

纤维混凝土受压细观统计损伤本构模型研究

关 晓, 牛荻涛, 吴 博, 王家滨

(西安建筑科技大学土木工程学院, 陕西 西安 710055)

摘要: 分别对 31 个普通混凝土试块、38 个钢纤维混凝土试块及 11 个聚丙烯纤维混凝土进行了单轴受压本构试验研究, 采用卡方检验方法对试验结果进行统计分析并假设检验, 确定了以峰值应变为损伤变量的概率分布。基于唯象细观统计损伤力学及热力学的相关理论, 在传统模型基础上引入了损伤阈值概念, 并研究了不同混凝土损伤阈值取值问题。同时, 探讨了塑性应变对本构模型的影响, 建立了考虑塑性应变及损伤阈值的纤维混凝土单轴受压细观统计损伤本构模型。研究结果表明: 损伤变量较好的服从 Weibull 分布函数; 普通混凝土损伤阈值 γ 为 0.6 倍峰值应变, 掺入纤维后, 损伤阈值 γ 提高为 0.8 倍峰值应变; 所建立的本构模型能够有效地描述纤维混凝土的受压本构关系。

关键词: 细观统计损伤力学; Weibull 分布函数; 损伤本构模型; 塑性应变; 损伤阈值

中图分类号: TU528.07

文献标志码: A

文章编号: 1006-7930(2015)05-0678-06

Research on meso stochastic damage constitutive model of fiber concrete under compression

GUAN Xiao, NIU Ditao, WU Bo, WANG Jiabin

(School of Civil Engineering, Xi'an Univ. of Arch. & Tech., Xi'an 710055, China)

Abstract: The stress-strain relationship experiments of different concrete under uniaxial compression were studied. The results of stress-strain experiments were analyzed by the method of Chi-square testing that the probability distribution of damage variable and related parameters were determined. The introduction of damage threshold based on the traditional Weibull random distribution of two parameters, and the range of damage threshold was discussed. Meanwhile, the influence of plastic strain on the constitutive model was discussed, and the meso stochastic damage constitutive model of fiber concrete under compression were established according to the phenomenological microscopic statistical damage mechanics and thermodynamic theory. Results showed that the damage variable obeyed Weibull distribution, and the damage threshold of fiber concrete was greater than ordinary concrete. The given model of this paper helped describe the stress-strain curve of fiber concrete under uniaxial compression.

Key words: microscopic statistical damage mechanics; weibull distribution function; damage constitutive model; plastic strain; damage threshold

近些年来, 众学者将不同纤维掺入到普通混凝土中, 对其力学性能进行了研究, 取得了不少的有益成果^[1-3]。与普通混凝土相比, 纤维混凝土, 由于其中乱向分布的纤维能够分担混凝土所承受的应力, 可提高混凝土的力学性能。而混凝土在单轴受压作用下的损伤机制实质上由拉应力引起的, 纤维的加入可以有效的抑制这种拉应力引起的裂纹, 故研究纤维混凝土单轴受压损伤本构具有重要意义。

随着连续介质损伤力学理论的逐步发展及对混凝土在不同尺度上进行的大量基础研究, 基于损伤理论的本构模型研究取得了一些有益的成果, 但如何定义损伤变量及损伤变量如何与宏观力学量建立联系依然是一个难点问题^[4-6]。李兆霞、余寿文等^[7-12]认为基于细观统计损伤理论的模型可以将细观损伤变量与宏观力学量较好的联系起来, 将是今

后损伤力学的发展趋势。

基于细观统计损伤理论及平行杆模型^[13], 建立了损伤变量为极限应变的损伤演化方程, 并对具有统计意义 (样本空间大于 30) 的应力应变试验结果进行统计分析并假设检验, 以此确定了微损伤系统的概率分布, 导出了确定该分布函数变化的统计演化方程, 提出了考虑塑性变形及损伤阈值的纤维混凝土单轴受压细观统计损伤本构模型。

