

# 无粘结预应力活性粉末混凝土梁疲劳全过程 应力计算方法研究

罗许国, 王义翔, 汪建群

(湖南科技大学 土木工程学院, 湖南 湘潭, 411201)

**摘要:**通过对无粘结预应力活性粉末混凝土梁进行等幅疲劳试验研究,得到了RPC应变、受拉钢筋应变和无粘结筋应力增量随疲劳循环次数变化的变化值。结合试验结果,提出了适用于活性粉末混凝土的疲劳残余应变演化方程及疲劳变形模量退化方程。基于损伤变量的定义形式及应变等效原理,推导了钢筋弹性模量退化模型及剩余疲劳强度模型;受拉钢筋及无粘结筋弹性模量退化模型及剩余疲劳强度模型的不同通过两者的S-N曲线和屈服强度的不同来体现。基于上述模型采用分段线性原理来代替疲劳非线性过程,并利用材料弹性模量的退化来反映材料的疲劳损伤,提出了无粘结预应力RPC梁疲劳全过程正截面疲劳应力计算方法。将计算结果与试验值进行对比,两者吻合较好具有一定精度。

**关键词:**无粘结预应力活性粉末混凝土梁;疲劳试验;疲劳残余应变;疲劳变形模量;疲劳全过程

中图分类号: TU37

文献标志码: A

文章编号: 1006-7930(2019)01-0039-07

## Study on the method for stress calculation of fatigue process of unbonded prestressed reactive powder concrete beams

LUO Xuguo, WANG Yixiang, WANG Jianqun

(School of Civil Engineering, Hunan University of science and Technology, Xiangtan 411201, China)

**Abstract:** Through equal-amplitude fatigue test of unbonded prestressed reactive powder concrete beams, the variation of RPC strain, tensile strain of steel bars and stress increment of unbonded tendons with the number of fatigue cycles were obtained. Based on the experimental results, the fatigue residual strain evolution equation and the fatigue deformation modulus degradation model of the active powder concrete are proposed. Based on the definition of damage variable and strain equivalent principle, the elastic modulus degradation model and residual fatigue strength model of steel bar are derived. The elastic modulus degradation model of residual steel and unbonded tendon and the residual fatigue strength model proved to be different. The difference between the S-N curve and the yield strength is reflected. Based on the above model, the piecewise linear principle is used to replace the fatigue nonlinear process, and the degradation of the material elastic modulus is used to reflect the fatigue damage of the material. The fatigue stress calculation method of the whole section of the unbonded prestressed RPC beam is proposed. Results are compared with the experimental values, and the two coincide with a certain accuracy.

**Key words:** unbonded prestressed active powder concrete beam; fatigue test; fatigue residual strain; fatigue deformation modulus; fatigue whole process

活性粉末混凝土(Reactive Powder Concrete)由于其具有高强、高韧性、高耐久性等优异性能逐渐被研究人员所青睐,但对于活性粉末混凝土的研究多集中在配合比及静力方面,而疲劳性能方面的研究相对滞后<sup>[1-3]</sup>。此外,许多研究员对单调荷载作用下无粘结预应力混凝土结构进行了大量试验研究工作<sup>[4-5]</sup>;但主要集中于对该种结构的受力性能<sup>[6-7]</sup>及斜截面的疲劳性能的研究<sup>[8]</sup>。对于疲劳加载全寿命周期的结构损伤研究较少,如何

估计无粘结预应力活性粉末混凝土梁正截面的疲劳寿命尚未见到有关的研究资料。同时混凝土结构疲劳计算方法主要通过考虑材料处于损伤极限状态时的疲劳应力是否超过其疲劳容许应力来判断结构是否发生疲劳破坏<sup>[9]</sup>。采用该种方法进行疲劳计算不能有效的反映随疲劳加载次数增加造成材料损伤。

出于上述原因,本文结合无粘结预应力RPC梁疲劳试验研究结果分析,提出一种考虑预应力

钢筋、普通钢筋及活性粉末混凝土材料损伤累积的全寿命周期正截面疲劳应力计算方法, 为 RPC 梁在实际工程中的应用提供理论基础。

## 1 试验概况

整个试验共设计及制作了 4 根无粘结预应力 RPC 梁, 4 根梁具有相同的截面尺寸和配筋形式。活性粉末混凝土为湖南大学研制, 其材料特性为  $f_c = 74.1 \text{ MPa}$ 、 $f_t = 8 \text{ MPa}$ 、 $E_c = 34752 \text{ MPa}$ 、 $\epsilon_0 = 3269 \mu\epsilon$ 。纵向普通钢筋为直径 14 mm 的 HRB400 钢筋, 预应力筋为一根直径为 15.2 mm 的

