

矩形扩散水跃方程的近似解

宁利中¹, 宁碧波², 田伟利³, 王卓运¹, 王娜¹, 李开继¹

(1. 西安理工大学陕西省西北旱区生态水利工程重点实验室, 陕西 西安 710048;
2. 嘉兴学院建筑工程学院, 浙江 嘉兴 314001; 3. 上海大学美术学院, 上海 200444)

摘 要:在矩形扩散渠槽水跃的水面按线性变化和侧墙反力按梯形计算假设的基础上, 根据动量原理, 推导了矩形扩散渠槽的水跃方程. 通过级数展开处理, 获得了矩形扩散渠槽的水跃方程的近似解. 近似解的计算结果和实验值一致. 将近似解应用于矩形明渠水跃水力计算, 在稳定水跃范围内, 近似解与经典的矩形明渠水跃的理论解析解的最大相对误差为 6.67%. 说明矩形扩散渠槽的水跃方程的近似解可以应用到工程计算.

关键词:动量原理; 水跃; 矩形扩散渠槽

中图分类号:TV 131.4

文献标志码:A

文章编号:1006-7930(2013)06-0875-05

矩形扩散水跃是一种空间水跃, 水流特性比较复杂. 早在 20 世纪 30 年代就有人开始研究这种水跃的水流特性, 到五十年代以后开始了大量的研究工作, 已取得了许多成果, 并且在许多渠系建筑物的水流衔接与消能工程中采用了扩散消力塘形式. 从已有的近十种矩形扩散水跃共轭水深的计算式来看^[1-6], 除纯经验公式以外, 大部分都是一元三次方程, 需要用试算或迭代的方法求解, 计算颇为不便. 本文分析了矩形扩散水跃的水流特性, 建立了计算共轭水深的近似解, 并用试验资料进行了验证, 结果表明, 采用近似解计算方便且能满足工程设计的要求.

1 计算共轭水深的基本关系式

图 1 是矩形扩散水跃水力计算示意图.

假定水跃段边墙、底板上的边界切应力可以忽略不计. 取 X 轴为投影轴, 对 1—1 及 2—2 断面间的水体应用动量方程^[7], 则得

$$\frac{\gamma Q}{g}(\alpha_{02} v_2 - \alpha_{01} v_1) = P_1 - P_2 + 2P_n \sin \theta \quad (1)$$

式中: Q 为流量; γ 为水的容重; g 为重力加速度; v_1, v_2 为跃前及跃后断面的平均流速; α_{01}, α_{02} 为跃前及跃后断面的动量修正系数; P_1, P_2 为跃前及跃后断面的动水总压力, P_n 为水跃段侧墙上的动水总压力; θ 为扩散段侧墙扩散角.

根据连续方程, 有

$$Q = h_1 v_1 b_1 = h_2 v_2 b_2 \quad \text{即} \quad v_1 = \frac{Q}{h_1 b_1}, v_2 = \frac{Q}{h_2 b_2} \quad (2)$$

若假定水跃前、后断面处水流为渐变流, 且动水压力服从静水压力分布, 则

$$P_1 = \frac{1}{2} \gamma h_1^2 b_1$$

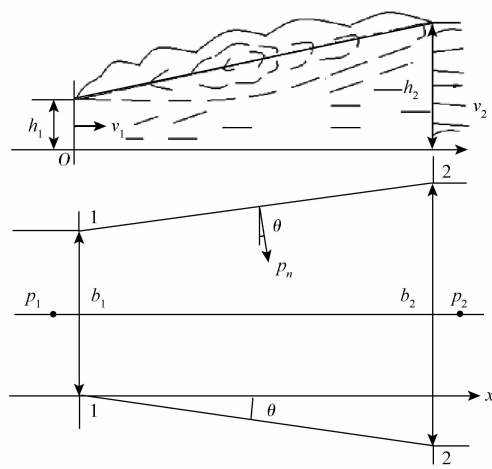


图 1 矩形扩散水跃计算图

Fig. 1 Hydraulic jump in a rectangular expanding channel

收稿日期: 2013-03-19 修改稿日期: 2013-11-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10872164); 陕西省重点学科建设专项资金项目

