

空间杆系结构动力失稳区域研究

朱军强, 黄铭其, 高铭尚, 徐 妹, 李明哲

(西安建筑科技大学土木工程学院, 陕西 西安 710055)

摘要: 结构在外荷载的作用下, 其非线性几何刚度随着结构的变形发生变化而变化。基于结构动力学理论, 采用有限元方法研究空间杆系结构的动力失稳区域。利用有限元变刚度的理论, 同时引入不同参数和变换公式推导出马奇耶-希拉方程式。通过 Ansys 和 Matlab 软件进行编程模拟, 分析无阻尼情况下的结构动力不稳定区域, 并与鲍洛金不稳定区域推导式结果进行对比。结果表明: 推导的结果接近鲍洛金不稳定区域结果, 第一失稳区域相对保守, 第二失稳区域非常接近, 从而验证了推导公式的适用性。可为实际工程结构频率避开失稳区域进行动力失稳设计提供理论依据。

关键词: 马奇耶-希拉方程式; 动力失稳区域; 阻尼; 空间杆系结构

中图分类号: TU399

文献标识码: A

文章编号: 1006-7930(2016)01-0077-05

The study on the spatial frames structural dynamic stability region

ZHU Junqiang, HUANG Mingqi, GAO Mingshang, XU Mo, LI Mingzhe

(School of Civil Engineering, Xi'an Univ. of Arch. & Tech., Xi'an 710055, China)

Abstract: Based on structural dynamics research foundation, finite element method is used to study the dynamic buckling of the spatial frames structure area. Under the action of outer load, the nonlinear geometric stiffness of the structure changes with deformation of the structure change. In this paper, using the theory of finite element analysis of variable stiffness, and at the same time the introduction of different parameters and transform formula Mathieu-Hill equation is deduced. By Ansys and Matlab software programming simulation the structure dynamic unstable region without damping is compared with the results derived type of bolotin unstable regions. Results show that the results derived in this paper approaching bolotin unstable area, the first buckling area and the second instability area is relatively conservative. The results thus verified the correctness of the formula derived in this paper. This provides theoretical basis for practical engineering design, in helping us to avoid the structure in the area of instability of the consequences of damage.

Key words: Mathieu-Hill equation; dynamic instability region; damping; spatial frames structural

在大跨度结构中, 空间网架结构具有刚性大, 变形小, 应力分布均匀, 能大幅度地减轻结构自重和节省材料特点^[1]。但是空间网壳结构是一种缺陷敏感型结构。如何准确地判定和研究结构动力失稳一直是工程界面临的难题。在结构失稳方面的研究, 国内外有很多研究成果, MinJae 等通过 Floquet 理论研究不同类型的不稳定性, 得出参数和组合的共振^[2]; M. Baldinger 通过剪切变形板得到第一和第二失稳区域^[3]。国内针对结构静力失稳研究也作了大量研究^[4-7]。其中范峰提出杆件失稳判别方法^[8]; 利用 ANSYS 进行全过程分析, 王安稳研究了失稳瞬间能量的转换和守恒, 导出了一个直杆动力分岔失稳的准则^[9]; 严佳川提出单层柱面网壳杆件失稳判别方法^[10]; 丁阳基于有限元软件和考虑损伤累积、杆件失稳效应对结构承载力的研究^[11]; 杨伦通过实验研究表明大幅度动张力作用下发生松动引起结构的失稳倒塌^[12]; 杨璐对双相型不锈钢不同截面轴心

受压试验研究, 得出长细比较大的构件易发生弹性失稳, 长细比较小的构件易发生弹塑性失稳^[13-14]。但是针对于结构动力失稳区域方面研究还是相对不足。本文在研究结构动力学基础之上, 总结了鲍洛金推导公式, 结合目前有限元软件和分析理论进一步推导马奇耶-希拉方程式, 得出结构的失稳区域方程式解析解。通过与鲍洛金推导公式解析解对比, 验证了本文推导的实用性。求解过程简单方便、各参数容易确定, 利于实现大型复杂结构的有限元分析, 可为工程实际提供理论依据。

