

# 基于辅助体系法研究空间直线梁桥传递关系

杨帆<sup>1</sup>, 李青宁<sup>2</sup>, 孙建鹏<sup>2</sup>

(1. 西安工业大学建筑工程学院, 陕西 西安 710032; 2. 西安建筑科技大学土木工程学院, 陕西 西安 710055)

**摘要:** 针对一般研究桥梁传递关系都是以初参数法为基础, 公式较为繁琐且占用内存空间大这一问题, 利用辅助体系法对空间直线梁桥的受力特性进行了分析. 为了更好的研究空间直线梁桥的传递关系, 为大型桥梁的设计与结构分析提供可靠的依据, 基于辅助体系法并考虑了剪切变形导出了空间直梁的场传递矩阵精确解, 并推导了不同支承情况的点传递矩阵. 编制了相应的计算机程序, 并进行了算例计算. 算例结果表明, 该方法正确有效, 可用于结构的初步设计和最终校核.

**关键词:** 辅助体系法; 空间直梁; 传递矩阵; 场传递矩阵; 点传递矩阵

**中图分类号:** TU313.2

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1006-7930(2014)05-0701-05

传递矩阵法是随着计算机的出现和发展而逐步形成并广泛应用的一种结构分析方法. 其基本思想是把一个整体结构的力学分析问题转化为若干单元或子结构的“对接”与“传递”的力学分析问题<sup>[1,2]</sup>.

本文以辅助体系法为基础, 推导了空间直线梁桥的传递场矩阵以及不同支承条件的点阵. 基于以上理论, 编制了计算机程序, 进行了相应的算例计算. 算例表明, 推导公式的正确性和优越性.

## 1 传递矩阵法的基本原理

传递矩阵法<sup>[3,4]</sup>的原则用图 1 加以解释. 具有任意支承的连续梁的初始状态和变形状态, 如果在梁的左端作用力偶  $M_0$ , 则所有支承处的变形量和内力量均与  $M_0$  成线性函数. 如图 1 所示, 梁左端自由, 左端的内力量  $Q_0$ ,  $M_0$  都为零 (作为边界条件), 变形量  $v_0$ ,  $\theta_0$  为自由量. 连续梁各支承处及跨间的所有内力量和变形量都线性地决定于这些量和外荷载. 而未知量  $v_0$ ,  $\theta_0$  由梁右端的边界条件来确定.

因为此梁右端为固定端, 说明其边界条件为  $v_4(v_0, \theta_0, P)=0$ ,  $\theta_4(v_0, \theta_0, P)=0$ . 由此刚好列出两个关于  $v_0$  和  $\theta_0$  的线性方程组, 只要建立左右端内力和变形之间的传递关系, 梁上任意截面的内力量和变形量就可以求得了.

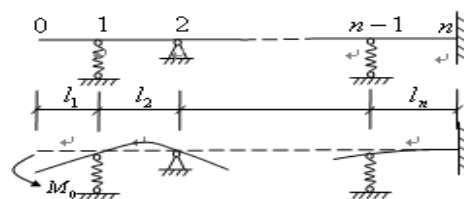


图 1 具有任意支承左端承受力偶的连续梁

Fig. 1 The continuous beam on arbitrary supports with the couple on the left

## 2 辅助体系法求空间直梁传递关系

空间直线梁坐标系如图 2 所示,  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴分别表示轴向、横向和竖向.  $u$ 、 $v$ 、 $w$  分别是  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴向位移;  $\theta_x$ 、 $\theta_y$ 、 $\theta_z$  分别是绕  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴的弯曲转角. 梁横截面特性及材料特性沿  $x$  轴向不变.

空间直线梁的振动模型包括 13 个状态矢量, 即  $S = \{N_x, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z, u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z\}^T$ .