作者简介: 宁利中(1961-), 男, 陕西西安人, 博士, 教授, 从事对流动力学与高速水力学研究.

$$P_2 = \frac{1}{2} \gamma h_2^2 b_2 \quad (3)$$

$$\alpha_{01} = \alpha_{02} = \alpha_0 \quad (4)$$

对水跃轮廓及侧墙反力各种假设的比较结果^[1],我们认为在矩形扩散渠槽水跃的水面按线性变化和侧墙反力按梯形计算的假设基本上是合理的.虽然这种假设下水面线性变化,使水跃轮廓稍微变小,但计算中水跃含气层的容重取纯水的容重又会使计算结果稍微增加,这样两方面综合的结果使上述假设基本反映了实际情况,故有

$$P_n = \frac{1}{4} \gamma (h_1^2 + h_2^2) b L \quad (5)$$

$$L = \frac{b_2 - b_1}{2 \sin \theta} \quad (6)$$

将式(6)代入式(5)得

$$P_n = \frac{1}{8} \gamma (h_1^2 + h_2^2) (b_2 - b_1) \quad (7)$$

在式(2)至式(7), h_1, h_2 为水跃前、后断面的水深, b_1, b_2 为水跃前后断面的宽度.

将式(2),(3),(4),(7)代入式(1),得

$$\frac{\alpha_0}{g} Q^2 \left(\frac{1}{b_2 h_2} - \frac{1}{b_1 h_1} \right) = \frac{1}{2} h_1^2 b_1 - \frac{1}{2} h_2^2 b_2 + \frac{1}{4} (h_1^2 + h_2^2) (b_2 - b_1) \quad (8)$$

若令 $Fr_1^2 = \frac{Q^2}{g h_1^3 b_1^2} = \frac{v_1^2}{g h_1}, \frac{h_2}{h_1} = \eta, \frac{b_2}{b_1} = \lambda$ 则式(8)可简化为下列形式

$$4 \alpha_0 Fr_1^2 = \frac{\eta(\eta^2 - 1)}{\lambda \eta - 1} \quad (9)$$

若令 $N = \frac{4 \alpha_0 Fr_1^2}{(1 + \lambda) \lambda}$, 则式(9)可化成

$$\eta^3 - (N \lambda + 1) \eta + N = 0 \quad (10)$$

式(10)即为上述假设条件下的共轭水深关系式.

2 公式(10)的简化近似解

求解公式(10)时,需试算或迭代.也有精确解,但精确解式中 α_0 是根据经验选择的^[4],同时计算时仍有些繁琐.因而在满足设计要求的条件下,有必要探讨共轭水深的简化表达式.

将式(10)变形,得

$$\eta = \sqrt{1 + N \lambda} \left(1 - \frac{N}{N \lambda + 1} \frac{1}{\eta} \right)^{\frac{1}{2}}$$

首先对式(10)作一简单分析,对于稳定水跃 $4.5 \leq Fr_1 \leq 9.0$, 而 $\lambda = \frac{b_2}{b_1} > 1$, 但变化范围不大,因

而 $N = \frac{4 \alpha_0 Fr_1^2}{(1 + \lambda) \lambda} > 1$, 那么 $N \lambda + 1 \geq 1$, 根据问题的性质知 $\eta > 1$. 若令 $\sqrt{N \lambda + 1} = D$, 则

$$\eta = D \left(1 - \frac{N}{D^2} \frac{1}{\eta} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

将式(12)左边展开,得

$$\sqrt{1 - \frac{N}{D^2} \frac{1}{\eta}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{N}{D^2} \frac{1}{\eta} - \dots \quad (13)$$

