

# 利用成长模型的自适应垂直坐标序列分析

王梦婷<sup>1</sup>, 聂建亮<sup>2</sup>, 郭春喜<sup>2</sup>, 田 捷<sup>2</sup>, 王 斌<sup>2</sup>

(1. 西安建筑科技大学 理学院 陕西 西安 710055 2. 国家测绘地理信息局 大地测量数据处理中心, 陕西 西安 710054)

**摘要:** 针对监测点的垂直运动不具有均匀性, 采用 Weibull 等地面沉降成长模型为运动模型, 提高动力学模型的可靠性; 利用预测残差构造自适应因子, 调整动力学模型与观测方程的对滤波解贡献。以沉降区域实测点垂向坐标序列为例, 该方法能够提高状态方程预报值与滤波解的可靠性。

**关键词:** Gompertz 模型; Logistic 模型; Weibull 模型; 自适应滤波

**中图分类号:** TU478

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1006-7930(2018)05-0761-05

## Analysis of adaptive vertical coordinate series based on growth model

WANG Mengting<sup>1</sup>, NIE Jianliang<sup>2</sup>, GUO Chunxi<sup>2</sup>, TIAN Jie<sup>2</sup>, WANG Bin<sup>2</sup>

(1. School of Science, Xi'an Univ. of Arch. & Tech., Xi'an 710055, China;

2. Geodetic Data Processing Centre, National Administration of Surveying, Mapping and Geoinformation of China, Xi'an 710054, China)

**Abstract:** Growth models as Weibull Model are used as the dynamic equation to improve the accuracy for the character of vertical movement in view of the fact that the monitored points has no uniformity. The adaptive factor is obtained with predicted residuals to adjust the contribution between the dynamic and observation equation. Finally, actual data of monitored points are given to test the new adaptive filtering. It is shown that the new algorithm can improve the accuracy of predicted state, and further enhance the reliability of the filtering.

**Key words:** Gompertz Model; logistic Model; weibull Model; adaptive Kalman filtering

地面沉降是近几十年世界各国普遍发生的地质灾害, 对当地人们生活与经济建设造成了巨大的损失。地面沉降点垂直运动轨迹随时间要经过发生、发展、成熟、稳定 4 个阶段, 运动轨迹一般呈 S 曲线形式, 常速度, 常加速度等物理运动模型虽然能够预报较短时间的平稳载体运动状态, 但并未考虑地质等因素影响, 所以长时间预报精度可能不高。地质学者常利用 Weibull 等成长模型描述地面沉降过程, 充分考虑沉降区域地质条件与水文因素, 利用最小二乘等拟合方法整体计算成长模型参数, 有效反演软地基等地面沉降全过程; 考虑到 Gompertz 模型与 Logistic 模型需要足够的施工期或 S 曲线反弯点以前的沉降观测样本, S 曲线反转点沉降值与最终沉降相对不变, Weibull 成长模型克服了 Gompertz 模型与 Logistic 模型的缺陷, 削弱了实测样本对反弯点的依赖, 提高了地面沉降的预报精度<sup>[1-3]</sup>。成长模型作为地

面沉降预报模型, 能够改善滤波在地面沉降预报中的地质背景基础, 提高滤波解的估计精度, 给出合理的地面沉降机理诠释。另外由于数据处理策略、卫星轨道、环境因素等影响, 垂向坐标序列中存在季节性、非季节性的有色噪声, 国内外学者采用误差模型改正与自适应滤波方法削弱有色噪声影响<sup>[4-6]</sup>。如 Dong 等计算了水体、大气等质量负荷造成的地壳弹性变形<sup>[5-7]</sup>; 杨元喜等学者提出了自适应滤波算法, 构造自适应因子调整预测值协方差矩阵与观测噪声协方差矩阵的比例关系, 提高滤波解的可靠性<sup>[8-10]</sup>。鉴于以上研究基础, 提出基于地面沉降成长模型的自适应滤波算法, 利用成长模型作为滤波动力学模型, 采用预测残差构造自适应因子, 实时调整状态方程与观测方程的比例关系, 进一步提高地面沉降监测点的滤波解精度。

