

结构性能试验建模中的统计不确定性及其影响

姚继涛, 程凯凯, 刘 伟

(西安建筑科技大学土木工程学院, 陕西 西安 710055)

摘要: 结构性能的概率模型是设计中结构性能分析模型的基础, 一般采用经典统计学中的矩法推断其中未知的计算模式不确定性系数的概率特性。就一般的结构性能建模而言, 其推断结果会受到显著的统计不确定性的影响, 并直接影响对结构性能概率特性的推断, 存在因过高估计结构性能而导致额外失效风险的可能。论文根据一定置信水平下推断结果的相对误差, 系统揭示了计算模式不确定性系数推断中的统计不确定性及其对结构性能推断结果的影响, 并根据推断结果相对误差与样本容量之间的关系, 提出需考虑统计不确定性影响的条件以及试验建模中的最小试件数量。研究结果阐明了改进目前结构性能试验建模方法的必要性。

关键词: 结构性能; 结构试验; 概率模型; 统计推断; 统计不确定性

中图分类号: TU375

文献标志码: A

文章编号: 1006-7930(2016)05-0639-04

Statistical uncertainty and its impact on the establishment of structural performance model by testing

YAO Jitao, CHENG Kaikai, LIU Wei

(School of Civil Engineering, Xi'an Univ. of arch. & Tech., Xi'an 710055, China)

Abstract: The probability model is the basis of performance analysis in structural design. In general, the classical statistical matrix method is used to infer the probability characteristic of unknown model uncertainty coefficient. In terms of structural performance modeling, the inference results can be significantly influenced by statistical uncertainty. Therefore the evaluating of probability characteristic of the structural performance is also influenced, which will lead to additional failure risk due to overestimation of the structural performance. In accordance with the relative error of inference results under a certain confidence level, this paper reveals the statistical uncertainty and its impact on the structural performance, points out the conditions that the statistical uncertainty need to be considered and the minimum number of specimens in the process of establishing the structural performance probability model. The conclusion shows it is necessary to improve current the modeling method in structural performance test.

Key words: structural performance; structural test; probability model; statistical inference; statistical uncertainty

结构性能的概率模型是设计中结构性能分析模型的基础, 一般需结合研究性的模型或原型试验建立^[1]。获得试验数据后, 除确定结构性能函数, 推断未知的计算模式不确定性系数的概率特性也是其中一项关键的内容。目前的试验建模中, 一般采用经典统计学中的矩法推断计算模式不确定性系数的概率特性, 并以其为基础推断结构性能的概率特性^[1-2]。理论上讲, 矩法仅适用于样本容量 (试件数量) 很大的场合^[3], 而试验建模中的试件数量往往有限, 很难达到大样本容量的要求, 这时采用的矩法未充分反映统计不确定性的影响, 推断结果会受到统计不确定性的影响显著^[4], 且主要存在于对标准差的推断中, 相应的等效置信水平过低, 推断结果偏于冒进, 直接影响对结构性能概率特性的推断, 存在因过高估计结构性能而导致额外失效风险的可能。

论文将系统揭示目前试验建模中的统计不确定性及其对结构性能推断结果的影响, 并提出需考虑

统计不确定性影响的条件以及试验建模中的最小试件数量。

1 结构性能的概率模型

根据试验结果建立结构性能概率模型的基本步骤为: 通过对试验数据的拟合或对理论分析结果的修正建立结构性能函数; 通过统计推断确定未知的计算模式不确定性系数的概率特性; 结合已知的结构性能影响因素的概率特性, 最终建立结构性能的概率模型^[5]。结构性能的概率模型一般可表达为:

$$Y = \eta g(X_1, \dots, X_m) \quad (1)$$

式中: $g(\cdot)$ 为结构性能函数; X_1, \dots, X_m 为几何参数、材料性能等结构性能的影响因素; η 为计算模式不确定性系数。这时结构性能 Y 的均值、标准差和变异系数等数字特征分别为

$$\mu_Y \approx \mu_\eta \mu_g \quad (2)$$

$$\sigma_Y \approx \mu_\eta \mu_g \sqrt{\delta_\eta^2 + \delta_g^2} \quad (3)$$

$$\delta_Y \approx \sqrt{\delta_\eta^2 + \delta_g^2} \quad (4)$$

式中: μ_η 、 σ_η 、 δ_η 和 μ_g 、 σ_g 、 δ_g 分别为计算模式不定性系数、结构性能函数的均值、标准差和变异系数. 一般假定结构性能 Y 服从对数正态分布或正态分布^[6], 这时根据结构性能 Y 的数字特征便可确定其具体的概率分布, 形成完整的结构性能概率模型.