钢绞线。试验梁截面尺寸和配筋情况如图 1 所示。从 4 根试验梁中选择 1 根梁进行静载试验确定其极限弯矩  $M_u$ 。另外 3 根梁进行等幅疲劳加载试验, 疲劳荷载上限值  $M_{\max} = 0.3M_u$ , 下限值为  $M_{\min} = 0.05M_u$ 。静载、测点布置图及疲劳试验如图 2 所示。疲劳试验在湖南科技大学 PMS500 型液压脉动疲劳试验机上完成。当疲劳加载次数分别为 1 次、 $1 \times 10^4$  次、 $5 \times 10^4$  次、 $1 \times 10^5$  次、 $2 \times 10^5$  次、 $5 \times 10^5$  次、 $10^6$  次、 $2 \times 10^6$  次时, 暂停疲劳试验进行静载试验并采集数据。

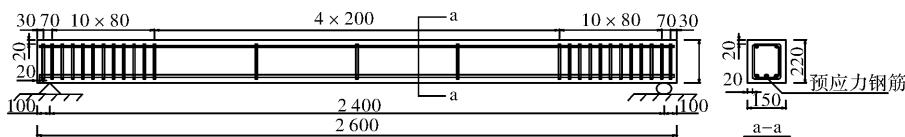


图 1 试验梁立面图及横截面图(单位: mm)

Fig. 1 Test beam facade and cross-sectional view(Unit: mm)

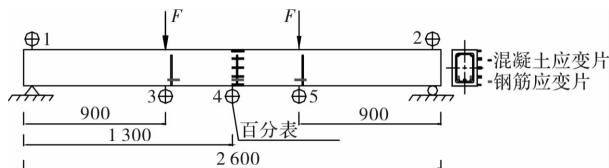


图 2 加载示意图及测点布置(单位: mm)

Fig. 2 Static load and fatigue test(Unit: mm)

## 2 材料疲劳损伤退化模型

### 2.1 RPC 残余应变演化方程

本文根据试验梁在反复加载过程中实测的 RPC 残余应变试验结果及现有成果<sup>[10]</sup> 提出下式(1), 并进行非线性拟合, 获得每根梁混凝土残余应变拟合系数如表 1 所示, 拟合方程如图 3 所示。从中可以得出, 残余应变变化规律和拟合曲线走向吻合度较高。

$$\epsilon_{cr} = a \cdot \left(\frac{N}{200}\right)^b + c \quad (1)$$

式中:  $\epsilon_{cr}$  为混凝土残余变形;  $N$  为疲劳循环次数(万次);  $a$ 、 $b$ 、 $c$  为待求系数。

表 1 混凝土残余应变演化方程拟合系数

Tab. 1 Fitting coefficient of concrete residual strain evolution equation

系数	试验梁编号		
	CF-1	CF-2	CF-3
$a$	96.84	100.3	93.88
$b$	0.146	0.132	0.150
$c$	10.56	9.74	10.38
$R$	0.94	0.93	0.96

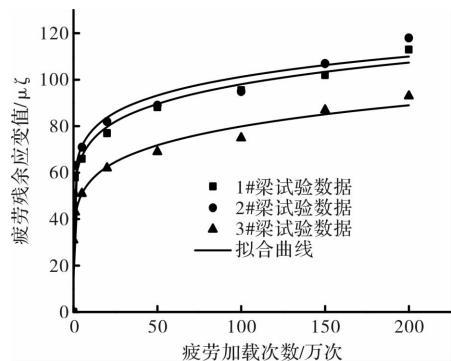


图 3 受压区 RPC 残余应变拟合曲线

Fig. 3 RPC residual strain fitting curve of the compression zone

### 2.2 RPC 疲劳变形模量退化模型

随着疲劳荷载循环次数的增加疲劳变形模量不断的衰减, 应力幅值越大变形模量衰减越快。在疲劳荷载作用下变形模量的衰减是材料损伤的宏观表现形式。且变形模量演化曲线和疲劳应变演化曲线变化趋势有一定的相似性, 均在起始变化较快然后进入缓慢阶段。因此, 假设疲劳变形模量退化方程形式和残余应变演化规律曲线形式相似, 采用下式(2)对试验数据进行拟合, 拟合系数如表 2 所示, 数据对比图如图 5 所示。

$$\frac{E_c^f}{E_c} = a \cdot \left(\frac{N}{200}\right)^b + c \quad (2)$$

式中:  $E_c^f$  为 RPC 疲劳变形模量;  $E_c$  为 RPC 初始变形模量;  $N$  为疲劳加载次数(万次);  $a$ 、 $b$ 、 $c$  为待拟合系数。

表 2 RPC 变形模量曲线拟合系数

Tab. 2 RPC deformation modulus curve fitting coefficient

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>R</i>
1# 梁	-0.46	0.03	1.28	0.97
2# 梁	-0.84	0.02	1.65	0.94
3# 梁	-0.27	0.07	1.08	0.93