收稿日期: 2017-08-30

修改稿日期: 2018-08-31

基金项目: 国家自然科学基金项目(41574003、41474015、41604001)、国家测绘地理信息局 2015 年公益性行业科研专项(201512004)、科技基础性工作专项重点项目(2015FY210400)

第一作者: 王梦婷(1977—), 女, 讲师, 硕士, 主要研究偏微分方程数值解。E-mail: wangmengtinglh@163.com

## 1 动力学模型

目前, Kalman 滤波的动力学模型有常速度(CV)模型、常加速(CA)模型、一阶时间相关(Singer)模型和“当前”统计模型等多种构造形式<sup>[10-11]</sup>. 对于变化缓慢的地面沉降监测点的垂直运动, 常速度、常加速等模型不能较好地描绘地面沉降长期运动规律, 而 Gompertz、Logistic、Weibull 成长模型是地质学者预测地面沉降全过程的常用模型, 能够更真实地反映监测点的垂直运动曲线<sup>[1-3]</sup>.

### 1.1 成长模型

Gompertz、Logistic 成长模型虽能反映监测的总体 S 形沉降过程, 在反弯点处与最终沉降的比值为常数, 另外这两个模型要求在沉降开始阶段或 S 反弯点前需要大量的观测样本. 而 Weibull 成长模型能够克服 Gompertz、Logistic 成长模型的不足, 能够真实反映监测点的瞬时垂直方向的有界变化.

Gompertz 成长模型为<sup>[1]</sup>

$$x(t) = a \exp[-h \exp(-bt)] \quad (1)$$

其中:  $a$ 、 $b$ 、 $h$  为待定参数;  $t$  为时间.

Logistic 成长模型为

$$x(t) = \frac{a}{1 + h \exp(-bt)} \quad (2)$$

其中,  $a$ 、 $b$ 、 $h$  为待定参数, 且均为非负.

Weibull 成长模型为

$$x(t) = a - (a - b) \exp[-(ht)^c] \quad (3)$$

式中,  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $h$  为待定参数,  $a$  为最终沉降量,  $b$  为初始沉降量,  $h$  为地基加荷因子,  $c$  为综合影响因子, 且  $a$ 、 $b$ 、 $h$  非负. 当  $a > b$  时,  $c > 0$ , 反之,  $c < 0$ .

### 1.2 滤波动力学模型

利用地面沉降监测点垂直方向  $n$  个历元坐标序列数据, 扣除年周期、半年周期等趋势项影响<sup>[4-6]</sup>, 得到“干净”垂直方向坐标序列. 根据公式(1)–(3), 分别采用最小二乘法计算成长模型参数, 并获得监测点垂向位置  $\hat{x}$ .

考虑沉降点加速度数值较小, 将加速度作为不变值. 则第  $k$  历元的 Weibull 成长模型向量表示简化为

$$\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} x(k) \\ x'(k) \\ x''(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ x'(k-1) \\ x''(k-1) \end{bmatrix} \quad (4)$$

预报值对应协方差矩阵为

$$\Sigma_{\bar{\mathbf{X}}_k} = \Phi_{k,k-1} \Sigma_{\bar{\mathbf{X}}_{k-1}} \Phi_{k,k-1}^T + \Sigma_{\mathbf{W}_k} \quad (5)$$

其中,  $\Sigma_{\mathbf{W}_k}$  计算可以参考文献[10-11].

## 2 自适应因子构造

地面沉降监测点一般垂直运动较缓慢, 多类因素影响导致运动具有不确定性. Weibull 成长模型能够较可靠地描述地面沉降监测点的运动状态, 提高自适应滤波动力学模型的预测值的精度. 考虑垂直运动为一维运动, 而待估参数为位置、速度、加速度, 最小二乘法单历元秩亏, 无法利用状态不符值构造自适应因子的误差统计量. 因此, 根据预测残差构造模型误差统计量<sup>[2,8]</sup>

$$\Delta \hat{\mathbf{V}} = \left( \frac{\bar{\mathbf{V}}_k^T \bar{\mathbf{V}}_k}{tr(\Sigma_{\bar{\mathbf{V}}_k})} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

其中,  $tr(\cdot)$  表示迹.

