

均布压力下弯剪型悬臂柱屈曲临界荷载算法

惠宽堂¹, 彭先飞²

(1. 西安建筑科技大学土木工程学院, 陕西 西安 710055; 2. 成都基准方中建筑设计有限公司, 四川 成都 610031)

摘要: 为了得到弯剪型悬臂柱的屈曲临界荷载, 通过将横向均布荷载作用下悬臂柱的弯曲变形曲线和剪切变形曲线作为其在均布压力下的挠度曲线, 用能量法推导了弯剪型悬臂柱的屈曲临界荷载计算公式. 将推导的公式与弯曲型悬臂柱屈曲临界荷载公式对比, 发现弯剪型公式仅比弯曲型公式多了一个无量纲修正系数, 对系数进行了拟合得到了更为简便的公式. 与有限元结果相比, 所推导和拟合的公式精度很高, 且形式简单, 应用方便.

关键词: 弯曲变形; 剪切变形; 能量法; 弯剪型悬臂柱; 屈曲临界荷载

中图分类号: TU391

文献标志码: A

文章编号: 1006-7930(2017)03-0346-04

Shear-flexural buckling of cantilever columns under uniformly distributed load

XI Kuantang¹, PENG Xianfei²

(1. School of Civil Engineering, Xi'an Univ. of Arch. & Tech., Xi'an 710055, China;

2. Chengdu JZFD Architectural DesignCo., Ltd, Chengdu 610031, China)

Abstract: In order to derive the shear-flexural cantilever column buckling load formula, the energy method is used by taking the flexural deformation curve and shear deformation curve of cantilever columns under lateral uniform load as the deformation curve under uniformly distributed load. Then the result is compared between the shear-flexural cantilever column and bend cantilever bar in the paper, and one dimensionless coefficient is recognized. A more concise formula is obtained. Finite element analysis shows that the formula derived has a convenient application and high precision.

Key words: flexural deformation; shear deformation; the energy method; shear-flexural cantilever columns; buckling critical load

悬臂柱的稳定性分析是弹性稳定计算的基本内容. 文献[1-2]是最早对均布荷载作用下的弯剪型竖向悬臂杆的屈曲问题进行了研究; 文献[3]对文献[1-2]的公式进行了改进; 文献[4]把弯剪型悬臂柱的弹性屈曲问题分为由弯曲控制的整体屈曲和剪切控制的局部屈曲两种情况, 并采用不同的试解函数对两种情况进行了讨论; 文献[5-6]通过对不同参数下悬臂柱的弯曲屈曲和剪切屈曲的相关关系曲线进行分析, 拟合出了近似的屈曲临界荷载计算公式; 文献[7]选取三角函数表达式来近似表示悬臂柱的弯曲分量和剪切分量, 用能量法推导了均布荷载作用下的弯剪型悬臂柱的屈曲临界荷载计算公式; 文献[8]考虑剪切变形

的影响, 采用摄动法研究了压杆在轴向压力和均布荷载联动下的屈曲问题; 文献[9]在计算顶部集中荷载作用下的竖向悬臂柱时, 提出了当柱子的挠度曲线未知时, 可用自由端作用横向荷载的悬臂柱的挠度曲线, 作为顶部集中荷载作用下悬臂柱屈曲的挠曲线, 并且最后算得的近似解的误差仅为 0.13%.

目前对弯曲型悬臂柱的弹性屈曲临界荷载研究较多, 而对于考虑剪切变形的悬臂柱研究较少, 已有公式较为复杂且精度不高. 本文把均布横向荷载作用下的弯曲侧移和剪切侧移挠度曲线作为悬臂柱在轴向均布荷载作用下屈曲时的近似变形曲线(如图 1 所示), 用能量法推导其屈曲临界荷载.