1 结构动力学及有限元理论下的马奇耶-希拉方程

鲍洛金弹性体系公式推导是从简单的直杆推广到参数荷载引起的弹性体系振动的一般问题之上。对于普遍的体系结构来说, 一般采用共同参数 α 和 β , 其结构方程式如下^[15]:

$$L_{\omega}(\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}) + L_0(\omega) - \alpha L_{\alpha}(\omega) - \beta \Phi(t) L_{\beta}(\omega) = 0 \quad (1)$$

式中: $L_{\omega}, L_0, L_{\alpha}, L_{\beta}$ 为某些积分-微分运算符, $\omega(x, y, z, t)$ 为体系的变形状态. 选择相应的线性无关的基本函数系:

$$\chi_1(x, y, z), \chi_2(x, y, z) \cdots, \chi_n(x, y, z)$$

可把方程式(1)改写为矩阵形式:

$$V \frac{d^2 v}{dt^2} + [R - \alpha P - \beta \Phi(t) Q] v = 0 \quad (2)$$

式中: v 为级数 $\omega = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \chi_k(x, y, z)$ 的系数所组成的矩阵. 采用伽辽金变分法, 可得矩阵元素的分式:

$$\{V\}_{ik} = \iiint \chi_i L_{\omega}(\chi_k) dx dy dz$$

$$\{R\}_{ik} = \iiint \chi_i L_0(\chi_k) dx dy dz$$

$$\{P\}_{ik} = \iiint \chi_i L_{\alpha}(\chi_k) dx dy dz$$

$$\{Q\}_{ik} = \iiint \chi_i L_{\beta}(\chi_k) dx dy dz$$

积分遍布于整个体系. 由于各基本函数 χ_k 是线性无关的, 行列式 $|R| \neq 0$, 则方程式(2)可写为:

$$C \frac{d^2 v}{dt^2} + [E - \alpha A - \beta \Phi(t) B] v = 0 \quad (3)$$

式中: $A = R^{-1}P$, $B = R^{-1}Q$, $C = R^{-1}V$. 式(3)即为鲍洛金弹性体系下的马奇耶-希拉方程. 此方程对于任何一个普通结构体系都适应, 但积分运算的参数不容易确定, 无法从一个复杂的结构模式得到快速求解.

本文在研究动力不稳定失稳区域的函数过程中, 根据结构动力学及有限元理论得到动力稳定的基本方程式:

$$[M]\{\ddot{v}\} + [K]\{v\} = 0 \quad (4)$$

其中 $[M]$ 为结构的质量矩阵, $[K]$ 为结构的整体刚度矩阵, $\{v\}$ 为结构的广义位移列矩阵, 考虑几何非线性因素的影响, 刚度矩阵

$$[K] = [K_E] - [P][K_G] \quad (5)$$

其中 $[K_E]$ 是结构线性应变刚度矩阵, $[K_G]$ 是结构非线性几何刚度矩阵, $[P]$ 是结构外加荷载的矩阵, 则方程(4)可以写成:

$$[M]\{\ddot{v}\} + ([K_E] - [P][K_G])\{v\} = 0 \quad (6)$$

在 Bolotin 的动力稳定理论基础之上, 引入另外一种形式的荷载; 即

$$[P] = \alpha[P_{cr}] + \beta[P_{cr}]\cos\theta t \quad (7)$$

其中 $[P_{cr}]$ 为结构静力屈曲荷载矩阵, α 取 0 到 1 之

间的数, β 取 0 到 1 之间的数, 且 $\alpha + \beta \leq 1$, θ 是结构外加荷载扰动的频率矩阵, 方程(6)可以写为:

$$[M]\{\ddot{v}\} + ([K_E] - (\alpha[P_{cr}] + \beta[P_{cr}]\cos\theta t)[K_G])\{v\} = 0 \quad (8)$$

$$\text{即} \quad [K_E]^{-1}[M]\{\ddot{v}\} + ([E] - [K_E]^{-1}(\alpha[P_{cr}] + \beta[P_{cr}]\cos\theta t)[K_G])\{v\} = 0 \quad (9)$$

