall spherical shell of bimodulous materials under uniform pressure[J]. Journal of Hunan University of Science & Technology: Natural Science Edition, 2012, 27(4): 35-38.
- [9] 吴 晓, 杨立军, 黄 翀. 双模量圆板中心在冲击荷载作用下的弹性计算[J]. 西安建筑科技大学学报: 自然科学版, 2012, 44(5): 614-619.
- WU Xiao, YANG Li-jun, HUANG Chong. Elastic dynamic calculation for bimodulous circular plate under the condition of impact load[J]. Journal of Xi'an Univ. of Arch. & Tech.: Natural Science Edition, 2012, 44(5): 614-619.
- [10] 吴 晓, 黄 翀, 孙 晋. 双模量悬臂梁在分布荷载作用下的 Kantorovich 解[J]. 湖南科技大学学报: 自然科学版, 2012, 27(2): 55-59.
- WU Xiao, HUANG Chong, SUN Jin. The Kantorovich solution for bimodulous cantilever under distributed loads [J]. Journal of Hunan University of Science & Technology: Natural Science Edition, 2012, 27(2): 55-59.
- [11] 吴 晓, 黄 翀, 杨立军. 双模量平行四边形板弯曲的 Kantorovich 变分解[J]. 力学季刊, 2010, 31(4): 597-603.
- WU Xiao, HUANG Chong, YANG Li-jun. Kantorovich variational solution of bending bimodulous parallelogram plate[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2010, 31(4): 597-603.

## Bending of rectangular plate with difference elastic modulus in tension and compression based on nonlinear foundation

WU Xiao, HUANG Chong, YANG Li-jun

(Dept. of Civil and Architectural Engineering, Hunan University of Arts and Science, Changde 415000, China)

**Abstract:** Bending of rectangular plate with difference elastic modulus in tension and compression based on nonlinear foundation is studied by using elastic theory. Bending differential equations of plate with difference elastic modulus in tension and compression based on nonlinear foundation are established. For bending of plate with difference elastic modulus in tension and compression based on nonlinear foundation, by taking beam functions as trial functions, analytical solutions of plate with difference elastic modulus in tension and compression based on nonlinear foundation are deduced with the combination method of Kantorovich with Galerkin, and calculation errors between analytical solutions and relevant literatures proved to be small. So, it is feasible that the combination method of Kantorovich with Galerkin is used in studying bending of rectangular plate with difference elastic modulus in tension and compression based on nonlinear foundation by taking beam functions as trial functions. Calculation results are compared with that obtained by finite element, and the accuracy of this method is verified relatively high. The analysis of examples indicated that bending calculation of rectangular plate which has larger difference between tensile elastic modulus and compressive elastic modulus may not apply classical elastic theory with the same elastic modulus, and elastic theory of difference elastic modulus in tension and compression can not be used either.

**Key words:** nonlinearity; foundation; elastic modulus; rectangular plate; bending