1 屈曲临界荷载计算

1.1 变形曲线

图1所示横向均布荷载作用下的悬臂柱的弯曲变形曲线为

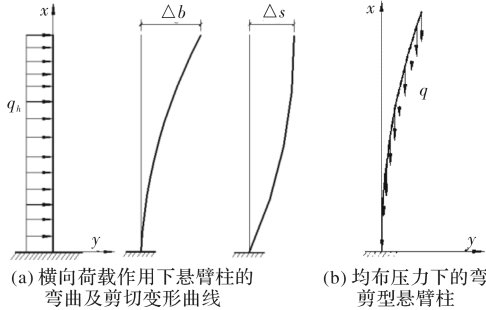


图1 弯剪型悬臂柱在横向均布荷载及均布压力下的变形曲线

Fig. 1 The deformation curve of shear-flexural cantilever column under transverse uniformly distributed load and uniformly distributed load

$$y_{bx} = \frac{x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2}{24EI} q_h \quad (1)$$

剪切变形曲线为

$$y_{sx} = \frac{-x^2 + 2lx}{2S} q_h \quad (2)$$

式中: EI 为悬臂柱的抗弯刚度, S 为悬臂柱的抗剪刚度, $S = \frac{GA}{k_s}$; G 为剪切模量, A 为截面面积, k_s 为截面的剪切形状系数, q_h 为横向均布荷载。

1.2 纯弯曲屈曲临界荷载

假定均布压力下的悬臂柱纯弯曲屈曲时的侧移变形曲线为式(1)的形式, 并用柱顶位移表示如下:

$$y_b = \Delta_b \frac{x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2}{3l^4} \quad (3)$$

式中, Δ_b 为柱顶弯曲位移。显然, 式(3)满足几何边界条件:

$$y_b|_{x=0} = 0, \quad y'_b|_{x=0} = 0, \quad y_b|_{x=l} = \Delta_b$$

由式(3)可得弯矩

$$M = -EI y'' = -\Delta_b EI \frac{4l^2 - 8lx + 4x^2}{l^4} \quad (4)$$

均布压力荷载作用下, 弯曲应变势能为

$$U_b = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{8EI\Delta_b^2}{5l^3} \quad (5)$$

均布压力荷载势能

$$V_b = -\frac{q}{2} \int_0^l (l-x) y'_b{}^2 dx = -\frac{\Delta_b^2}{5} q \quad (6)$$

结构总势能

$$\Pi_b = U + V = \frac{8EI\Delta_b^2}{5l^3} - \frac{\Delta_b^2}{5} q \quad (7)$$

由势能驻值条件

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_b} = \left(\frac{8EI}{5l^3} - \frac{q}{5} \right) \Delta_b = 0 \quad (8)$$

由于 Δ_b 有非零解, 可得到纯弯曲屈曲时的临界荷载:

$$q_{cr,b} = \frac{8EI}{l^3} \quad (9)$$

式(9)与精确解 $\frac{7.837EI}{l^3}$ 的相对误差为 2.04%。

1.3 弯剪型屈曲临界荷载

假定均布压力下悬臂柱剪切屈曲时的变形曲线为式(2)的形式, 并用柱顶位移表示如下:

$$y_s = \Delta_s \frac{2xl - x^2}{l^2} \quad (10)$$

式中, Δ_s 为顶点剪切位移。显然, 式(10)满足几何边界条件:

$$y_s|_{x=0} = x, \quad y'_s|_{x=0} = 0, \quad y_s|_{x=l} = \Delta_s$$

均布压力荷载作用下, 悬臂柱的剪力

$$Q = S y'_s = \frac{2x - 2l}{l^2} S \Delta_s \quad (11)$$

剪切应变势能

$$U_s = \int_0^l \frac{Q^2}{2S} dx = \frac{2S}{3l} \Delta_s^2 \quad (12)$$

当结构发生弯剪型屈曲时, 结构的变形由弯曲变形 y_b 和剪切变形 y_s 构成, 即结构的总变形为两者的和^[10-12]:

$$y = y_b + y_s \quad (13)$$

结构总的应变势能

$$U = U_b + U_s = \frac{8EI\Delta_b^2}{5l^3} + \frac{2S\Delta_s^2}{3l} \quad (14)$$