令 $C = [K_E]^{-1}[M]$

$$A = [K_E]^{-1}[P_{cr}][K_G]$$

所以方程(8)可以化为结构动力学及有限元理论下的马奇耶-希拉方程式:

$$C\{\ddot{v}\} + ([E] - (\alpha + \beta\cos\theta t)A)\{v\} = 0 \quad (10)$$

2. 结构动力失稳区

2.1 无阻尼情况下, 结构的奇数激发区域

首先选取函数

$$v(t) = \sum_{k=1,3,5}^{\infty} (a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2}) \quad (11)$$

$$v(t)' = \sum_{k=1,3,5}^{\infty} [a_k \cos \frac{k\theta t}{2} \cdot \frac{k\theta}{2} - b_k \sin \frac{k\theta t}{2} \cdot \frac{k\theta}{2}] \quad (12)$$

$$v(t)'' = \sum_{k=1,3,5}^{\infty} [-a_k \sin \frac{k\theta t}{2} \cdot \frac{k^2\theta^2}{4} - b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \cdot \frac{k^2\theta^2}{4}] \quad (13)$$

把式(11)、(12)、(13)代入式(10), 使得同类项中包含 $\sin \frac{k\theta t}{2}$ 和 $\cos \frac{k\theta t}{2}$ 相等. 化简得

$$\begin{cases} [E - (\alpha - \frac{1}{2}\beta)A - \frac{1}{4}\theta^2 C]a_1 - \frac{1}{2}\beta A a_3 = 0 \\ (E - \alpha A - \frac{1}{4}k^2\theta^2 C)a_k - \frac{1}{2}\beta A(a_{k-2} + a_{k+2}) = 0 \\ [E - (\alpha + \frac{1}{2}\beta)A - \frac{1}{4}\theta^2 C]b_1 - \frac{1}{2}\beta A b_3 = 0 \\ (E - \alpha A - \frac{1}{4}k^2\theta^2 C)b_k - \frac{1}{2}\beta A(b_{k-2} + b_{k+2}) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

($k = 1, 3, 5 \dots$)

从式(14)中提取矩阵:

$$\begin{vmatrix} E - (\alpha \pm \frac{1}{2}\beta)A - \frac{1}{4}\theta^2 C & -\frac{1}{2}\beta A & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta A & E - \alpha A - \frac{9}{4}\theta^2 C & -\frac{1}{2}\beta A \\ 0 & -\frac{1}{2}\beta A & E - \alpha A - \frac{25}{4}\theta^2 C \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

其主要区域边界的函数可取:

$$\left| E - (\alpha \pm \frac{1}{2}\beta)A - \frac{1}{4}\theta^2 C \right| = 0 \quad (16)$$

为了方便计算, 选取函数;

$$C = \begin{vmatrix} \frac{1}{w_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{w_2^2} \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}$$

式(16)展开可得;

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{4w_1^2} & -\left(\alpha \pm \frac{1}{2}\beta\right)a_{12} \\ -\left(\alpha \pm \frac{1}{2}\beta\right)a_{21} & 1 - \frac{\theta^2}{4w_2^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

得到方程:

$$\left(1 - \frac{\theta^2}{4w_1^2}\right)\left(1 - \frac{\theta^2}{4w_2^2}\right) - \left(\alpha \pm \frac{1}{2}\beta\right)^2 a_{12}a_{21} = 0 \quad (18)$$