2 试验建模中的统计不定性

结构性能影响因素 X_1, \dots, X_m 的概率特性一般是已知的, 据此通过随机变量函数的概率运算可确定结构性能函数的数字特征 μ_g 、 σ_g 、 δ_g ^[7]. 试验建模中的问题是如何推断计算模式不定性系数 η 的数字特征 μ_η 、 σ_η 、 δ_η , 而统计不定性也主要存在于对 η 的推断中.

一般假定 η 服从正态分布 $N(\mu_\eta, \sigma_\eta^2)$, 并采用经典统计学中的矩法推断 μ_η 、 σ_η 、 δ_η ^[1,2]. 设 Z_1, \dots, Z_n 为通过试验拟获得的 η 的 n 个样本, 它们均为随机变量, 且服从与 η 同样的概率分布. 按照矩法, 推断 μ_η 、 σ_η 、 δ_η 的统计量应分别为:

$$T_{\mu,\eta} = \bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i \quad (5)$$

$$T_{\sigma,\eta} = S_Z = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2} \quad (6)$$

$$T_{\delta,\eta} = \frac{S_Z}{\bar{Z}} \quad (7)$$

样本容量不足时, 即使无试验误差, 也不能断定 $T_{\mu,\eta}$ 、 $T_{\sigma,\eta}$ 、 $T_{\delta,\eta}$ 的实现值为真实的 μ_η 、 σ_η 、 δ_η ; 若重复做同样的多组试验, 各组的推断结果之间也往往存在差异, 且样本容量越小, 差异一般越大. 这种因样本容量不足而产生的推断结果的不确定性被称为统计不定性^[4].

目前尚无公认的度量统计不定性的指标. 由于 $T_{\mu,\eta}$ 、 $T_{\sigma,\eta}$ 、 $T_{\delta,\eta}$ 亦为随机变量, 因此可以其变异系数度量相应的统计不定性; 但从应用的角度考虑, 以一定置信水平下 $T_{\mu,\eta}$ 、 $T_{\sigma,\eta}$ 、 $T_{\delta,\eta}$ 的相对误差反映统计不定性的影响要更具有工程意义.

记 $T_{\mu,\eta}$ 、 $T_{\sigma,\eta}$ 、 $T_{\delta,\eta}$ 的相对误差分别为 $E_{\mu,\eta} = \frac{T_{\mu,\eta} - \mu_\eta}{\mu_\eta}$ 、 $E_{\sigma,\eta} = \frac{T_{\sigma,\eta} - \sigma_\eta}{\sigma_\eta}$ 、 $E_{\delta,\eta} = \frac{T_{\delta,\eta} - \delta_\eta}{\delta_\eta}$. 可以证明:

$$\frac{E_{\mu,\eta} \sqrt{n}}{\delta_\eta} = \frac{T_{\mu,\eta} - \mu_\eta}{\sigma_\eta / \sqrt{n}} = \frac{\bar{Z} - \mu_\eta}{\sigma_\eta / \sqrt{n}} \quad (8)$$

$$(n-1)(E_{\sigma,\eta} + 1)^2 = \frac{(n-1)T_{\sigma,\eta}^2}{\sigma_\eta^2} = \frac{(n-1)S_Z^2}{\sigma_\eta^2} \quad (9)$$

$$\frac{\sqrt{n}}{(E_{\delta,\eta} + 1)\delta_\eta} = \frac{\sqrt{n}}{T_{\delta,\eta}} = \frac{\bar{Z}\sqrt{n}}{S_Z} \quad (10)$$