竖向均布荷载势能

$$V = \frac{-q}{2} \int_0^l (l-x) y'^2 dx = -\frac{18\Delta_b^2 + 40\Delta_b\Delta_s + 45\Delta_s^2}{90} q \quad (15)$$

结构的总势能

$$\Pi = U + V = \frac{8EI\Delta_b^2}{5l^3} + \frac{2S\Delta_s^2}{3l} - \frac{18\Delta_b^2 + 40\Delta_b\Delta_s + 45\Delta_s^2}{30} q \quad (16)$$

由势能驻值条件, 对上式进行变分得:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_b} = \left(\frac{16EI}{5l^3} - \frac{2q}{5} \right) \Delta_b - \frac{4q}{9} \Delta_s = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_s} = \left(\frac{4S}{3l} - q \right) \Delta_s - \frac{4q}{9} \Delta_b = 0 \quad (18)$$

由于 Δ_b 、 Δ_s 有非零解的条件是系数行列式为零, 即:

$$\begin{vmatrix} \frac{16EI}{5l^3} - \frac{18q}{5} & -\frac{4q}{9} \\ -\frac{4q}{9} & \frac{4S}{3l} - q \end{vmatrix} = 0 \quad (19)$$

由上式可得, 结构发生弯剪型屈曲时的临界荷载方程为

$$\frac{8}{81}q^2 - \left[\frac{8EI}{5l^3} + \frac{12S}{5l} \right]q + \frac{32EIS}{15l^4} = 0 \quad (20)$$

解方程, 取较小值得到:

$$q_{cr} = \frac{6(54EI + 9l^2S - \sqrt{2 \cdot 916E^2I^2 - 12EI l^2S + 81l^4S^2})}{41l^3} \quad (21)$$

令 $\mu = \frac{EI}{Sl^2}$ (无量纲参数), 则式(21)可整理为

$$q_{cr} = \frac{3(9 + 54\mu \sqrt{2 \cdot 916\mu^2 - 12\mu + 81})}{164\mu} \frac{8EI}{l^3} \quad (22)$$

如令

$$\eta = \frac{3(9 + 54\mu \sqrt{2 \cdot 916\mu^2 - 12\mu + 81})}{164\mu} \quad (23)$$

显然, η 仅与参数 μ 有关, 为弯剪屈曲临界荷载修

正系数. 由弯曲型屈曲临界荷载公式(9)再结合式(22)与式(23), 则均布压力下的弯剪型悬臂柱屈曲的临界荷载为

$$q_{cr} = \eta q_{cr,b} \quad (24)$$

为了进一步得到方便的计算公式, 对式(23)进行拟合, 得到系数 η 的拟合公式

$$\eta = 1 / \left[1 + \left(\frac{\mu}{0.22} \right)^{1.15} \right] \quad (25)$$

式(25)与式(23)的方差为 0.98, 则弯剪型悬臂柱在均布压力下的屈曲临界荷载可写为

$$q_{cr} = \frac{q_{cr,b}}{1 + \left(\frac{\mu}{0.22} \right)^{1.15}} \quad (26)$$

文献[7]用三角函数作为变形曲线的近似表达式, 推导的弯剪型悬臂柱的屈曲临界荷载公式为

$$q_{cr} = \xi q'_{cr,b} / \left(1 + \frac{q'_{cr,b}}{q'_{cr,s}} \right) \quad (27)$$

$$\text{式中: } \xi = \frac{[\lambda(\pi^2 + 4) + (\pi^2 - 4)] - \sqrt{[\lambda(\pi^2 + 4) + (\pi^2 - 4)] + 16\lambda\pi^2}[\lambda(\pi^2 + 4) + (\pi^2 - 4)]}{2\lambda[(\pi^2 + 4)(\pi^2 - 4) - 4\pi^2]}$$

其中: $\lambda = \frac{\pi^2 EI}{4H^2 S}$; $q'_{cr,b} = \frac{\pi^4 EI}{2(\pi^2 - 4)H^3}$ 为弯曲屈曲荷载; $q'_{cr,s} = \frac{2\pi^2 S}{(\pi^2 + 4)H}$ 为剪切屈曲荷载.