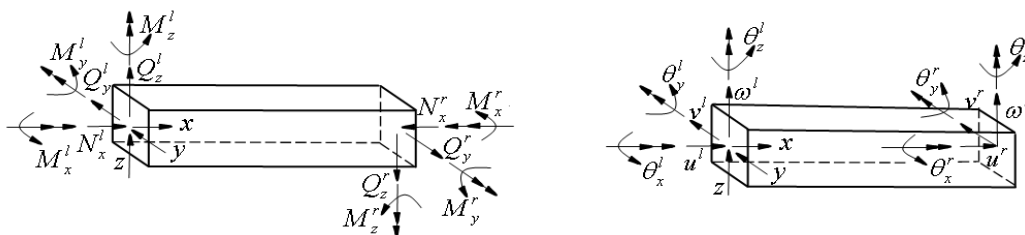


图 2 空间直线梁传递矩阵计算坐标系

Fig. 2 The coordinate system of transfer matrix of space straight beam

收稿日期: 2013-09-25

修改稿日期: 2014-07-28

基金项目: 国家自然科学基金项目(51078306); 陕西省教育厅专项科研计划资助项目(12JK0916); 西安建筑科技大学重大科技项目创新基金项目(ZX0901); 高等学校博士学科点专项科研基金项目(20106120110004)

作者简介: 杨帆 (1984-), 女, 博士, 主要从事桥梁工程结构分析及抗震的研究. E-mail: yangfan0314@163.com

## 2.1 场矩阵

左截面各状态变量记为  $\{S^l\} = \{N_x^l, Q_y^l, Q_z^l, M_x^l, M_y^l, M_z^l, u^l, v^l, \omega^l, \theta_x^l, \theta_y^l, \theta_z^l\}^T$ , 右截面各状态变量记为  $\{S^r\} = \{N_x^r, Q_y^r, Q_z^r, M_x^r, M_y^r, M_z^r, u^r, v^r, \omega^r, \theta_x^r, \theta_y^r, \theta_z^r\}^T$ .

根据传递矩阵法的基本原理<sup>[5,6]</sup>必有一个  $13 \times 13$  维矩阵  $T$  使得:

$$\{S^r\} = [T]\{S^l\} + \{S^p\} \quad (1)$$

矩阵  $[T]$  即为等截面直梁左右截面之间的传递场矩阵, 其元素  $t_{mn}$  表示  $l$  端  $n$  号状态变量  $S_n^l = 1$ , 其余状态变量都为 0 时, 传递给  $r$  端  $m$  号状态变量的值.

荷载向量  $\{S^p\} = \{N_x^p, Q_y^p, Q_z^p, M_x^p, M_y^p, M_z^p, u^p, v^p, \omega^p, \theta_x^p, \theta_y^p, \theta_z^p\}$  表示  $l$  端状态变量  $\{S^l\}$  都为 0 时, 荷载传递给  $r$  端状态变量的值 (荷载项).

右端状态变量  $\{S^r\}$  与左端状态变量  $\{S^l\}$  及荷载变量  $\{S^p\}$  的关系式(2)可分块表示为

$$\begin{bmatrix} \{F^r\} \\ \{\delta^r\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_1] & [T_2] \\ [T_3] & [T_4] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \{F^l\} \\ \{\delta^l\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{F^p\} \\ \{\delta^p\} \end{bmatrix} \quad (2)$$

取图 3 单元辅助体系<sup>[7]</sup>,  $[T_1]$  中的为力元素可在图 3a 中令  $N_x^l = 1$  (其他元素为 0), 利用平衡条件求得; 同理, 分别令  $Q_y^l = 1$  (其他元素为 0);  $Q_z^l = 1$  (其他元素为 0);  $M_x^l = 1$  (其他元素为 0);  $M_y^l = 1$  (其他元素为 0);  $M_z^l = 1$  (其他元素为 0) 可以求得  $[T_1]$  中的其他元素.

$[T_2]$  中的力元素可在图 3b 分别令  $u^l = 1$  (其他元素为 0),  $v^l = 1$  (其他元素为 0),  $\omega^l = 1$  (其他元素为 0),  $\theta_x^l = 1$  (其他元素为 0),  $\theta_y^l = 1$  (其他元素为 0),  $\theta_z^l = 1$  (其他元素为 0), 可知  $[T_2]$  中的元素全为 0.

$[T_3]$ ,  $[T_4]$  中的位移元素可由虚功原理即(3)式, 按图 3c, 3d 求得:

$$T_{ij} = \int \frac{N_x^l N_x^r}{EA} dx + \int \frac{\mu Q_y^l Q_y^r}{GA} dx + \int \frac{\mu Q_z^l Q_z^r}{GA} dx + \int \frac{M_x^l M_x^r}{GI_t} dx + \int \frac{M_y^l M_y^r}{EI_y} dx + \int \frac{M_z^l M_z^r}{EI_z} dx - \sum R^l C^r \quad (3)$$