取式(13)前两项代入式(12),得

$$\eta^2 - D \eta + \frac{N}{2D} = 0 \quad (14)$$

解方程(14),得

$$\eta = \frac{1}{2}(D \pm \sqrt{D^2 - 2\frac{N}{D}})$$

经分析,合理解为

$$\eta = \frac{1}{2}(D + \sqrt{D^2 - 2\frac{N}{D}}) \quad (15)$$

将 D, N 的表达式代入式(15),得

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{4\alpha_0 Fr_1^2}{1+\lambda}} + \sqrt{1 + \frac{4\alpha_0 Fr_1^2}{1+\lambda} - \frac{8\alpha_0 Fr_1^2}{(1+\lambda + 4\alpha_0 Fr_1^2)\lambda}} \right] \quad (16)$$

令 $M = \frac{4Fr_1^2}{1+\lambda}$, 则

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \alpha_0 M} + \sqrt{\alpha_0 M - 1 + \frac{2\lambda}{(1 + \alpha_0 M)\lambda}} \quad (17)$$

对于稳定水跃 $4.5 \leq Fr_1 \leq 9.0$, 因而 M 一般比较大, 则 $(\alpha_0 M - 1) \gg \frac{2}{(1 + \alpha_0 M)\lambda}$, 故式(17)可进一步简化成

$$\eta_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + \alpha_0 M} + \sqrt{\alpha_0 M - 1}) \quad (18)$$

将 M 代入式(18), 得

$$\eta_2 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 + 4\alpha_0 Fr_1^2} + \sqrt{4\alpha_0 Fr_1^2 - 1 - \lambda}}{\sqrt{1 + \lambda}} \quad (19)$$

若将式(19)右边展开, 则

$$\begin{aligned} \eta_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_0 M} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha_0 M} \right) + \left(-\frac{1}{8} \right) \left(\frac{1}{\alpha_0 M} \right)^2 + \dots + 1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\alpha_0 M} \right) + \left(-\frac{1}{8} \right) \left(-\frac{1}{\alpha_0 M} \right)^2 + \dots \right] \\ &\approx \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_0 M} \left[2 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\alpha_0 M} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

将 $M = \frac{4Fr_1^2}{1+\lambda}$ 代入上式并化简, 得

$$\eta'_2 = \frac{128\alpha_0^2 Fr_1^4 - (1+\lambda)^2}{64\alpha_0^{1.5} Fr_1^3 (1+\lambda)^{0.5}} \quad (20)$$

式(20)即为方程(10)的简化近似解。

3 近似解的验证及经验公式

为验证近似解的正确性, 给出其应用范围, 利用冯家山水库工程资料^[1]对式(20)等进行了验证. 冯家山工程试验条件是:

$$Q = 1.51 \sim 9.27 \text{ m}^3/\text{s}, Fr_1 = 3.5 \sim 6.5, \lambda = b_2/b_1 = 1.38 \sim 1.87, b_2 = 2.0 \text{ m}, \theta = 5^\circ 42'.$$

用公式(20)计算与实测的下游跃后水深与流量的关系如图2所示, 其中式(20)中 $\alpha_0 = 1.0$. 经进一步分析, 矩形扩散水跃共轭水深也可拟合为

$$\eta_3 = (2M - 1)/2M^{0.5} \quad (21)$$

式(21)的计算结果与实测值的比较见图3.

由图可以看出:

(1) 当 $Fr_1 \geq 4.5$, 即 $Q < 4.0 \text{ m}^3/\text{s}$ 时, 用简化近似解(20)计算的共轭水深与实验值能完全吻合. 因而, 在稳定水跃情况下 ($4.5 \leq Fr_1 \leq 9.0$), 用式(20)计算共轭水深精度比较高且计算方便.