2 有限元结果对比

采用与文献[7]相同的算例, 模型总高度均为 $H=14\text{m}$, 钢材均选取 Q235, 各模型剪切刚度 S

亦取弯曲刚度的 20%. 用有限元软件 SAP2000 对式(24)和式(26)的精度进行验证, 并与式(27)进行比较.

从表 1 中数据可以看出: 与有限元结果相比, 式(24)、式(26)与有限元的相对误差范围为 2.02%~2.46%, 与式(27)相比, 本文所推导和拟合的公式形式简单、应用方便且精度很高.

表 1 公式与有限元结果对比

Tab. 1 Comparison of formula and finite element results

编号	截面/mm	$EI \times 10^6$ /N·m ²	$S \times 10^6$ /N	式(24)	式(26)	式(27)	FEM	相对误差/%		
				/kN·m ⁻¹	/kN·m ⁻¹	/kN·m ⁻¹	/kN·m ⁻¹	式(24)	式(26)	式(27)
1	H150×100×8×10	2.26	15.2	6.56	6.58	6.82	6.43	2.02	2.33	6.07
2	H200×120×8×10	5.11	21.2	14.85	14.86	15.44	14.55	2.06	2.13	6.12
3	H300×150×10×12	18.4	41.0	53.40	53.36	55.62	52.28	2.14	2.07	6.39
4	H400×200×10×12	45.0	55.8	129.60	129.86	135.41	126.77	2.23	2.44	6.82
5	H500×200×10×12	75.1	71.3	215.58	215.93	225.55	210.70	2.32	2.48	7.05
6	H600×300×10×12	156.0	85.4	443.18	443.13	467.40	432.54	2.46	2.45	8.06

3 参数 μ 对 η 的影响

根据式(23), 可得到 η 随 μ 的变化情况, 如图 2 所示. 对参数 η 的变化范围进行分析, 观察图 2 可知:

(1) 参数 η 随 μ 的逐渐增大而减小, 且减小速

度逐渐减慢. 对于任意 μ , 参数 η 的值域为 (0, 1).

(2) 当 $\mu \rightarrow 0$ 时, 包含两种情况:

(a) $EI \rightarrow 0$, 即抗弯刚度为零, 此种情况实际中不可能存在;

(b) $S \rightarrow \infty$, 即抗剪刚度为无穷大, 此时, 结

构发生纯弯曲屈曲, $\eta_{\max} \rightarrow 1$.

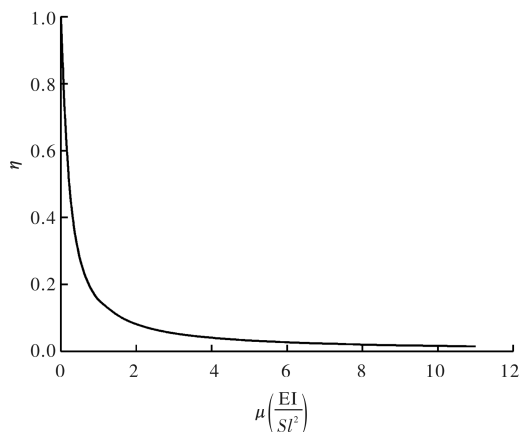


图2 参数 η 随 μ 变化曲线

Fig. 2 The Varying curve of parameter η with μ

(3) 当 $\mu \rightarrow \infty$ 时, 亦包含两种情况:

(a) $EI \rightarrow \infty$, 即抗弯刚度为无穷大, 即此时发生纯剪切失稳, 此种情况在实际中亦不存在;

(b) $S \rightarrow 0$, 即抗剪刚度为零, 此时结构的承载力为零, $\eta_{\min} \rightarrow 0$.