位置的自适应因子采用两段函数构造<sup>[10,12]</sup>.

$$a_k^0 = \begin{cases} 1.0 & |\Delta \hat{\mathbf{V}}| \leq k_0 \\ \frac{k_0}{|\Delta \hat{\mathbf{V}}|} & |\Delta \hat{\mathbf{V}}| > k_0 \end{cases} \quad (7)$$

式中,  $k_0$  为阈值, 一般取值 3.0~8.5.

而速度、加速度为间接可测参数<sup>[13]</sup>, 无法通过观测方程获得估计值, 此处, 自适应因子都取 1.0.

## 3 基于成长模型的自适应滤波

第  $k$  历元自适应 Kalman 滤波解为<sup>[10]</sup>

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \bar{\mathbf{X}}_k + \bar{\mathbf{K}}_k (\mathbf{L}_k - \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{X}}_k) \quad (8)$$

式中,  $\bar{\mathbf{K}}_k$  的表达式为

$$\bar{\mathbf{K}}_k = \alpha_k \Sigma_{\bar{\mathbf{X}}_k} \mathbf{A}_k^T (\mathbf{A}_k \alpha_k \Sigma_{\bar{\mathbf{X}}_k} \mathbf{A}_k^T + \Sigma_k)^{-1} \quad (9)$$

其中,  $\alpha_k$  为自适应因子矩阵, 即

$$\alpha_k = \begin{bmatrix} 1.0/\alpha_k^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}; \mathbf{A}_k \text{ 为第 } k \text{ 历元的系数}$$

矩阵;  $\mathbf{L}_k$ 、 $\Sigma_k$  为观测向量及对应协方差矩阵;  $\bar{\mathbf{X}}_k$  为状态参数的预报值及对应协方差矩阵.

第  $k$  历元自适应 Kalman 滤波残差为

$$\mathbf{V}_k = \mathbf{L}_k - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{X}}_k \quad (10)$$

## 4 算例分析

山东省西北部与黄河三角洲是地面沉降严重区域, 目前德州、广饶、齐河地区沉降严重, 造成了巨大的经济损失. 算例采用沉降严重区域德州(DEZH)、广饶(GURA)、齐河(QHRS)连续运行参考站的 2010~2015 年垂向坐标序列验证自适应滤波的可靠性, 其中数据采样间隔为 1d. 在计

算过程中, 首先利用最小二乘方法获得这些测站的年周期、半年周期等周期项参数, 并在垂向坐标序列中扣除其影响; 利用垂向坐标序列获得成长模型参数; 最终利用自适应滤波处理“干净”的垂向坐标序列, 自适应因子采用预测残差构造误差统计量. 另外速度谱密度取  $10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}^2$ , 观测值协方差为  $10^{-3} \text{ cm}^2$ . 算例采用 9 种方案:

- 方案 1: Gompertz 成长模型;
- 方案 2: 标准 Kalman 滤波, 动力学模型采用 Gompertz 成长模型;
- 方案 3: 自适应 Kalman 滤波, 动力学模型采用 Gompertz 成长模型;
- 方案 4: Logistic 成长模型;
- 方案 5: 标准 Kalman 滤波, 动力学模型采用 Logistic 成长模型;
- 方案 6: 自适应 Kalman 滤波, 动力学模型采用 Logistic 成长模型;
- 方案 7: Weibull 成长模型;
- 方案 8: 标准 Kalman 滤波, 动力学模型采用 Weibull 成长模型;
- 方案 9: 自适应 Kalman 滤波, 动力学模型采用 Weibull 成长模型.

统计三个连续运行参考站的不同方案残差序列, 得到各方案 RMS, 统计于表 1, 各方案误差曲线绘于图 1—图 9.

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (\mathbf{v}_k)^2}{n}}$$

(11)

表 1 各方案 RMS 统计结果

Tab. 1 The error statistics of the coordinate components

方案		RMS/cm		
		DEZH	GURA	QHRS
Gompertz	1	0.61	0.78	0.72
	2	0.61	0.69	0.69
	3	0.47	0.50	0.51
Logistic	4	0.61	1.04	0.78
	5	0.61	0.82	0.72
	6	0.47	0.51	0.52
Weibull	7	0.61	0.63	0.70
	8	0.61	0.61	0.68
	9	0.47	0.47	0.50

由以上计算结果可以看出:

(1)广饶、德州、齐河站的地面沉降灾害基本上处于成长、成熟阶段, Gompertz、Logistic、

Weibull 成长模型都能够反映这三个连续运行站的垂直运动规律, Weibull 成长模型预报精度优于 Gompertz、Logistic 成长模型.