它们分别服从标准正态分布、自由度为 $n-1$ 的卡方分布和自由度为 $n-1$ 、非中心参数为 \sqrt{n}/δ_η 的非中心 t 分布^[8]. 利用区间估计法^[3], 可得置信水平 C 下计算模式不定性系数推断结果相对误差 $E_{\mu,\eta}$ 、 $E_{\sigma,\eta}$ 、 $E_{\delta,\eta}$ 的上、下限, 结果见表1, 其中 $n_{(1-C)/2}$ 、 $\chi_{[n-1,(1-C)/2]}^2$ 、 $t_{[n-1,\sqrt{n}/\delta_\eta,(1-C)/2]}$ 分别为上述标准正态分布、卡方分布、非中心 t 分布的 $(1-C)/2$ 分位值, $n_{(1+C)/2}$ 、 $\chi_{[n-1,(1+C)/2]}^2$ 、 $t_{[n-1,\sqrt{n}/\delta_\eta,(1+C)/2]}$ 为它们的 $(1+C)/2$ 分位值, n 为样本容量.

表1 计算模式不定性系数推断结果相对误差的上、下限
Tab. 1 The upper and lower value of relative error for inference result of calculation model uncertainty factor

相对误差	下限	上限
$E_{\mu,\eta}$	$\frac{n_{(1-C)/2} \delta_\eta}{\sqrt{n}}$	$\frac{n_{(1+C)/2} \delta_\eta}{\sqrt{n}}$
$E_{\sigma,\eta}$	$\sqrt{\frac{\chi_{[n-1,(1-C)/2]}^2}{n-1}} - 1$	$\sqrt{\frac{\chi_{[n-1,(1+C)/2]}^2}{n-1}} - 1$
$E_{\delta,\eta}$	$\frac{\sqrt{n}}{\delta_\eta t_{[n-1,\sqrt{n}/\delta_\eta,(1+C)/2]}} - 1$	$\frac{\sqrt{n}}{\delta_\eta t_{[n-1,\sqrt{n}/\delta_\eta,(1-C)/2]}} - 1$

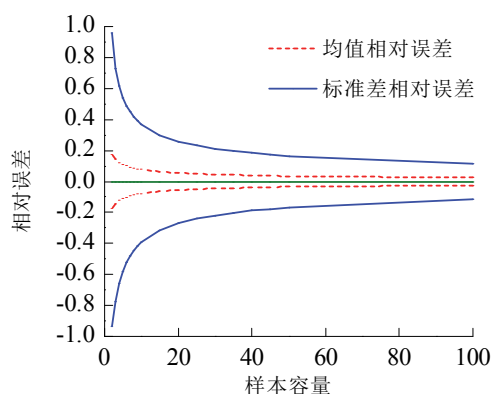


图1 计算模式不定性系数推断结果相对误差的上、下限
Fig. 1 The upper and lower value of relative error for inference result of calculation model uncertainty factor

一般情况下, 变异系数 δ_η 的数值范围为 0.05~0.15^[7,9-10]. 图1所示为 $C=0.9$ 、 $\delta_\eta=0.15$ 的典型情况下计算模式不定性系数推断结果相对误差的上、下限. 可见: 样本容量较小时, 矩法的推断结果存在着较大的相对误差, 特别是对标准差和变异系数的推断, 受统计不定性的影响显著. 就一般的结构试验而言, 当样本容量为较高的30时, 均值的相对误差为 $-0.045 \sim 0.045$, 而标准差和变异系数的

为 $-0.219\sim 0.211$; 样本容量减为10时, 则分别增大为 $-0.078\sim 0.078$ 和 $-0.392\sim 0.371$; 减为3时, 则分别增大为 $-0.142\sim 0.142$ 和 $-0.774\sim 0.731$.

3 统计不定性对结构性能推断结果的影响

计算模式不定性系数 η 推断中的统计不定性会直接影响对结构性能 Y 的推断结果. 根据式(2)~(4), 推断结构性能 Y 均值 μ_Y 、标准差 σ_Y 和变异系数 δ_Y 的统计量应分别为:

$$T_{\mu,Y} \approx T_{\mu,\eta} \mu_g \quad (11)$$

$$T_{\sigma,Y} \approx T_{\mu,\eta} \mu_g \sqrt{T_{\delta,\eta}^2 + \delta_g^2} \quad (12)$$