4 结论

通过将均布横向荷载作用下悬臂柱的挠度曲线作为承载均布压力的等截面悬臂柱的变形曲线, 用能量法推导了等截面悬臂柱的弯曲和弯剪屈曲临界荷载简化计算公式, 得到以下结论:

(1) 通过对推导得到的弯曲型悬臂柱屈曲临界荷载简化计算公式和弯剪型公式对比发现, 弯剪型公式仅比弯曲型多了一个无量纲的弯剪屈曲临界荷载修正系数 η , 对系数进行了拟合得到了更为简便的计算公式, 并分析了 η 随参数 μ 的变化情况.

(2) 通过与有限元结果对比, 证明了本文推导和拟合的公式能够很精确的计算悬臂柱的屈曲临界荷载. 与复杂的有限元方法相比, 本文得到的公式不仅形式简单、应用方便且精度很高.

参考文献 References

- [1] ZALKA K A. Building of cantilever subjected to distributed normal loads, taking the shear deformation into account[J]. Acta Tech. Acad. Sci Hung, 1979, 89(4): 479-508.
- [2] ZALKA K A, ARMER G S T. Stability of large structures[M]. UK: Butterworth-Heinemann Ltd, 1992.
- [3] HEGEDÜS I, KOLLÁR L P. Building of sandwich columns with thin faces under distributed normal loads[J]. Acta Tech. Acad. Sci Hung, 1984, 97(4): 111-122.

- [4] BAKKER M C M. Shear-flexural buckling of cantilever columns under uniformly distributed normal loads[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 2006, 132(11): 1160-1167.
- [5] 沈瑞宏, 童根树. 均布压力作用下变截面 Timoshenko 悬臂柱的稳定性[J]. 工业建筑, 2013, 43(4): 8-12.
SHEN Ruihong, TONG Genshu. Buckling of Timoshenko columns with linearly varied rigidities and axial forces[J]. Industrial Construction, 2013, 43(4): 8-12.
- [6] 童根树. 钢结构的平面内稳定[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2013.
TONG Genshu. Plane stability of steel structures[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2013.
- [7] 李亮, 李国强. 轴向均布荷载下弯剪型竖向悬臂杆的屈曲临界荷载简化算法[J]. 西安建筑科技大学学报(自然科学版), 2013, 45(6): 817-821.
LI liang, LI Guoqiang. Simplified algorithm of buckling critical load for shear-bending cantilever rod under axially uniformly distributed load[J]. J. Xi'an Univ. of Arch. & Tech. (Natural Science Edition), 2013, 45(6): 817-821.
- [8] 吴晓, 杨立军, 孙晋. 考虑剪切变形时轴向荷载联合作用下压杆屈曲[J]. 强度与环境, 2009, 36(6): 45-49.
WU Xiao, YANG Lijun, SUN Jin. Buckling of compressed bar subjected to combined effect of axial loads considering shear deformation[J]. Structure & Environment Engineering, 2009, 36(6): 45-49.
- [9] 铁摩辛科 S P. 弹性稳定理论[M]. 第2版. 张福范, 译: 北京: 科学出版社, 1965.
TIMOSHENKO S P. Theory of elastic stability[M]. 2nd ed.. ZHANG Fufan, Translated. Beijing: Science Press, 1965.
- [10] 刘开国. 高层与大跨度结构简化分析及算例[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2006.
LIU Kaiguo. Simplify analysis and calculation examples of the tall and big span structure[M]. Beijing: China Building Industry Press, 2006.
- [11] 傅学怡. 实用高层建筑结构设计[M]. 第二版. 北京: 中国建筑工业出版社, 2010.
FU Xueyi. Practical design of high-rise building. [M]. 2nd ed. Beijing: China Building Industry press, 2010.
- [12] 刘古岷, 张若晞, 张田申. 应用结构计算稳定[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
LIU Gumin, ZHANG Ruoxi, ZHANG Tianshen. Stability computation of application structure [M]. Beijing: Science Press, 2005.

(编辑 沈波)