1 统计损伤本构模型的建立

根据文献[13]的力学模型基础, 将混凝土试件视为由无穷多个微元体组成的, 各微元体由相互平行且等间距分布的弹脆性链杆来模拟, 链杆的断裂表示微损伤的产生。在宏观裂缝出现之前各微元体都可能发生损伤, 且发生断裂的链杆是随机的。

收稿日期: 2015-01-30 修改稿日期: 2015-10-10

基金项目: 国家自然科学基金(51278403); 教育部创新团队(IRT13089)

作者简介: 关 晓(1984-), 男, 博士生, 主要从事混凝土结构耐久性研究。E-mail: 86484869@qq.com

假设链杆的断裂应变服从某一分布函数 $F(x)$, 并且我们视混凝土材料的损伤现象为一连续过程, 即 $F(x)$ 在其自变量取值空间域中为连续的, 则存在一个 $f(x)$, 使得

$$F'(x) = f(x)$$

我们给微元体施加一个微小扰动 $\Delta\varepsilon$, 使得整个系统应变变为 $\varepsilon + \Delta\varepsilon$, 根据概率分布函数的性质可知, 增加的微小扰动 $\Delta\varepsilon$ 所引起链杆断裂的概率可表示为

$$F(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - F(\varepsilon)$$

则微元体的平均断裂密度函数为

$$\frac{F(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - F(\varepsilon)}{\Delta\varepsilon} \quad (1)$$

对上式取极限即为当系统压应变为 ε 时, 链杆断裂的概率密度函数, 表达式如下:

$$f(\varepsilon) = \lim_{\Delta\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{F(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - F(\varepsilon)}{\Delta\varepsilon} \quad (2)$$

它反映了密度函数 $f(x)$ 在系统应变为 ε 时, 在其领域 ($\varepsilon \pm \Delta\varepsilon, \Delta\varepsilon \rightarrow 0$) 范围内的密集程度, 即变化率。

如前所述, 材料的损伤变量 D 是反映材料损伤程度的一种度量, 即混凝土在损伤过程中表示微单元损伤率的一种度量, 而损伤程度则与链杆断裂的数量有关, 链杆的断裂则直接由断裂应变得大小所决定, 故我们可认为链杆的断裂应变 ε 与损伤变量 D 之间存在着某种映射关系, 即某种函数关系 $g(\varepsilon)$, 令

$$g(\varepsilon) = \frac{dD}{d\varepsilon} \quad (3)$$

式(3)反映了损伤变量 D , 在系统应变为 ε 时, 在其领域 ($\varepsilon \pm \Delta\varepsilon, \Delta\varepsilon \rightarrow 0$) 范围内的变化率。根据式(2)的性质可知, $g(\varepsilon)$ 和 $f(\varepsilon)$ 具有相同的函数性质及几何意义, 故可用密度函数 $f(\varepsilon)$ 表达 $g(\varepsilon)$, 则

$$\frac{dD}{d\varepsilon} = g(\varepsilon) = f(\varepsilon) \quad (4)$$

对式(4)进行积分, 即为损伤变量 D , 表达式如下:

$$D(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \frac{dD}{d\varepsilon} = \int_0^\varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon = F(\varepsilon) \quad (5)$$

式中: $f(x)$ 为链杆极限断裂应变服从的概率密度函数, $F(x)$ 为其分布函数。

混凝土在变形过程中, 有很大一部分应变是不可恢复的, 我们称这种不可恢复的变形为塑性应变, 塑性应变随应变的增大而增大。系统应变 ε 由

弹性应变 ε_e 和塑性应变 ε_p 两部组成, 即 $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$ 。

根据内变量理论^[14], 不考虑温度影响时, 各向同性材料的损伤状态可以通过弹性应变 ε_e 、塑性应变 ε_p 以及损伤因子 D 来描述。通常假定材料的弹性自由能势与塑性自由能势不相关, 则 Helmholtz 自由能势可以表示为

$$\Phi(\varepsilon_e, D, \varepsilon_p) = \Phi_e(\varepsilon_e, D) + \Phi_p(\varepsilon_p, D) \quad (6)$$