$$T_{\delta,Y} \approx \sqrt{T_{\delta,\eta}^2 + \delta_g^2} \quad (13)$$

除数字特征, 标准值和设计值也是反映结构性能 Y 概率特性的重要指标, 而且是结构分析和设计中结构性能的主要表达形式^[11], 它们在数学上可统一表达为随机变量 Y 的上侧分位值 y_p . 当 Y 服从正态分布时, 推断其标准值和设计值的统计量均可统一表达为:

$$T_{y_p} = T_{\mu,Y} - k T_{\sigma,Y} \approx T_{\mu,\eta} \mu_g (1 - k \sqrt{T_{\delta,\eta}^2 + \delta_g^2}) \quad (14)$$

$$k = \Phi^{-1}(p) \quad (15)$$

式中: p 为标准值或设计值的保证率; $\Phi^{-1}(\cdot)$ 为标准正态分布函数的反函数. 当 Y 服从对数正态分布时, 推断其标准值和设计值的统计量为:

表2 结构性能推断结果相对误差的上、下限

Tab. 1 The upper and lower value of relative error for inference result of structural performance

相对误差	下限	上限
$E_{\mu,Y}$	$\frac{n_{(1-C)/2} \delta_\eta}{\sqrt{n}}$	$\frac{n_{(1+C)/2} \delta_\eta}{\sqrt{n}}$
$E_{\sigma,Y}$ 、 $E_{\delta,Y}$	$\sqrt{\frac{(\sqrt{n}/t_{[n-1, \sqrt{n}/\delta_\eta, (1+C)/2]})^2 + \delta_g^2}{\delta_\eta^2 + \delta_g^2}} - 1$	$\sqrt{\frac{(\sqrt{n}/t_{[n-1, \sqrt{n}/\delta_\eta, (1-C)/2]})^2 + \delta_g^2}{\delta_\eta^2 + \delta_g^2}} - 1$
E_{y_p} (正态分布)	$\frac{1 - k \sqrt{(\sqrt{n}/t_{[n-1, \sqrt{n}/\delta_\eta, (1-C)/2]})^2 + \delta_g^2}}{1 - k \sqrt{\delta_\eta^2 + \delta_g^2}} - 1$	$\frac{1 - k \sqrt{(\sqrt{n}/t_{[n-1, \sqrt{n}/\delta_\eta, (1+C)/2]})^2 + \delta_g^2}}{1 - k \sqrt{\delta_\eta^2 + \delta_g^2}} - 1$
E_{y_p} (对数正态分布)	$\frac{e^{\frac{1}{2}[\ln(1+\delta_\eta^2+\delta_g^2)+k]^2}}{e^{\frac{1}{2}[\ln(1+(\sqrt{n}/t_{[n-1, \sqrt{n}/\delta_\eta, (1-C)/2]})^2+\delta_g^2)+k]^2}} - 1$	$\frac{e^{\frac{1}{2}[\ln(1+\delta_\eta^2+\delta_g^2)+k]^2}}{e^{\frac{1}{2}[\ln(1+(\sqrt{n}/t_{[n-1, \sqrt{n}/\delta_\eta, (1+C)/2]})^2+\delta_g^2)+k]^2}} - 1$

一般情况下, 变异系数 δ_g 的数值范围为 $0.10\sim 0.25$ ^[7,9-10]. 图2所示为 $C=0.9$ 、 $\delta_\eta=0.15$ 、 $\delta_g=0.10$ 、 $k=1.645$ ($p=0.95$) 的典型情况下结构性能推断结果相对误差的上、下限. 可见: 样本容量较小时, 计算模式不定性系数推断中的统计不定性对结构性能的推断结果也有着显著的影响, 特别是

$$T_{y_p} = \exp\{T_{\mu,\ln Y} - k T_{\sigma,\ln Y}\} \quad (16)$$

$$T_{\mu,\ln Y} = \ln \frac{T_{\mu,Y}}{\sqrt{1+T_{\delta,Y}^2}} \approx \ln \frac{T_{\mu,\eta} \mu_g}{\sqrt{1+T_{\delta,\eta}^2 + \delta_g^2}} \quad (17)$$

$$\hat{\sigma}_{\ln Y} = \sqrt{\ln(1+T_{\delta,Y}^2)} \approx \sqrt{\ln(1+T_{\delta,\eta}^2 + \delta_g^2)} \quad (18)$$