(2) 当 $Q > 5.0 \text{ m}^3/\text{s}$ 时, $Fr_1 < 4.5$, 属于低佛氏数范围, 随 Fr_1 降低(流量加大), 可能是动量修正系数选择为 1.0 的原因, 近似解与实测值的误差加大, 但当 $3.5 \leq Fr_1 \leq 4.5$ 时, 最大误差不超过 5%.

(3) 经验式(21)能与实测值很好的吻合. 当 $Fr_1 > 3.5$ 时, 最大误差不超过 2.5%, 且精度较解(20)高, 计算也方便.

经上述分析,若以最大误差小于2.5%为标准,则式(20)的应用条件是 $Fr_1 > 4.0$,式(21)的误差甚微。

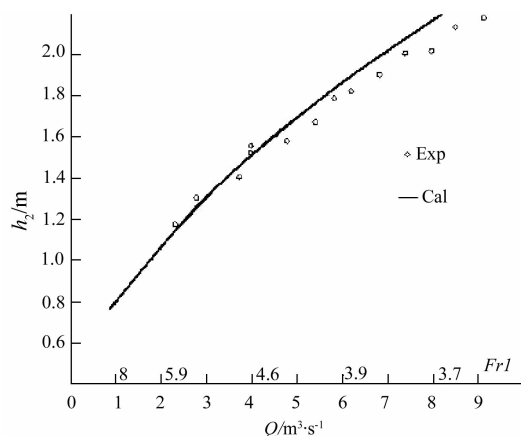


图2 式(20)的计算结果与实验资料比较

Fig. 2 Comparison of results calculated by Eq. (20) with experimental data

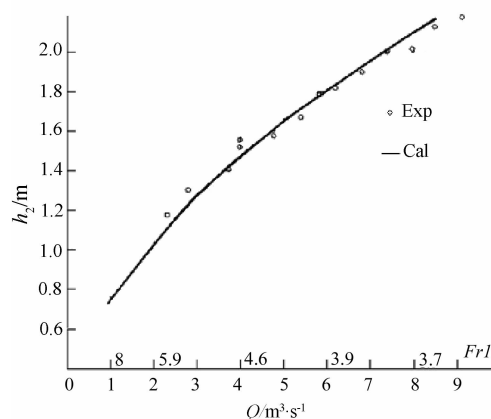


图3 式(21)的计算结果与实验资料比较

Fig. 3 Comparison of results calculated by Eq. (21) with experimental data

图4是用式(20)的计算结果和有关工程试验($\theta = 15^\circ, 25^\circ$)值^[5]的比较,可以看出试验与计算是一致的。

作为对式(20)的另外一种检验,我们知道,经典的矩形明渠水跃水深比有理论解析解。^[7]现在将式(20)应用于矩形明渠水跃水力计算,并将其计算结果与经典的矩形明渠水跃水深比的理论解析解进行比较。对于稳定水跃, $4.5 \leq Fr_1 \leq 9.0$ 。当 $Fr_1 = 4.5$ 时,取 $\lambda = 1.0$,式(20)计算结果与矩形明渠水跃水深比的理论解析解的相对误差6.67%;当 $Fr_1 = 9.0$ 时,取 $\lambda = 1.0$,式(20)计算结果与矩形明渠水跃水深比的理论解析解的相对误差3.79%。这说明在稳定水跃范围内,式(20)有很好的精度,是可以信赖的。

4 结 语

(1) 本文根据动量定律推导了矩形扩散水跃的水跃方程,即共轭水深关系式。

(2) 经简化分析给出水跃方程的近似解为

$$\eta'_2 = \frac{128Fr_1^4 - (1+\lambda)^2}{64Fr_1^3(1+\lambda)^{0.5}} \quad Fr_1 > 4.5$$

(3) 本文还给出了计算共轭水深的经验式,即

$$\eta_3 = \frac{8Fr_1^2 - (1+\lambda)}{4Fr_1 \sqrt{1+\lambda}} \quad Fr_1 > 3.5$$

经试验资料验证表明,上述二式的计算精度均能满足设计要求,并且计算简练。

参考文献 References

- [1] 张志恒. 矩形扩散水跃的水力计算[J]. 陕西水利科技, 1973(1):10-26.
ZHANG Zhi-heng. Hydraulic calculation of expanding rectangular hydraulic jump[J]. Shaanxi science and technology of water resources, 1973(1):10-26.