(2)与方案 1、4、7 相比, 方案 2、5、8 精度有一定程度提高. 这是因为在成长模型作为预报模型基础上, Kalman 滤波利用观测信息, 进一步修正预报值结果, 提高滤波解的可靠性.

(3)三个站的自适应滤波与成长模型相比, 精度平均提高约 30%, 最大提高幅度 51%; 三个站的自适应滤波与标准 Kalman 滤波相比, 精度平均提高约 25%, 最大提高幅度 38%. 这是因为根据预测残差构造误差统计量, 采用两段函数构造自适应因子, 利用自适应因子合理调整 Kalman 滤波

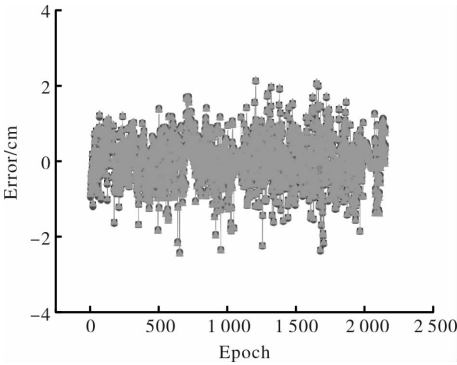


图 1 德州站地面沉降成长模型误差曲线

Fig. 1 The error of grown models in DEZH

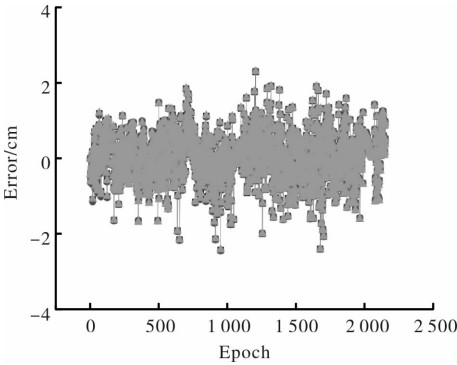


图 2 德州站标准 Kalman 滤波误差曲线

Fig. 2 The error of Kalman filtering in

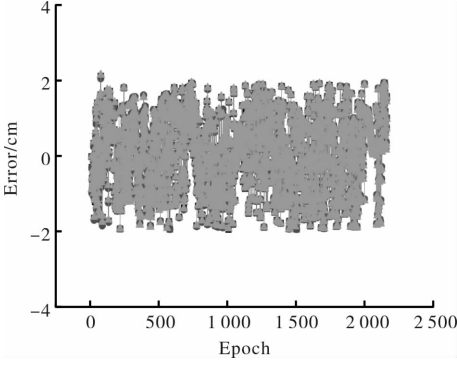


图 3 德州站自适应 Kalman 滤波误差曲线

Fig. 3 The error of adaptive Kalman filtering in

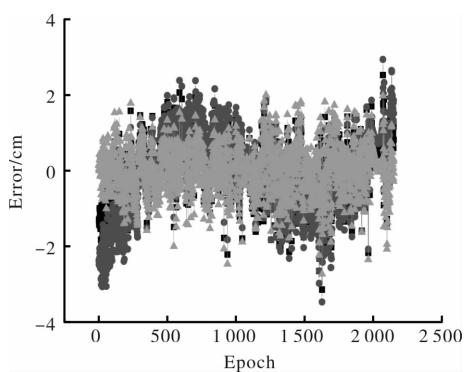


图 4 广饶站地面沉降成长模型误差曲线

Fig. 4 The error of grown models in DEZH

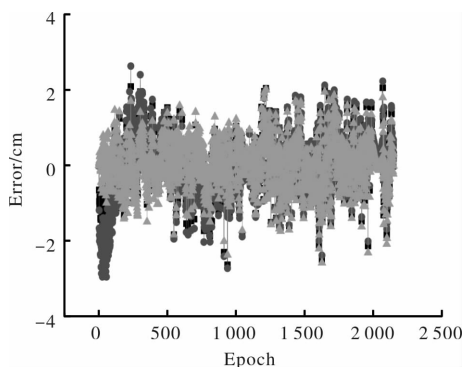


图 5 广饶站标准 Kalman 滤波误差曲线

Fig. 5 The error of Kalman filtering in GURA

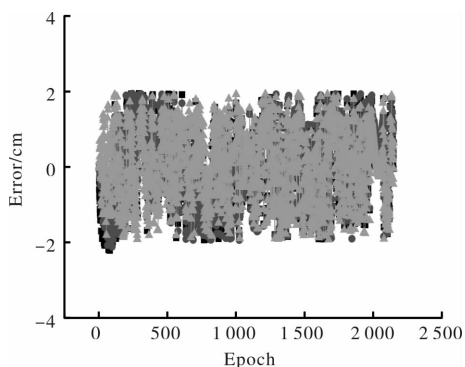


图 6 广饶站自适应 Kalman 滤波误差曲线

Fig. 6 The error of adaptive Kalman filtering in GURA