式中: d 为损伤内变量, ε_p 为塑性内变量。

根据热力学第二定律可知, 并考虑等温绝热条件, 则可得下式:

$$\frac{\sigma}{\rho} \dot{\varepsilon} - \dot{\Phi} \geq 0 \quad (7)$$

其中, $\Phi = e - Ts$ 为 Helmholtz 自由能状态函数。

对式(7)及 Helmholtz 自由能状态函数微分, 并代入 Clausius-Duheim 不等式, 并考虑 ε_e 的任意性, 可得

$$\sigma = \rho \frac{\partial \Phi_e(\varepsilon_e, D)}{\partial \varepsilon_e} \quad (8)$$

将式(5)及式(7)代入式(8), 即可得到混凝土损伤本构方程为

$$\sigma = E_0(\varepsilon - \varepsilon_p)(1 - D(\varepsilon)) \quad (9)$$

2 试验概况

2.1 混凝土配合比

所用钢纤维为剪切波浪型钢纤维, 长 30 mm, 直径 0.5 mm, 长径比为 60, 抗拉强度 > 380 MPa。水泥为 P·O42.5R 普通硅酸盐水泥。霸河中砂, 细度模数 2.7。粗骨料为碎石, 粒径 5~20 mm。效减水剂掺量为 1%。采用 3 种混凝土配合比, 水胶比均为 0.46, 钢纤维体积掺量 ρ_s 为 1%, 聚丙烯纤维体积掺量 ρ_p 也为 1%, 具体配合比如表 1 所示, 其中编号“PC”表示钢纤维掺量为零的普通混凝土, “SFC”表示掺有钢纤维的混凝土, “PFC”表示掺有聚丙烯纤维的混凝土。

2.2 试验方法

试验共制作 80 个 100 mm×100 mm×300 mm 的棱柱体试件, 其中 PC 组 31 个, SFC 组 38 个, PFC 组 11 个, 用于测试混凝土单轴受压应力-应变曲线。试验采用人工采点, 采取加载过程中力和位移值。为了保证试件轴心受压, 在加载面铺垫细砂找平, 使试件受力均匀。试验最小加载速率为 0.1 mm/min。

3 损伤变量的确定

表1 不同纤维混凝土配合比

Tab.1 Different fiber reinforced concrete mixing proportion and mechanical property

Group	Material quantity/(kg·m ⁻³)								28d strength/MPa
	Cement	Sand	Aggregate	Water	fly ash	Water reducer	Steel fibers	Polypropylene fibers	
PC	300	670	1 190	170	70	3.7	0	0	37.9
SFC	300	670	1 190	170	70	3.7	78	0	39.5
PFC	300	670	1 190	170	70	3.7	0	0.9	40.7

不同混凝土单轴受压应力-应变曲线峰值应变的统计结果如表2所示。

表2 峰值应变统计结果

Tab.2 Statistical results of peak strain

Group	PC	SFC	PFC
Number of samples	31	38	11
Mean/10 ⁻³	1.74	1.88	1.85
Standard deviation	1.68E-4	3.06E-4	1.23E-4
Coefficient of Variation	0.096 6	0.162 8	0.066 4

从表2可以看出,掺有纤维的两组混凝土试件的峰值应变大于普通混凝土,这是因为在混凝土受到应力作用时,纤维分担了一部分应力作用,改善了混凝土的抗拉性和韧性,从而提高了混凝土的变形能力;而钢纤维混凝土峰值应变的标准差和变异系数大于其他两组,是由于其样本数量最大,样本分布的离散性相对较大。

假定三组试件的峰值应变均服从三参数weibull分布,考虑检验的显著水平 $\alpha=0.05$,本次检验采用 χ^2 法进行检验。计算假设的三参数weibull分布公式下式所示。

$$F(\varepsilon, m, \eta, \gamma) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\varepsilon - \gamma}{\eta} \right)^m \right] \quad (10)$$

其均值与方差分别为:

$$\mu = \eta \Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right) + \gamma \quad (11)$$

$$\sigma^2 = \eta^2 \left[\Gamma \left(1 + \frac{2}{m} \right) - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) \right] \quad (12)$$

$$\text{式中: } \eta = \frac{\mu - \gamma}{\Gamma(1 + \frac{1}{m})}, \gamma = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a、b、c$$