式中:  $T_{ij}$  为  $[T_3]$ 、 $[T_4]$  中的位移元素;  $EA$ ,  $GA/\mu$ ,  $EI_y$ ,  $EI_z$ ,  $GI_t$  则分别为拉压、剪切以及弯曲刚度;

$N_x^l$ ,  $Q_y^l$ ,  $Q_z^l$ ,  $M_x^l$ ,  $M_y^l$ ,  $M_z^l$ ,  $R^l$  则分别为右端所求位移的虚力  $P^r = 1$  在单位辅助体系中产生的内力和支座反力;  $N_x^r$ ,  $Q_y^r$ ,  $Q_z^r$ ,  $M_x^r$ ,  $M_y^r$ ,  $M_z^r$ , 则分别为左端  $S_n^l = 1$  在单位辅助体系中产生的内力和支座位移.

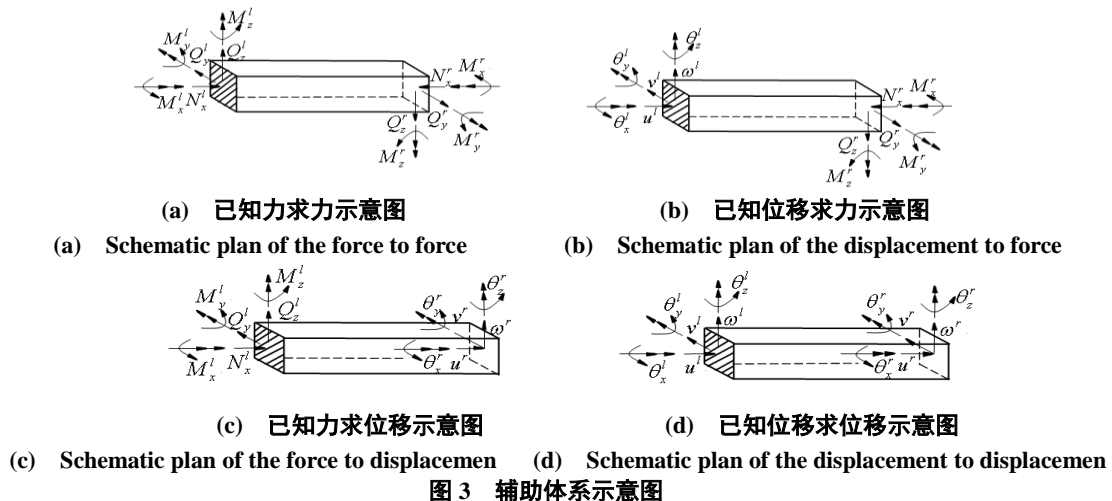


图3 辅助体系示意图

Fig. 3 The sketch of auxiliary system method

令荷载单独作用在辅助体系上, 由平衡条件根据式(4)求得力荷载项:

$$N_{xp} = \sum P_x, Q_{yp} = \sum P_y, Q_{zp} = \sum P_z, M_{xp} = \sum M_x, M_{yp} = \sum M_y, M_{zp} = \sum M_z \quad (4)$$

式中:  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  则分别为荷载作用下, 辅助体系左端不受力, 右端的力.

位移荷载项也可利用虚功原理由式(5)求得

$$A_p = \int \frac{N_x^l N_{xp}}{EA} dx + \int \frac{\mu Q_y^l Q_{yp}}{GA} dx + \int \frac{\mu Q_z^l Q_{zp}}{GA} dx + \int \frac{M_x^l M_{xp}}{GI_t} dx + \int \frac{M_y^l M_{yp}}{EI_y} dx + \int \frac{M_z^l M_{zp}}{EI_z} dx \quad (5)$$

式中:  $A_p = u_p, v_p, \omega_p, \theta_{xp}, \theta_{yp}, \theta_{zp}$ ;  $N_{xp}, Q_{yp}, Q_{zp}, M_{xp}, M_{yp}, M_{zp}$  则分别为荷载在辅助体系中产生的内力. 采用辅助体系法, 求得空间直线的传递场矩阵为

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_1] & [T_2] \\ [T_3] & [T_4] \end{bmatrix} \tag{6}$$

式中:  $[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; [T_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; [T_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; [T_4] = \begin{bmatrix} -\frac{l}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{6EI_z} - \frac{\mu l}{GA} & 0 & 0 & 0 & -\frac{l^2}{2EI_z} \\ 0 & 0 & \frac{l^3}{6EI_y} - \frac{\mu l}{GA} & 0 & \frac{l^2}{2EI_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l}{GI_t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l^2}{2EI_y} & 0 & -\frac{l}{EI_y} & 0 \\ 0 & \frac{l^2}{2EI_z} & 0 & 0 & 0 & -\frac{l}{EI_z} \end{bmatrix}$