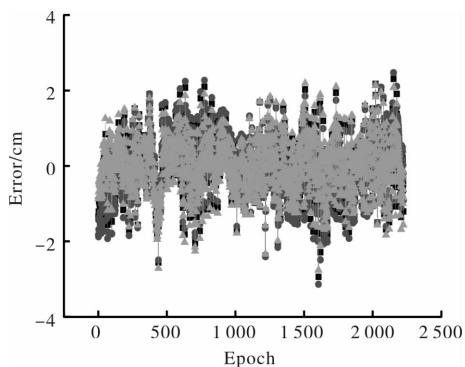


图 7 齐河站地面沉降成长模型误差曲线

Fig. 7 The error of grown models in DEZH

的动力学模型与观测值对滤波解的贡献, 进一步提高滤波解的精度与可靠性。

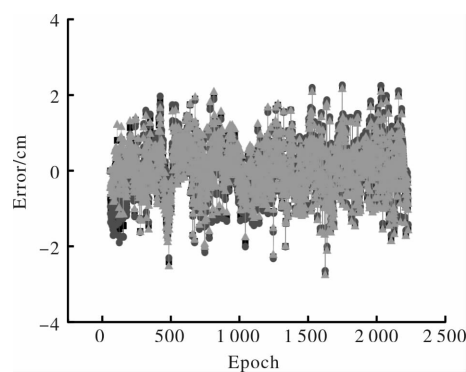


图 8 齐河站标准 Kalman 滤波误差曲线

Fig. 8 The error of Kalman filtering in QHRS

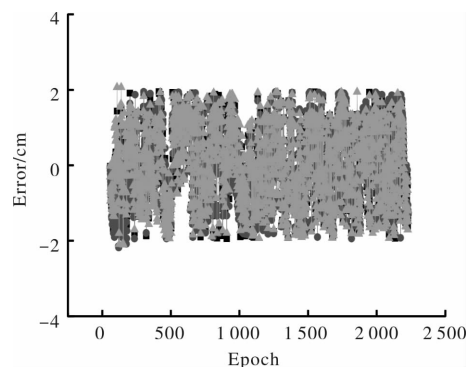


图 9 齐河站自适应 Kalman 滤波误差曲线

Fig. 9 The error of adaptive Kalman filtering in QHRS

## 5 结语

连续运行参考站在地面沉降中发挥着不可替代作用, 实时监测地面点的垂直运动变化。地面沉降成长模型能够有效描述连续运行参考站的沉降全过程; 而 Kalman 滤波将地面沉降成长模型作为动力学模型, 能够提高地面点垂直运动的可靠性; 自适应 Kalman 滤波利用自适应因子调整动力学模型与观测值之间的关系, 进一步提高地面沉降监测点垂直坐标序列的自适应滤波解精度。另外, 地面沉降点受季节等因素影响, 垂直坐标序列中存在有色噪声, 这削弱了常用滤波估计结果的精度, 降低了地面沉降速度的可靠性。因此, 研究坐标序列的有色噪声成分及误差改正模型是下一步的工作。

致谢: 感谢山东国土测绘院与陆态网络中心提供的试验观测数据。

## 参考文献 References

- [1] 王伟, 卢廷浩. 基于 Weibull 曲线的软基沉降预测模型分析[J]. 岩土力学, 2007, 28(4): 803-806.  
WANG Wei, LU Tinghao. Study on prediction model of soft foundation settlement based on Weibull curve [J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, 28(4): 803-806.