通过中位秩公式^[15]求得, $\Gamma(g)$ 为伽马函数。

采用二阶矩法确定三参数 γ 、 m 、 η 的估计值,具体如表3所示。

对不同试验结果进行卡方检验,检验结果如表4所示。

表3 参数估计结果

Tab.3 The parameters of Weibull distribution function

Parameter	PC	SFC	PFC
γ	7.7E-4	9.2E-4	5.53E-4
m	1.13	1.35	0.81
η	9.2E-4	1.09E-3	6.5E-4

表4 参数检验结果

Tab.4 Test result of Weibull distribution

Group	χ^2	$\chi^2_{\alpha(k-r-1)}$	Test result
PC	4.135E-4	12.6	accept
SFC	4.388E-4	12.6	accept
PFC	1.334E-4	3.84	accept

由表4可以看出,三组不同混凝土的峰值应变均服从weibull分布,将式(10)代入式(9),即可得到本文的统计损伤本构模型。

$$\sigma = \begin{cases} E_0(\varepsilon - \varepsilon_p) & (\varepsilon < \gamma) \\ E_0(\varepsilon - \varepsilon_p) \exp \left[- \left(\frac{\varepsilon - \gamma}{\eta} \right)^m \right] & (\varepsilon \geq \gamma) \end{cases} \quad (13)$$

式中: γ 为损伤阈值。

4 纤维混凝土统计损伤本构模型

4.1 参数的确定

单轴受压 σ - ε 曲线具有唯一峰值点应力 σ_p 和与其对应的应变 ε_p ,且在该峰值点前曲线为单调递增,峰值点之后曲线为单调递减的特征,根据此特性并对式(13)求导,可得

$$\begin{cases} m = \frac{(1 - \varepsilon_p' |_{\varepsilon=\varepsilon_c})(\varepsilon_c - \gamma)}{\varepsilon_c - \varepsilon_p |_{\varepsilon=\varepsilon_c}} \left[\ln \frac{E_0(\varepsilon_c - \varepsilon_p |_{\varepsilon=\varepsilon_c})}{\sigma_c} \right]^{-1} \\ \eta = \frac{(\varepsilon_c - \gamma)}{\left[\frac{(1 - \varepsilon_p' |_{\varepsilon=\varepsilon_c})(\varepsilon_c - \gamma)}{m(\varepsilon_c - \varepsilon_p |_{\varepsilon=\varepsilon_c})} \right]^{1/m}} \end{cases} \quad (14)$$

其中: $\varepsilon_p' = \varepsilon \sigma / (1 + \sigma)$, δ 为材料系数^[16],可通过实验确定。

结合试验数据,分析了不同损伤阈值对模型的影响,结论如下:对于普通混凝土来说, γ 取0.5~0.7

倍峰值应变;而对钢纤维混凝土来说, γ 则为 0.75~0.85 倍的峰值应变;聚丙烯纤维混凝土的 γ 取值为 0.6~0.8. 通过对试验数据的分析计算, 本文最终确定普通混凝土的 γ 取值为 0.6 倍的峰值应变;钢纤维混凝土的 γ 取值为 0.8 倍的峰值应变;聚丙烯纤维混凝土的 γ 取值为 0.7 倍的峰值应变. 如图 1 所示.