2.2 点矩阵

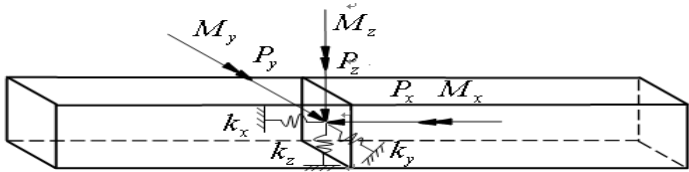


图 4 空间直线梁集中荷载或弹性支座示意图

Fig. 4 The sketch of space straight beam with concentrated load or elastic support

设在梁的某处( $j$ 处)有集中荷载或弹性支座<sup>[8-9]</sup>, 如图 4 所示. 由于该处的内力或位移发生突变, 其左右两侧状态向量存在传递关系, 该处左端的状态向量记为  $S_j^l$ , 右端的状态向量记为  $S_j^r$ , 其传递关系表示为

$$\{S_j^r\} = [\bar{T}_j] \{S_j^l\} = \begin{bmatrix} [\bar{T}_j]_1 & [\bar{T}_j]_2 \\ [\bar{T}_j]_3 & [\bar{T}_j]_4 \end{bmatrix} \{S_j^l\} \tag{7}$$

式中:  $[\bar{T}_j]$  称为该处的点矩阵;  $[\bar{T}_j]_1$ 、 $[\bar{T}_j]_4$  为单位阵;  $[\bar{T}_j]_3$  为零阵;  $[\bar{T}_j]_2 =$

$$\begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P_x \\ 0 & k_y & 0 & 0 & 0 & 0 & -P_y \\ 0 & 0 & k_z & 0 & 0 & 0 & -P_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M_z \end{bmatrix}$$

3 边界条件

空间直线梁的边界支承情况<sup>[10]</sup>有以下几种, 其边界条件与自由量见表 1.

表 1 空间直线梁的边界条件  
Tab. 1 The boundary conditions of space straight beam

支承条件	边界条件	自由量
固定端	$u=0; v=0; \omega=0; \theta_x=0; \theta_y=0; \theta_z=0$	$N_x; Q_y; Q_z; M_x; M_y; M_z$
固定铰支座	$M_x=0; M_y=0; M_z=0; u=0; v=0; \omega=0$	$\theta_x; \theta_y; \theta_z; N_x; Q_y; Q_z$
自由端	$N_x=0; Q_y=0; Q_z=0; M_x=0; M_y=0; M_z=0$	$u; v; \omega; \theta_x; \theta_y; \theta_z$
滑动支座	$Q_z=0; u=0; v=0; \theta_x=0; \theta_y=0; \theta_z=0$	$\omega; N_x; Q_y; M_x; M_y; M_z$
链杆支座	$N_x=0; Q_y=0; M_x=0; M_y=0; M_z=0; \omega=0$	$u; v; \theta_x; \theta_y; \theta_z; Q_z$

4 空间直线梁的总传递矩阵

直线梁上各段的场矩阵和点矩阵确定之后, 任一端的状态向量可以由下式求得:

$$S_i = T_i T_{i-1} \cdots \bar{T}_j \cdots T_2 T_1 S_0 \tag{8}$$

如果全梁被分成  $n$  段, 则有

$$S_n = T_n T_{n-1} \cdots \bar{T}_j \cdots T_2 T_1 S_0 = TS_0$$

(9)

其中， $T$  为全梁的总体传递矩阵。

5 计算实例

根据直线梁截面几何物理量的不同，荷载位置和大小，中间支撑情况，对梁进行划分单元。根据单元的实际情况建立结构相应的场矩阵和点矩阵，组合成总传递矩阵。然后根据结构两端的边界条件进行求解，即可以求得结构的初始状态向量，进而求出结构各截面的状态向量。

某双跨简支梁，两端固结，中间设有固定铰支座，该梁受到  $z$  向均布荷载以及  $y$  向集中荷载作用，其计算简图如图 5 所示，考虑结构的剪切变形，空间直线梁的基本参数如表 2、表 3 所示。