引入参数 $r = \frac{w_1^2}{w_2^2}$, 动力第一失稳区域值的解为

$$\theta_* = \frac{2w_1}{\sqrt{2r}} \sqrt{1 + r - \sqrt{(1-r)^2 + 4r\left(\alpha \pm \frac{1}{2}\beta\right)^2 a_{12}a_{21}}} \quad (19)$$

$$\theta_* = \frac{2w_2}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + r + \sqrt{(1-r)^2 + 4r\left(\alpha \pm \frac{1}{2}\beta\right)^2 a_{12}a_{21}}} \quad (20)$$

如果 r 的取值远远小于 1 时, 即 $r \ll 1$, 方程的解可化为为:

$$\theta_* = 2w_1 \sqrt{1 - \frac{\left(\alpha \pm \frac{1}{2}\beta\right)^2 a_{12}a_{21}}{1-r}} \quad (21)$$

$$\theta_* = 2w_2 \sqrt{1 + \frac{r\left(\alpha \pm \frac{1}{2}\beta\right)^2 a_{12}a_{21}}{(1-r)^2}} \quad (22)$$

2.2 无阻尼情况下, 结构的偶数激发区域
选取函数:

$$v(t) = b_0 + \sum_{k=2,4,6}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right) \quad (23)$$

将式(23)代入式(10); 若同类项 b_0 相等, 则:

$$\begin{vmatrix} E - \alpha A - \theta^2 C & -\frac{1}{2}\beta A & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta A & E - \alpha A - 4\theta^2 C & -\frac{1}{2}\beta A \\ 0 & -\frac{1}{2}\beta A & E - \alpha A - 16\theta^2 C \end{vmatrix} = 0 \quad (24)$$

若同类项 $\sin \frac{k\theta t}{2}$ 和 $\cos \frac{k\theta t}{2}$ 相等, 则:

$$\begin{vmatrix} E - \alpha A & -\beta A & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta A & E - \alpha A - \theta^2 C & -\frac{1}{2}\beta A & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\beta A & E - \alpha A - 4\theta^2 C & -\frac{1}{2}\beta A \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\beta A & E - \alpha A - 16\theta^2 C \end{vmatrix} = 0 \quad (25)$$

即:

$$|E - \alpha A - \theta^2 C| = 0 \quad (26)$$

则:

$$\begin{vmatrix} E - \alpha A & -\beta A \\ -\frac{1}{2}\beta A & E - \alpha A - \theta^2 C \end{vmatrix} = 0 \quad (27)$$

式(27)展开可得:

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{w_1^2} & -aa_{12} \\ -aa_{21} & 1 - \frac{\theta^2}{w_2^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (28)$$

$$\left(1 - \frac{\theta^2}{w_1^2}\right)\left(1 - \frac{\theta^2}{w_2^2}\right) - \alpha^2 a_{12}a_{21} = 0 \quad (29)$$

动力第二失稳定区域求解:

$$\theta_* = \frac{w_1}{\sqrt{2r}} \sqrt{1 + r - \sqrt{(1+r)^2 - 4(r - \alpha^2 a_{12}a_{21})}} \quad (30)$$

$$\theta_* = \frac{w_2}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + r + \sqrt{(1+r)^2 - 4r \times (r - \alpha^2 a_{12}a_{21})}} \quad (31)$$

同样, 如果 r 的取值远远小于 1 时, 即 $r \ll 1$

$$\theta_* = w_1 \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 a_{12}a_{21}}{(1+r)^2}} \quad (32)$$

$$\theta_* = w_2 \sqrt{1 + \frac{r\alpha^2 a_{12}a_{21}}{(1-r)^2}} \quad (33)$$

式(27)展开可得:

$$\begin{vmatrix} 1 & -aa_{12} & 0 & -\beta a_{12} \\ -aa_{21} & 1 & -\beta a_{21} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\beta a_{12} & 1 - \frac{\theta^2}{w_1^2} & -aa_{12} \\ -\frac{1}{2}\beta a_{21} & 0 & -aa_{21} & 1 - \frac{\theta^2}{w_2^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (34)$$