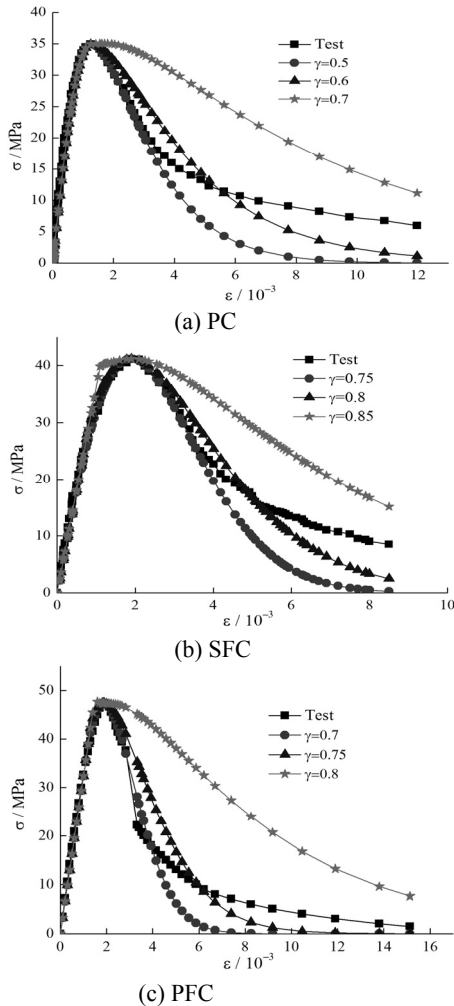


图 1 损伤阈值对曲线的影响

Fig.1 The stress-strain curves of different damage threshold

从损伤阈值的取值也可看出, 普通混凝土掺入纤维后, 损伤阈值有所提高, 这是因为在微观层面上纤维可以抑制微裂纹的产生和发展, 改善混凝土材料的工作性能, 有效地减缓了材料的损伤发展进程, 从而提高了损伤发生的阈值.

4.2 纤维混凝土统计损伤本构模型

将三组试验数据代入到式(14)中, 即可求得每一条应力应变曲线所对应的参数 m 和 η , 并对所得结果进行统计分析, 建立频率直方图, 假定其服从正态分布, 采用 χ^2 检验法对其概型分布进行检验, 结果为接受. 三组不同混凝土相关参数的平均值、标准差和变异系数, 如表 5、6 所示.

表 5 参数 m 统计结果
Tab.5 Statistical results of the parameter m

Group	μ	σ	δ
PC	1.517 4	0.674 7	0.445 6
SFC	1.208 9	0.443 0	0.366 4
PFC	1.458 9	0.302 8	0.207 6

表 6 参数 η 统计结果
Tab.6 Statistical results of the parameter η

Group	μ	σ	δ
PC	0.001 59	0.000 250	0.157 2
SFC	0.001 82	0.000 312	0.171 4
PFC	0.001 82	0.000 139	0.076 4

根据上述统计分析结果, 即可得到普通混凝土、钢纤维混凝土及聚丙烯纤维混凝土的统计损伤本构模型, 分别如式(15)、式(16)、式(17)所示.

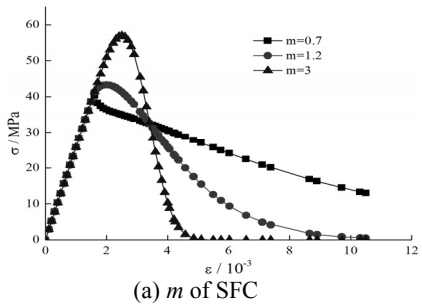
$$\sigma = \begin{cases} E_0(\varepsilon - \varepsilon_p) & (\varepsilon < \gamma) \\ E_0(\varepsilon - \varepsilon_p) \exp \left[- \left(\frac{\varepsilon - \mu_{PC}(\gamma)}{\mu_{PC}(\eta)} \right)^{\mu_{PC}(m)} \right] & (\varepsilon \geq \gamma) \end{cases} \quad (15)$$

$$\sigma = \begin{cases} E_0(\varepsilon - \varepsilon_p) & (\varepsilon < \gamma) \\ E_0(\varepsilon - \varepsilon_p) \exp \left[- \left(\frac{\varepsilon - \mu_{SFC}(\gamma)}{\mu_{SFC}(\eta)} \right)^{\mu_{SFC}(m)} \right] & (\varepsilon \geq \gamma) \end{cases} \quad (16)$$

$$\sigma = \begin{cases} E_0(\varepsilon - \varepsilon_p) & (\varepsilon < \gamma) \\ E_0(\varepsilon - \varepsilon_p) \exp \left[- \left(\frac{\varepsilon - \mu_{PFC}(\gamma)}{\mu_{PFC}(\eta)} \right)^{\mu_{PFC}(m)} \right] & (\varepsilon \geq \gamma) \end{cases} \quad (17)$$