应用 Matlab 软件对本文的基于辅助体系的传递矩阵法进行了编程，其结果见图 6 所示，可以清晰的看到每个截面的状态向量。

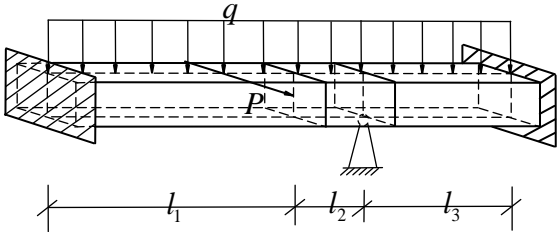


图 5 算例的计算简图

Fig. 5 The calculating diagram of the example

表 2 直梁第一跨的基本参数

Tab. 2 The basic parameters of the first cross-space straight beam

$l_1 / \text{m}$	$l_2 / \text{m}$	$A_1 / \text{m}^2$	$E_1 / \text{MPa}$	$I_{t1} / \text{m}^4$	$I_{y1} / \text{m}^4$	$I_{z1} / \text{m}^4$	$G_1 / \text{MPa}$	$\mu$
4	1	0.1	$2.1 \times 10^5$	0.2	0.4	0.4	$0.425 E_1$	0.35

表 3 直梁第二跨的基本参数

Tab. 3 The basic parameters of the second cross-space straight beam

$l_3 / \text{m}$	$q / \text{kN} \cdot \text{m}^{-1}$	$P / \text{kN}$	$A_2 / \text{m}^2$	$E_2 / \text{MPa}$	$I_{t2} / \text{m}^4$	$I_{y2} / \text{m}^4$	$I_{z2} / \text{m}^4$	$G_2 / \text{MPa}$
3	10	100	0.2	$2.1 \times 10^5$	0.3	0.5	0.5	$0.425 E_2$

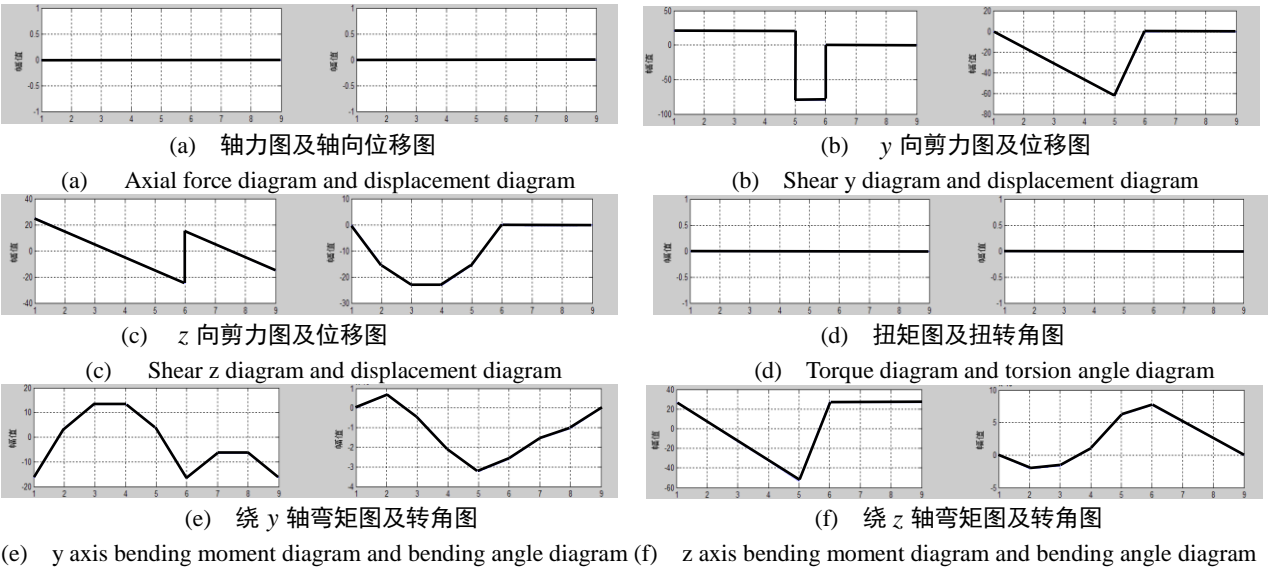


图 6 空间直线梁的内力及变形图

Fig. 6 The internal force and deformation diagram of space straight beam

图 6 可以看出整个梁跨的内力与变形，运用有限元计算的结果与本方法结果一致。可以证明此方法的正确性。

## 6 结论

基于辅助体系法求解空间直线梁传递矩阵,计算过程更为简便,尤其对于多跨连续梁的求解更为突出.该方法考虑了剪切变形的影响,传递矩阵的场矩阵为精确解,可以推广应用到曲线梁的求解以及支座桥墩的计算.应用该方法分析多跨连续梁的内力与位移,计算过程简单,且结果精确.