记 $T_{\mu,Y}$ 、 $T_{\sigma,Y}$ 、 $T_{\delta,Y}$ 、 T_{y_p} 的相对误差分别为 $E_{\mu,Y}$ 、 $E_{\sigma,Y}$ 、 $E_{\delta,Y}$ 、 E_{y_p} . 由于 $T_{\mu,\eta}$ 的相对误差相对较小, 为解决数学上的困难, 这里在式(12)、式(14)和式(17)中近似取:

$$T_{\mu,\eta} = \mu_\eta \quad (19)$$

即忽略 $T_{\mu,\eta}$ 中统计不定性的影响. 可以证明:

$$\frac{E_{\mu,Y} \sqrt{n}}{\delta_\eta} \approx \frac{T_{\mu,\eta} - \mu_\eta}{\sigma_\eta / \sqrt{n}} = \frac{\bar{Z} - \mu_\eta}{\sigma_\eta / \sqrt{n}} \quad (20)$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(E_{\sigma,Y}+1)^2(\delta_\eta^2 + \delta_g^2) - \delta_g^2}} \approx \frac{\sqrt{n}}{T_{\delta,\eta}} = \frac{\bar{Z} \sqrt{n}}{S_Z} \quad (21)$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(E_{\delta,Y}+1)^2(\delta_\eta^2 + \delta_g^2) - \delta_g^2}} \approx \frac{\sqrt{n}}{T_{\delta,\eta}} = \frac{\bar{Z} \sqrt{n}}{S_Z} \quad (22)$$

式(20)的右侧项服从标准正态分布, 式(21)和式(22)的右侧项均服从自由度为 $n-1$ 、非中心参数为 \sqrt{n}/δ_η 的非中心 t 分布. 利用区间估计法, 表2中列出了相对误差 $E_{\mu,Y}$ 、 $E_{\sigma,Y}$ 、 $E_{\delta,Y}$ 的上、下限. 按照类似的步骤, 或者利用表1中变异系数推断结果相对误差 E_{y_p} 的上、下限, 可得相对误差 $E_{\dot{y}_p}$ 的上、下限, 见表2.

对标准差和变异系数推断结果的影响. 例如, 当样本容量为30时, 标准差和变异系数的相对误差为 $-0.147\sim 0.156$, 其它概率特性的相对误差总体为 $-0.066\sim 0.062$; 样本容量减为10时, 则分别增大为 $-0.251\sim 0.281$ 和 $-0.118\sim 0.106$; 减为3时, 则分别增大为 $-0.415\sim 0.605$ 和 $-0.255\sim 0.175$.

就一般的结构性能建模而言,统计不定性对结构性能推断结果的影响是不可忽略的,存在较大的因过高估计结构性能而产生额外失效风险的可能。这是目前试验建模中涉及基本方法的一个普遍问题,对结构的可靠度分析和设计都有着全局性的影响。

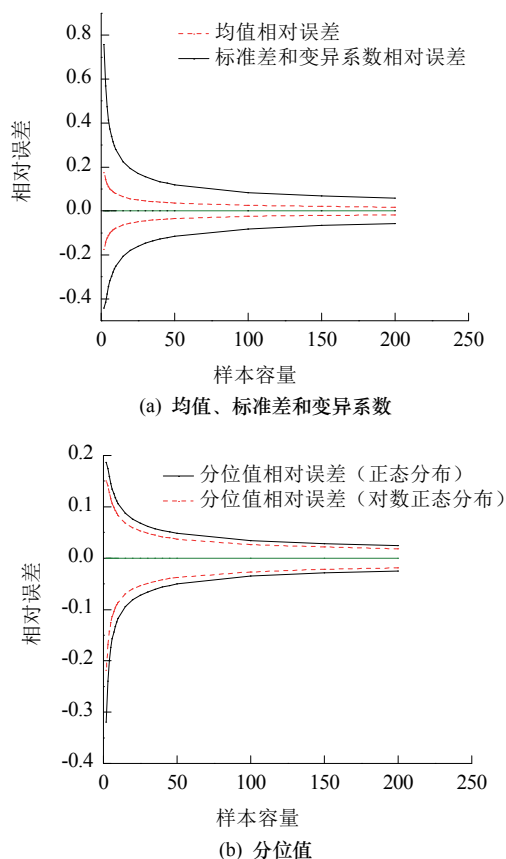


图2 结构性能推断结果相对误差的上、下限

Fig.2 The upper and lower value of relative error for inference result of structural performance