解得:

$$\theta_* = w_1 \sqrt{1 - \frac{a^2 a_{12}a_{21} - (1-r)\frac{\beta^2 a_{12}a_{21}}{2} - [a^2 a_{12}a_{21} - \frac{\beta^2 a_{12}a_{21}}{2}]^2}{(1-r)(1 - a^2 a_{12}a_{21}) - \frac{\beta^2 a_{12}a_{21}}{2}}} \quad (35)$$

$$\theta_* = w_2 \sqrt{1 + \frac{r[a^2 a_{12}a_{21} - (a^2 a_{12}a_{21} - \frac{\beta^2 a_{12}a_{21}}{2})] - (1-r)\frac{\beta^2 a_{12}a_{21}}{2}}{(1-r)(1 - a^2 a_{12}a_{21}) + \frac{r\beta^2 a_{12}a_{21}}{2}}} \quad (36)$$

3 数值分析

采用上述的分析理论, 运用 ANSYS 软件和 MATLAB 软件进行分析, 得出结构的不稳定区域图形, 如图 1 所示. 图中, 利用 ANSYS 软件进行有

限元刚度计算以及结构位移分析,而对于动力不稳定区域计算则通过 MATLAB 软件编程计算。

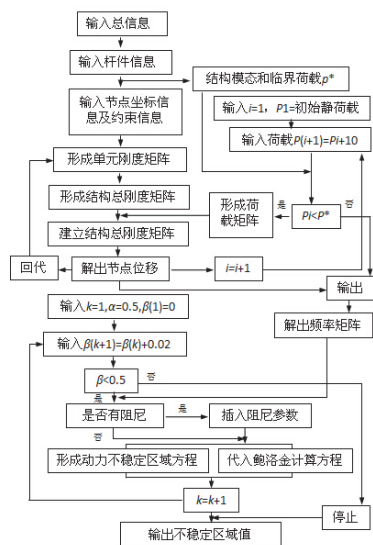


图 1 计算流程简图

Fig.1 The diagram of calculation process

3.1 空间三杆刚架在无阻尼情况下的动力失稳区域

空间三杆模型的主要参数: $E=2.1 \times 10^5$ MPa, $G=0.84 \times 10^5$ MPa, $A=0.02$ m², 泊松比 $\mu=0.3$, 密度 $\rho=7850$ kg/m³, 利用 ANSYS 软件可以求得结构的极限荷载为: 668.23 N, 在结构顶点加初始静力为 0.5×668.23 N. 图形如下图 2 所示:

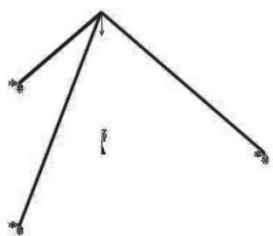


图 2 三杆刚架模型

Fig.2 The model of three rigid frame

不考虑结构阻尼影响的情况下,利用 MATLAB 程序计算在 β (即动荷载所占的比例大小,此时的 α 为 0.5) 的不同比值下失稳区域值,然后对比与分析软件计算结果与鲍洛金法^[15]计算结果的差异,计算结果如图 3 所示:

从图 3 可以看出,本节推导的结构第一不稳定区域和第二不稳定区域与鲍洛金方程式得到的结果有一定的相似,本文推导的第一不稳定区域是落在鲍洛金第一不稳定区域里面.虽然是有了一定的差别,但是却能得到结构失稳区域的范围,有一定的参考价值.本文第二失稳区域与鲍洛金失稳区域值有明显相似性,说明本文推导的方程式的适用性。