4.3 参数 m 和 η 的物理意义

考虑在 $\gamma=0.80$ 、 $\eta=0.001\ 82$ 及 $\gamma=0.7$ 、 $\eta=0.001\ 81$ 时, 参数 m 对钢纤维混凝土和聚丙烯纤维混凝土应力应变曲线的影响, 如图 2(a)、4(b)所示. 由图 2(a)、2(b)可知, 随着参数 m 的逐渐增大, 两种混凝土的峰值应力和峰值应变也逐渐增大, 下降段曲线越来越陡, 材料脆性增大. 因此, 参数 m 反映了两种混凝土材料内部微元结构强度分布的集中程度. 当 $\gamma=0.85$ 和 $m=1.55$ 时, 参数 η 对应力应变曲线的影响如图 2(c)、2(d)所示. 由图 2(c)、2(d)可知, 随着 η 的增大, 两种混凝土峰值应力、峰值应变逐渐增大, 下降曲线段斜率变化不大, 故 η 反映了两组混凝土宏观统计平均强度的大小, 并且 η 对下降段的软化模量影响不大.



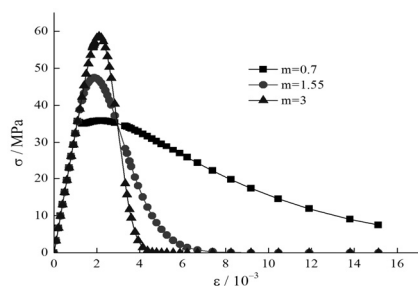
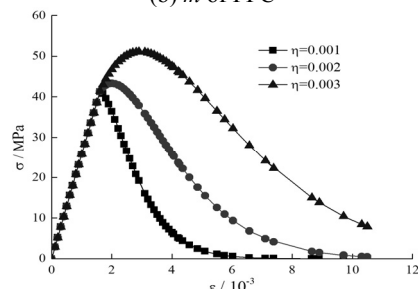
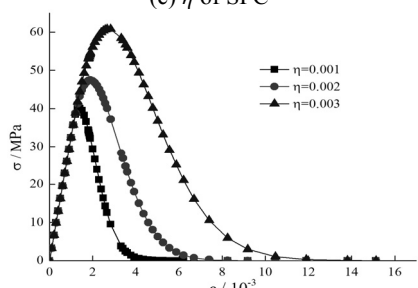
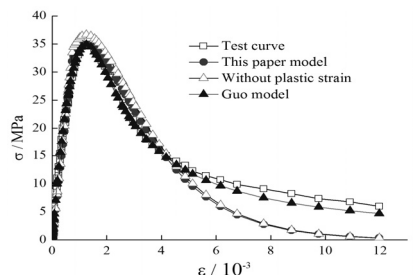
(b) m of PFC(c) η of SFC(d) η of PFC

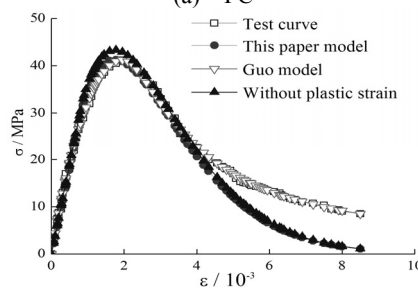
图2 参数 m 和 η 对应力应变曲线的影响
Fig.2 The influence of the parameters m and η on the σ - ϵ curve

5 模型验证

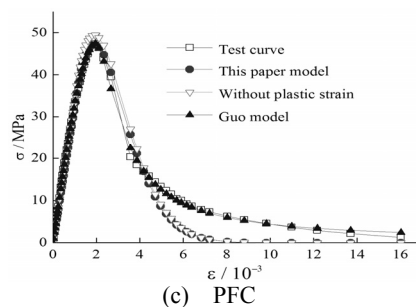
将试验数据分别带入本文所建立的模型、未考虑塑性变形模型及过镇海模型,如图3所示;同时,将所建立的三种不同混凝土损伤模型进行比较,如图4所示,分析纤维对混凝土力学性能的影响。