4 考虑统计不定性影响的条件

计算模式不定性系数推断中的统计不定性及其对结构性能推断结果的影响与样本容量有着直接关系。由于结构性能的推断结果在工程应用中具有更重要的意义,这里根据其相对误差与样本容量之间的关系,讨论需考虑统计不定性影响的条件。

根据图2所示的分析结果,在0.9的置信水平下,若保证结构性能推断结果相对误差的最大绝对值不大于10%,则推断标准差和变异系数时的最小样本容量应为71,推断均值和分位值时的最小样本容量为13。若将相对误差的最大绝对值限定于5%以内,则相应的最小样本容量分别为276和51。建议以样本容量不大于70作为需考虑统计不定性影响的条件,这时标准差和变异系数推断结果的相对

误差为 $-0.097 \sim 0.100$,均值和分位值的总体为 $-0.042 \sim 0.041$ 。按照这一条件,一般的试验建模中均需要考虑统计不定性的影响。有关考虑统计不定性影响的建模方法将在其他论文中专门讨论。

另一方面,样本容量很小时,推断结果的相对误差随样本容量的减小而迅速增大;相反,增大样本容量则可显著降低相对误差的水平。图3所示为结构性能推断结果相对误差的最大绝对值,其变化率的样本容量分界点大致为3~5。建议试验建模中的样本容量至少应为5,即试件数量至少应为5个,否则推断结果的相对误差会迅速增大。

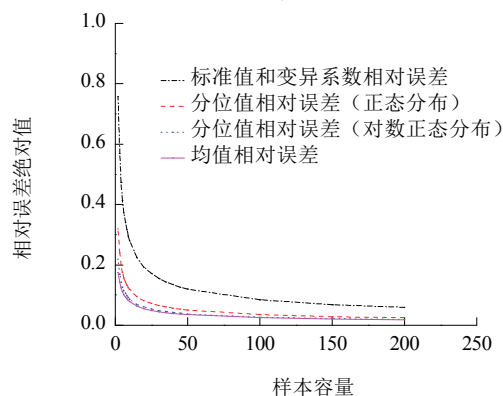


图3 结构性能推断结果相对误差的最大绝对值

Fig.3 The largest absolute value of relative error for inference result of structural performance

5 结论

(1) 结构性能试验建模中的统计不定性主要存在于计算模式不定性系数概率特性的推断中,实际应用中可以一定置信水平下其推断结果的相对误差反映统计不定性的影响。样本容量较小时,目前试验建模中的统计不定性是显著的,特别是对标准差和变异系数推断结果的影响。

(2) 计算模式不定性系数推断中的统计不定性对结构性能推断结果的影响是不可忽略的,存在较大的因过高估计结构性能而产生额外失效风险的可能。这是目前试验建模中涉及基本方法的一个普遍问题,对结构的可靠度分析和设计都有着全局性的影响。

(3) 当样本容量不大于70时试验建模中需考虑统计不定性的影响,这时在0.9的置信水平下结构性能概率特性推断结果相对误差的最大绝对值不大于10%;试验建模中的试件数量至少应为5个,否则推断结果的相对误差会迅速增大。

(下转第675页)