## 参考文献 References

- [1] 钟万勰, 欧阳华江, 邓子辰. 最优控制与计算结构力学的模拟关系[J]. 力学与实践, 1993, 15(1): 8-11.  
ZHONG Wanxie, OUYANG Huajiang, DENG Zichen. The simulation relationship between computational structure mechanics and optimal control[J]. Mechanics in Engineering, 1993, 15(1): 8-11.
- [2] 李青宁. 组合单元的线性与非线性传递矩阵[J]. 西安冶金建筑学院学报, 1991, 23(3): 366-375.  
LI Qingning. The linear and nonlinear transfer matrix of combination unit[J]. Journal of Xi'an Metallurgical Construction University, 1991, 23(3): 366-375.
- [3] LEE U. Vibration analysis of one-dimensional structures using the spectral transfer matrix method[J]. Engineering Structures, 2000, 22: 681-690.
- [4] 刘庆潭, 倪国荣. 结构分析中的传递矩阵法[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1997.  
LIU Qingtan, NI Guorong. The transfer matrix method of structural analysis[M]. Beijing: Chinese Railway Press, 1997.
- [5] MI Caiying, AN Qi, LI Fu. Calculation method of wheelset natural frequency based on transfer matrixes[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2006, 6(4): 20-26.
- [6] 李青宁. 变截面杆元的传递矩阵和刚度矩阵[J]. 建筑结构, 1999, 29 (3): 52-55.  
LI Qingning. The transfer matrix and the stiffness matrix of variable cross-section bar element[J]. Building Structure, 1999, 29 (3): 52-55.
- [7] 李青宁. 变截面杆元传递矩阵法[J]. 西安建筑科技大学学报: 自然科学版, 1997, 33(1): 18-22.  
LI Qingning. The transfer matrix method of variable section beam[J]. J. of Xi'an Univ. of Arch. & Tech.: Natural Science Edition, 1997, 33 (1): 18-22.
- [8] 韦成龙, 李斌, 刘小燕. 槽型宽翼受压构件剪力滞分析的传递矩阵法[J]. 力学与实践, 2008, 30(6): 39-42.  
WEI Chenglong, LI Bin, LIU Xiaoyan. Transfer matrix method for shear lag analysis of a beam-and-slab structure under axial loads[J]. Mechanics in Engineering, 2008, 30(6): 18-22.
- [9] 孙建鹏. 曲线箱梁桥状态传递理论研究[D]. 西安: 西安建筑科技大学, 2010.  
SUN Jianpeng. Study on state transfer theory of curved box bridges[D]. Xi'an: Xi'an Univ. of Arch. & Tech, 2010.
- [10] 芮筱亭. 多体系统传递矩阵法及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008.  
RUI Xiaoting. Transfer matrix method of multibody system and its applications[M]. Beijing: Science Press, 2008.

## Research on the transfer relationship of the space straight bridge based on the auxiliary system method

YANG Fan<sup>1</sup>, LI Qingning<sup>2</sup>, SUN Jianpeng<sup>2</sup>

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Xi'an Technological University, Xi'an 710032, China;  
2. School of Civil Engineering, Xi'an Univ. of Arch. and Tech., Xi'an 710055, China)

**Abstract:** In view of the fact that the vast majority of the research work is performed based on original parameter method and the calculating expressions are complicated and needed too much memory space, the mechanical characteristic of the space bridge was analyzed by using auxiliary system method. In order to research the transfer relationship of the space straight bridge well, according to the auxiliary system method, the field transfer matrix and the point transfer matrix with different support conditions of the space straight bridge was derived and the load items with different loads were calculated for the bridge design and structural analysis. In addition, the corresponding calculation program was compiled, and some example were carried out. The results indicate that the method is correct and efficient, and can be used for the initial design and final check-up of structures.

**Key words:** auxiliary system method; space straight beam bridge; transfer matrix; field transfer matrix; point transfer matrix

(本文编辑 沈波)