(a) PC



(b) SFC



(c) PFC

图3 试验与理论模型对比

Fig.3 Comparison of theoretical curves with test curves

由图3可知,本文模型拟合的曲线上升段与试验曲线及过镇海模型的上升段几乎重合,拟合效果较好,下降段在反弯点(曲率最大的点,也可称为凹向点)后却有所差异。分析出现这种差异的原因主要是进行混凝土单轴受压试验时,当应变超过反弯点时,混凝土试件的变形机制由裂缝的扩展变为剪切带的滑移,试件的压力主要是由滑移面上的摩擦咬合力和为裂缝所分割成的混凝土小柱体的残余强度所提供的,此时,并不是由试验机提供的压力。但模型在反弯点前的下降段与试验曲线拟合度较好,而混凝土材料往往在反弯点后已失去结构意义,所以模型不仅具有较好的理论依据同时也有一定的应用价值。

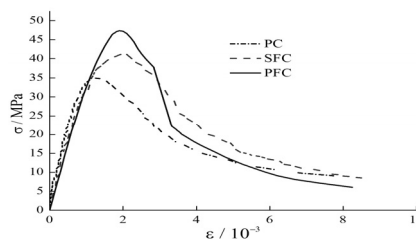


图4 三种混凝土应力应变曲线对比

Fig.4 Three kinds of concrete stress-strain curve

由图4可知,三组混凝土未考虑塑性变形曲线的整体走势与模型相近,主要差异表现为未考虑塑性变形模型的峰值应力大于模型,而峰值应变小于模型,这是因为两种模型依据的力学模型与建立机制是相同的,故而整体走势大致相同。但由于模型考虑了混凝土材料在变形时的塑性变形,认为变形是由弹性和塑性两部分组成的,而未考虑塑性变形的模型由于没有考虑塑性变形,认为变形完全是弹性的,忽略了混凝土试件在实际变形中存在的一部分塑性变形,所以峰值应变小于模型与试验曲线,峰值应力大于模型与试验曲线。因此,在建立本构模型时,塑性变形应被考虑。

由图3可知,纤维混凝土的峰值应力与峰值应变均大于普通混凝土,这是由于混凝土的受压破坏机理,事实上是混凝土被压缩时,垂直于受力方向产生的受拉裂缝逐渐发展汇集导致混凝土的破坏,

而纤维的存在可以有效抑制裂缝的发展,故而纤维可提高混凝土的抗压性能;同时,本文分别对三组混凝土应力应变曲线进行积分,得到曲线下的面积为: $A_{PC}=150.33$ 、 $A_{SFC}=182.53$ 、 $A_{PFC}=166.63$,可以看出两种纤维混凝土应力应变曲线所围成的面积均大于普通混凝土的,根据混凝土应力应变曲线的几何特点可知,曲线所围成的面积越大,试件的塑性变形能力和延性就越强,说明纤维增强了混凝土的塑性变形能力和延性性能。

6 结论

基于唯象细观统计损伤力学及热力学的相关理论,建立了不同纤维混凝土单轴受压损伤本构模型。结合具有统计意义的试验研究,确定了损伤变量的概型分布以及相关参数,并验证其合理性。具体结论如下:

(1)三种不同混凝土的损伤变量均服从 weibull 分布函数。

(2)两种纤维混凝土峰值应变的统计均值大于普通混凝土,说明纤维可以很好的提高混凝土抗拉性、抗压性、韧性及延性性能。

(3)对于钢纤维混凝土来说,损伤阈值 γ 最佳取值为 0.8 倍的峰值应变;聚丙烯纤维的损伤阈值 γ 最佳取值为 0.7 倍的峰值应变。

(4)考虑塑性变形的本构模型较之未考虑塑性应变的本构模型,可以更好且更真实的反映单轴受压下各种混凝土的应力应变关系。

(5)考虑塑性变形及损伤阈值的本构模型也适用于普通混凝土,也较好的反映试验应力应变曲线。

参考文献 References

- [1] 董毓利,樊承谋,潘景龙. 钢纤维混凝土本构关系的研究[J]. 哈尔滨建筑工程学院, 1993, 26(2): 86-92.
DONG Yuli, FAN Chengmou, PAN Jinglong. Study on a constitutive model of SFRC[J]. Harbin University of Civil Engineering and Architecture, 1993, 26(2):86-92.
- [2] 宋玉普,赵国藩. 钢纤维混凝土内时损伤本构模型[J]. 水利学报, 1995, 26(6): 1-7.
SONG Yupu, ZHAO Guofan. Endochronic damage constitutive model for steel fiber reinforced concrete[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1995, 26(6): 1-7.
- [3] 王春来,徐必根,李庶林,等. 单轴受压条件下钢纤维混凝土损伤本构模型研究[J]. 岩土力学, 2006, 27(1): 151-154.
WANG Chunlai, XU Bigen, LI Shulin, et al. Study on a constitutive model of damage of SFRC under uniaxial compression[J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, 27(1): 151-154.
- [4] 宁建国. 混凝土材料动态性能的经验公式、强度理论与唯象本构模型[J]. 力学进展, 2006, 36(3): 389-405.
NING Jianguo. The developments of dynamice constitutive behavior of concrete[J]. Advances in Mechanics, 2006, 36(3): 389-405.
- [5] 姜小春,谢和平,周宏伟. 拉伸载荷下脆性材料微裂纹损伤宏细观损伤变量关系初探[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(增 1): 2648-2653.
JING Xiaochun, XIE Hepin, ZHOU Hongwei. Analysis of relationship between macro- scopic damage and mesoscopic damage variables for micro-crack damage of quasi-brittle materials under tension[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, 26(suppl): 2648-2653.
- [6] 冯西桥,余寿文. 脆性材料细观损伤力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
FENG Xiqiao, YU Shouwen. Mesoscopic damage mechanics of quasi-brittle materials [M]. Beijing: China Higher Education Press, 2002.
- [7] 李兆霞. 损伤力学及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
LI Zhaoxia. Damage mechanics's application[M]. Beijing: Science Press, 2002.
- [8] 余寿文,冯西桥. 损伤力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999.
YU Shouwen, FENG Xiqiao. Damage mechanics[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1999.
- [9] 李朝红,王海龙,徐光兴. 混凝土损伤断裂的三位细观数值模拟 [J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2011, 42(2): 463-469.
LI Chaohong, WANG Hailong, XU Guangxing. 3-D mesoscopic numerical simulation of concrete damage and fracture[J]. Journal of Central South University: Science and Technology, 2011, 42(2): 463-469.
- [10] YIP W K, KONG F K, CHAN K S, LIM M K. A statistical model of microcracking of concrete under uniaxial compression [J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 1995, 22(1): 17-27.
- [11] DENG Jian, GU Desheng. On a statistical damage constitutive model for rock materials [J]. Computers and Geosciences, 2011, 37: 122-128.
- [12] WONG Tengfong, ROBINA H C, WONG K T, et al. Microcrack statistics, Weibull distribution and micro-mechanical modeling of compressive failure in rock [J]. Mechanics of Materials, 2006, 38: 664-681.
- [13] KRAJCINOVIC D, SILVA M A G. Statistical aspects of the continuous damage theory. [J]. International Journal of Solids Structure, 1982, 18(7): 551-562.
- [14] 范镜泓. 非线性连续介质力学基础[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1987.
FAN Jinghong. Non-linear continuum mechanics[M]. Chongqing: Chongqing University Press, 1987.
- [15] 谷耀新. 三参数威布尔分布参数估计方法[J]. 沈阳工业学院学报. 1997, 16(4): 53-56.
GU Yaoxin. Parameter estimation methods for 3-parameter weibull distribution[J]. Journal of Shenyang University of Technology, 1997, 16(4): 53-56.
- [16] 吴建营. 基于损伤能释放率的混凝土弹塑性损伤本构模型及其在结构非线性分析中的应用[D]. 上海: 上海同济大学, 2004.
WU Jianying. The application of the elastoplastic damage model based on damage energy release rate in nonlinear analysis of concrete structures[D]. Shanghai: Tongji University, 2004.

(编辑 沈波)