- [4] 陆煜, 赵善博, 马文勇, 等. 双曲型塔柱大跨凸面悬挑结构风荷载特性研究[J]. 石家庄铁道大学学报(自然科学版), 2015, 28(4): 6-10.
LU Yu, ZHAO Shanbo, MA Wenyong, et al. Study on wind loads of hyperbolic columnar structure with large-span convex cantilever roof[J]. Journal of Shijiazhuang Tiedao University(Natural science), 2015, 28(4): 6-10.
- [5] 吴迪, 武岳, 孙瑛. 大跨度屋盖结构极值风压概率分布特征研究[J]. 建筑结构学报, 2015, 36(3): 29-35.
WU Di, WU Yue, SUN Ying. Probability distribution characteristics of extreme wind pressure for large span roofs[J]. Journal of Building Structures, 2015, 36(3): 29-35.
- [6] 何星星, 苏波, 石启印. 阶梯型大跨屋盖结构风荷载数值模拟研究[J]. 防灾减灾工程学报, 2015, 35(3): 307-312.
HE Xingxing, SU Bo, SHI Qiyin. Numerical simulation of wind-induced loads on large span ladder-type roof structures[J]. Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering, 2015, 35(3): 307-312.
- [7] 张明亮, 李秋胜, 陈伏彬, 等. 复杂体型大跨屋盖表面风压分布的试验研究[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2011, 38(10): 1-6.
ZHANG Mingliang, LI Qiusheng, CHEN Fubin, et al. Experimental study of wind pressure distributions on a long-span complex roof structure[J]. Journal of Hunan University(Natural Sciences), 2011, 38(10): 1-6.
- [8] 中华人民共和国住房和城乡建设部. 建筑结构荷载规范: GB50009-2012[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2012.
Ministry of housing and urban-rural development of the People's Republic of China. Load code for building structures: GB50009-2012[S]. Beijing: China Building Industry Press, 2012.
- [9] 日本建筑学会. 建筑风荷载流体计算指南[M]. 孙瑛, 孙晓颖, 曹曙阳, 译. 北京: 中国建筑工业出版社, 2010.
Architectural Institute of Japan. Guide for numerical prediction of wind loads on buildings[M]. SUN Ying, SUN Xiaoying, CAO Shuyang, translated. Beijing: China Building Industry Press, 2010.
- [10] AIJ. Recommendations for loads on buildings[S]. Tokyo, Japan: Architectural Institute of Japan, 2004.

(编辑 桂智刚)

(上接第642页)

参考文献 References

- [1] 中华人民共和国建设部. 混凝土结构试验方法标准: GB/T 50152-2012[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2012.
Ministry of construction of the People's Republic of China. Standard methods for testing of concrete structures: GB/T 50152-2012[S]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2012.
- [2] 中华人民共和国建设部. 混凝土结构试验方法标准: GB50152-92[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1992.
Ministry of construction of the People's Republic of China. Standard methods for testing of concrete structures: GB50152-92[S]. Beijing: China Architecture and Building Press, 1992.
- [3] 茆诗松, 王静龙, 濮晓龙. 高等数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 施普林格出版社, 1998.
MAO Shisong, WANG Jinglong, PU Xiaolong. Advanced mathematical statistics[M]. Beijing: Higher Education Press, Springer-Verlag Press, 1998.
- [4] ANG A H S, TANG W H. Probability concepts in engineering planning and design(II)[M]. New York: John Wiley & Son, Inc, 1984.
- [5] JCSS. JCSS probabilistic model code: part 3: resistance models[S]. Copenhagen, Denmark: Joint Committee on Structural Safety, 2001.
- [6] ISO. General principles on reliability for structures: ISO2394: 1998[S]. International Standard Organization, 1998.
- [7] 中华人民共和国建设部. 建筑结构设计统一标准: GB J68-84[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1984.
Ministry of construction of the People's Republic of China. Unified standard for design of building structures: GB J68-84[S]. Beijing: China Architecture and Building Press, 1984.
- [8] 茆诗松, 王静龙, 史定华. 统计手册[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
MAO Shisong, WANG Jinglong, SHI Dinghua. Statistics handbook[M]. Beijing: Science Press, 2003.
- [9] 李继华, 林忠民, 李明顺. 建筑结构概率极限状态设计[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1990.
LI Jihua, LIN Zhongmin, LI Mingshun. The probability limit state design of building structures[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 1990.
- [10] 贡金鑫, 魏巍巍. 工程结构可靠性设计原理[M]. 北京: 机械工业出版社, 2007.
GONG Jinxin, WEI Weiwei. The reliability design principle of engineering structures[M]. Beijing: China Machine Press, 2007.
- [11] 中华人民共和国住房和城乡建设部. 工程结构可靠性设计统一标准: GB50153-2008[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2008.
Housing and urban-rural development of the People's Republic of China. Unified standard for reliability design of engineering structures: GB50153-2008[S]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2008.

(编辑 桂智刚)