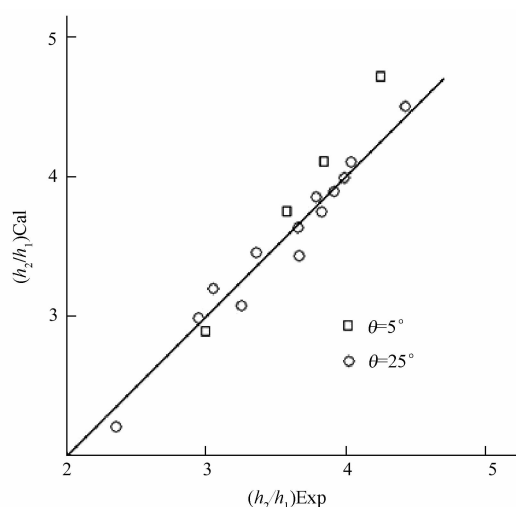


图4 式(20)的计算结果与实验资料比较

Fig. 4 Comparison of results calculated by Eq. (20) with experimental data

- [2] 于志忠. 矩形扩散水跃的计算方法[J]. 水利学报, 1982, 13(2): 39-45.
YU Zhi-zhong. Method for calculating expanding rectangular hydraulic jump[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1982, 13(2): 39-45.
- [3] ABDELKAWI M K, JOHN A M. Radial Hydraulic Jump[J]. Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 1979, 105(9): 1065-1078.
- [4] 吴持恭. 水力学(上册)[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979: 374-377.
WU Chi-gong. Hydraulics(Vol. I)[M]. Beijing: People's education press, 1979: 374-377.
- [5] 姜国干, 陈椿庭. 水工模型试验[M]. 2版. 北京: 水利电力出版社, 1985: 317.
JIANG Guo-gan, CHEN Chun-ting. Hydraulic model practice[M]. 2nd ed. Beijing: China water resources and electric power press, 1985: 317.
- [6] 李建中, 宁利中. 高速水力学[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1994.
LI Jian-zhong, NING Li-zhong. High speed hydraulics[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 1994.
- [7] FINNEMORE E J, FRANZINI J B. Fluid mechanics with engineering applications[M]. 10th ed. Beijing: Tsinghua university press, 2003: 460-468.

An approximation solution of the hydraulic jump equation in the rectangular expanding channel

NING Li-zhong¹, NING Bi-bo², TIAN Wei-li³, WANG Zhuo-yu¹, WANG Na¹, LI Kai-ji¹

(1. State Key Laboratory of Eco-Hydraulic Engineering in Shaanxi, Xi'an Univ. of Tech., Xian 710048, China;

2. College of Civil Engineering and Architecture, Jiaxing Univ., Jiaxing 314001, China;

3. College of Fine Arts, Shanghai Univ., Shanghai 200444, China)

Abstract: Based on the assumptions of the linear variation of the water surface profile and the trapezoidal pressure distribution on the side wall in the hydraulic jump in a rectangular expanding channel, an equation of the hydraulic jump in a rectangular expanding channel is derived by using the momentum principle in this paper. An approximation solution of the hydraulic jump equation is obtained by applying the analysis of series expansion. The calculated values of the solution of approximation agree with the experimental data. By applying the approximation solution to the hydraulic jump in a rectangular open channel, the maximum error of the approximation solution relative to the classically theoretical solution in a rectangular open channel is 6.67% in the range of a steady jump. The results have shown that the approximation solution of the hydraulic jump equation can be used to compute the engineering problem.

Key words: momentum principle; hydraulic jump; rectangular expanding channel