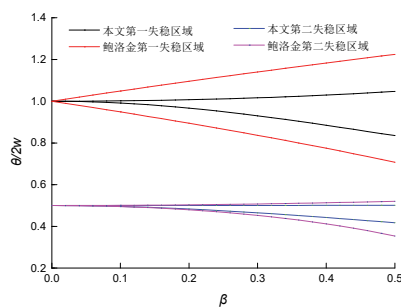


图 3 三杆模型动力失稳图

Fig.3 The dynamic instability figure of three models

3.2 正放四角锥网格结构在无阻尼的情况下的动力失稳区域

正放四角锥网格结构的主要参数: 截面面积 $A=0.000456$ m², 弹性模量 $E=2.06 \times 10^5$ MPa, $G=0.27 \times 10^5$ MPa, 泊松比 $\mu=0.3$, 密度 $\rho=7850$ kg/m³, 统一使用长度为 m, 重量为 kg, 力为 N 的单位. 考虑结构自重. 结构的每一个上弦节点加初始静力为 1000 N. 利用 ANSYS 软件可以求得结构的极限荷载为: 4125 N. 在进行动力失稳区域分析前,在结构上上弦节点上附加力大小为: $(0.5 \times 4125 - 1000)$ N 此时的 α 为 0.5. 结构布置图如下图 4 所示:

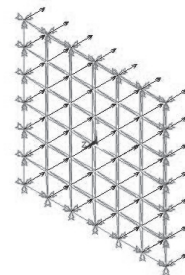


图 4 正放四角锥网格结构模型

Fig.4 The model of four square pyramid structure

从图 5 明显可以看出,无论是第一失稳区域或者是第二失稳区域都与鲍洛金失稳区域相当吻合,并且看出结构第一失稳区域比较大.虽然对于三杆结构模型有一定的差别,但是四角锥模型却能较为准确地分析出结构失稳区域。

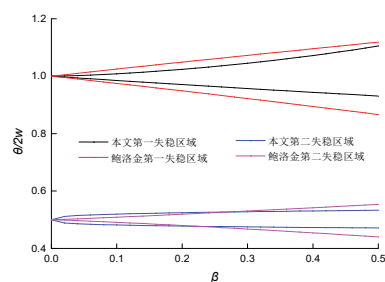


图 5 正放四角锥网格结构模型动力失稳图

Fig.5 The dynamic instability picture of four square pyramid structure

4 小结

基于结构动力不稳定问题的研究基础之上,推导出动力不稳定区域方程式,并利用 ANSYS 和 MATLAB 软件进行模型分析,得到以下主要结论:

(1) 通过软件进行模拟分析并与鲍洛金方程式得到的结果进行比较,验证了本文推导的方程式是适用的,适用于求解结构在动力荷载作用下的第一、第二不稳定区域。

(2) 本文推导公式对不同的模型适应程度不同,多杆的杆系结构体系适用程度更好。

(3) 随着 β 的比值不断增大,即动力荷载与静荷载的比值不断增大,结构的失稳区域也不断增大。

参考文献 References

- [1] 彭一刚,建筑空间组合论[M].(第3版)北京:中国建筑工业出版社,2008.
PENG Yigang, Architectural space combinatorial theory [M]. 3rd ed. Beijing: China Architecture & Building Press, 2008.
- [2] MIN Jae Shin, HUN Heo, JOO Hoh. Dynamic instability analysis of a non-autonomous system subjected to moving impulsive non-conservative load[J]. KSME Journal, 1987,1(1): 31-35.
- [3] BALDINGER M, BELYAEV A K, IRSCHIK H. Principal and second instability regions of shear-deformable polygonal plates[J].Computational Mechanics, 2000,26(3):288-294.
- [4] 沈祖炎,胡学仁.单角钢压杆的稳定计算[J].同济大学学报(自然科学版),1982(3):56-70.
SHEN Zuyan, HU Xueren, The stability calculation of single steel angles compression bar[J]. Journal of Tongji University(Natural Science Edition), 1982(3): 56-70.
- [5] 张其林,沈祖炎.薄壁轴压焊接方管柱整体稳定-局部稳定相互作用问题的研究[J].建筑结构学报,1991(6):15-24
ZHANG Qilin, SHEN Zuyan. Interaction between overall and local instability of axially loaded thin-walled box columns[J]. Journal of Building Structures, 1991(6):15-24.
- [6] 张其林,沈祖炎.阶形柱的极限承载力[J].同济大学学报(自然科学版),1987(1):1-12.
ZHANG Qilin, SHEN Zuyan. Ultimate strength of steel stepped column[J]. Journal of Tongji University(Natural Science Edition), 1987(1): 1-12.
- [7] 李开禧,肖允微.单向偏心弹塑性压杆的临界力计算[J].重庆建筑工程学院学报,1981(1):79-101.
LI Kaixi, XIAO Yunwei, Critical force calculation for one-way decentered elastic-plastic compressive bar[J]. Journal of Chongqing Institute of Architecture and Engineering, 1981(1): 79-101.
- [8] 范峰,严佳川,曹正罡.考虑杆件失稳影响的网壳结构稳定性研究[J].土木工程学报,2012(5):9-17.
FAN Feng, YAN Jiachuan, CAO Zhenggang. Study on stability of reticulated shell structures considering the influence of member buckling[J]. China Civil Engineering Journal, 2012(5): 9-17.
- [9] 王安稳.弹性压应力波下直杆动力失稳的机理和判据[J].力学学报,2001,33(6):812-820.
WANG Anwen. Mechanism and criterion for dynamic instability of bars under elastic compression wave[J]. Acta Mechanica Sinica, 2001,33(6): 812-820.
- [10] 严佳川,范峰,曹正罡.单层柱面网壳结构杆件失稳判别方法[C]//第十四届空间结构学术会议论文集,福州:2012,11.
YAN Jiachun, FAN Feng, CAO Zhenggang, Analysis method of dynamic stability of single-layer reticulated domes[C]//The 14th the spatial structure of academic conference proceedings, Fuzhou:2012, 11.
- [11] 丁阳,葛金钢,李忠献.考虑损伤累积及杆件失稳效应的网壳结构极限承载力分析[J].工程力学,2012(5):13-18.
DING Yang, GE Jingang, LI Zhongxian. Analysis on ultimate bearing capacity of reticulated shell considering cumulative damage and instability of member[J]. Engineering Mechanics, 2012(5): 13-183.
- [12] 杨伦,楼文娟,陈勇,等.覆冰导线舞动作用下输电塔破坏机理的试验研究[J].振动与冲击,2013,36(24):70-75.
YANG Lun, LOU Wenjuan, CHEN Yong, et al. Test for failure mechanism of a transmission tower under iced conductor galloping[J]. Journal of Vibration and Shock, 2013,36(24): 70-75.
- [13] 杨璐,徐东辰,尚帆,等.双相型不锈钢焊接工字形截面轴压柱整体稳定性能试验研究[J].建筑结构学报,2015,36(7):99-105.
YANG Lu, XU Dongchen, SHANG Fan, et al. Experimental study on overall buckling behavior of duplex stainless steel welded I-shaped columns under axial compression[J]. Journal of Building Structures, 2015,36(7): 99-105.
- [14] 杨璐,徐东辰,尚帆,等.双相型不锈钢焊接箱形截面轴压构件整体稳定性能试验研究[J].东南大学学报(自然科学版),2015,45(2):364-369.
YANG Lu, XU Dongchen, SHANG Fan, et al. Experimental study on overall buckling behavior of duplex stainless steel welded box columns under axial compression[J].Journal of Southeast University(Natural Science Edition), 2015,45(2): 364-369.
- [15] 鲍洛金·符华.弹性体系的动力稳定性[M].林砚田译,北京:高等教育出版社,1960.
BOLOTIN V V. The dynamic stability of elastic systems[M]. LIN Yantian Translated, Beijing: Higher Education Press, 1960.

(编辑 吴海西)