- [2] 刘玉成,曹树刚,刘延保.可描述地表沉陷动态过程的时间函数模型探讨[J].岩土力学,2010,31(3):925-931.  
LIU Yuchang, CAO Shugang, LIU Yanbao. Discussion on some time functions for describing dynamic course of surface subsidence due to mining [J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, 31(3): 925-931.
- [3] 涂许杭,王志亮,梁振森,等.修正的威布尔模型在沉降预测中的应用研究[J].岩土力学,2005,26(4):621-623.  
TU Xuhang, WANG Zhiliang, LIANG Zhenmiao, et al. Study on application of modified Weibull model to settlement prediction of foundation [J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(4): 621-623.
- [4] 姜卫平,李昭,刘万科,等.顾及非线性变化的地球参考框架建立与维持的思考[J].武汉大学学报(信息科学版),2010,35(6):665-669.  
JIANG Weiping, LI Zhao, LIU Wanke, et al. Some thoughts on establishment and maintenance of terrestrial reference frame considering non-linear variation [J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2010, 35(6): 665-669.
- [5] 李昭,姜卫平,刘鸿飞,等.中国区域 IGS 基准站坐标时间序列噪声模型建立与分析[J].测绘学报,2012,41(4):496-503.  
JIANG Weiping, LI Zhao, LIU Hongfei, et al. Noise model establishment and analysis of IGS reference station coordinate time series inside China [J]. Acta Geodetica et Cartographica Sinica, 2012, 41(4): 496-503.
- [6] 李昭. GPS 坐标时间序列的非线性变化研究[D].武汉:武汉大学,2012.  
LI Zhao. Research on the non-linear variation of GPS coordinate time series [D]. Wuhan: Wuhan University, 2012.
- [7] DONG Danan, FANG Peng, Bock Y, et al. Anatomy of apparent seasonal variations from GPS-derived site position time series [J]. Journal of Geophysical Research, 2002, 107(B4), 2075
- [8] 杨元喜,何海波,徐天河.论动态自适应滤波[J].测绘学报,2001,30(4):293-298.  
YANG Yuanxi, HE Haibo, XU Tianhe. On adaptive-ly kinematic filtering [J]. Acta Geodetica et Cartographica Sinica, 2001, 30(4): 293-298.
- [9] 杨元喜,高为广.基于方差分量估计的自适应融合导航[J].测绘学报,2004,33(1):22-26.  
YANG Yuanxi, GAO Weiguang. Integrated navigation by using variance component estimates of multi-sensor measurements and adaptive weights of dynamic model information [J]. Acta Geodetica et Cartographica Sinica, 2004, 33(1): 22-26.
- [10] 杨元喜.自适应动态导航定位[M].北京:测绘出版社,2006.  
YANG, Yuanxi. Adaptive navigation and kinematic positioning [M]. Beijing: Press of Surveying and Mapping, 2006.
- [11] 高为广.自适应数据融合理论及其在 GPS 和 INS 中的应用[D].郑州:信息工程大学,2005.  
GAO Weiguang. Adaptive data fusion theory and its applications in integrated navigation system GPS and INS [D]. Zhengzhou: Information Engineering University, 2005.
- [12] 黄观文,杨元喜,张勤.开窗分类因子抗差自适应序贯平差用于卫星钟差参数估计与预报[J].测绘学报,2011,40(1):15-21.  
HUANG Guanwen, YANG Yuanxi, ZHANG Qin. Estimation and predict satellite clock error using adaptively robust sequential adjustment with classified adaptive factors based on opening windows [J]. Acta Geodetica et Cartographica Sinica, 2011, 40(1): 15-21.
- [13] 吴富梅,聂建亮,何正斌.利用预测残差和选权滤波构造的分类因子在 GPS/INS 组合导航中的应用[J].武汉大学学报(信息科学版),2012,37(3):261-264.  
WU Fumei, NIE Jianliang, HE Zhengbin. Classified adaptive filtering to GPS/INS integrated navigation based on predicted residuals and selecting weight filtering [J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2012, 37(3): 261-264.

(编辑 沈波)