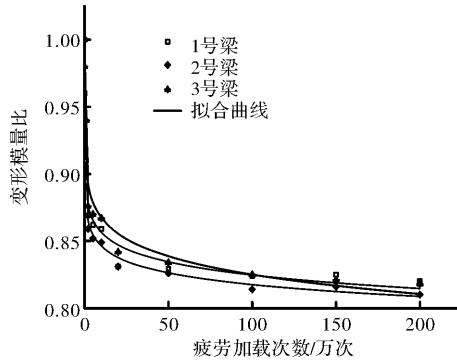


图 4 受压区 RPC 疲劳变形模量衰减曲线

Fig. 4 RPC fatigue deformation modulus decay curve of the compression zone

### 2.3 钢筋疲劳剩余强度及疲劳剩余弹性模量

在经典损伤力学理论中, 为了避免测量材料内部缺陷的困难, 运用应变等效原理将面积定义的材料损伤用加载过程中弹性模量的变化来表示。因此本文根据钢筋发生疲劳破坏的条件可得破坏时钢筋的剩余面积及受损面积:

$$A_{S,P}^f(N_f) = A_{S,P}\sigma_{S,P,max}^f/f_y \quad (3)$$

$$A_{SD,SP}^f(N_f) = A_{S,P} - A_{S,P}^f(N_f) = A_{S,P}[1 - \sigma_{S,P,max}^f/f_y] \quad (4)$$

式中:  $A_{S,P}^f(N_f)$  为钢筋疲劳断裂时的有效面积;  $A_{S,P}$  为起始面积;  $\sigma_{S,P,max}^f$  为疲劳最大应力;  $A_{SD,SP}^f(N_f)$  为钢筋疲劳断裂时的损伤面积;  $N_f$  为钢筋疲劳断裂时的疲劳加载次数;  $f_y$  为钢筋屈服强度。

在疲劳加载过程中面积损伤满足 Miner 线性累积损伤准则<sup>[9]</sup>钢筋面积损伤满足线性损伤规律, 定义损伤变量如式子  $D = \frac{A_{S,P} - A_{S,P}^f(N)}{A_{S,P} - A_{S,P}^f(N_f)} = \frac{N}{N_f}$ , 可以得到任意循环加载次数  $N$  下的损伤面积及有效面积为

$$A_{SD,SP}^f(N) = A_{S,P} \frac{N}{N_f} \left(1 - \frac{\sigma_{S,P,max}^f}{f_y}\right) \quad (5)$$

$$A_{S,P}^f(N) = A_{S,P} \left[1 - \frac{N}{N_f} \left(1 - \frac{\sigma_{S,P,max}^f}{f_y}\right)\right] \quad (6)$$

式中:  $A_{S,P}^f(N)$  为任意疲劳加载次数下钢筋的有效面积;  $A_{SD,SP}^f(N)$  为任意疲劳加载次数下钢筋损伤面积,  $A_{S,P}^f(N_f)$  为破坏时的剩余面积。

根据损伤变量表达形式可得任意循环次数  $N$  后钢筋的剩余强度为

$$\sigma_r(N) = \left[1 - \frac{N}{N_f} \left(1 - \frac{\sigma_{S,P,max}^f}{f_y}\right)\right] f_y \quad (7)$$

式中:  $\sigma_r(N)$  为疲劳加载任意次数后钢筋剩余强度。

由应变等效原理及损伤变量表达形式可得疲劳弹性模量与初始弹性模量的关系为

$$E_{S,P}^f = \left[1 - \frac{N}{N_f} \left(1 - \frac{\sigma_{S,P,max}^f}{f_y}\right)\right] E_{S,P} \quad (8)$$

其中: 普通钢筋及预应力钢绞线通过已有 S-N 曲线<sup>[11-12]</sup>来求取;  $E_{S,P}^f$  为任意疲劳循环次数后受拉钢筋剩余弹性模量;  $E_{S,P}$  为钢筋初始弹性模量;  $r$  为应力比值。

## 3 材料疲劳破坏准则

RPC 材料虽然通过剔除粗骨料提高了组分之间的细度和活性, 但材料内部仍然存在初始缺陷并不能全部消除。材料缺陷在疲劳过程中的不断的发展将会造成材料在尚未达到极限状态, 而因其耐久性不足不能再继续使用。RPC 材料内部缺陷是通过材料的残余变形来表现的。因此在计算分析时以 RPC 残余塑性应变作为疲劳循环作用下的失效的判据<sup>[13]</sup>:

$$\epsilon_{cr} \geqslant 0.4 \frac{f_c}{E_b} \quad (9)$$

疲劳是损伤不断累积的过程, 钢筋受力的有效面积随着损伤不断的累积而不断减小, 其剩余疲劳强度也随之降低, 且当疲劳循环作用过程中的最大应力水平值大于钢筋的疲劳剩余强度时, 钢筋就会产生破坏。脆性断裂为钢筋疲劳破坏的主要表现<sup>[14]</sup>。因此, 钢筋破坏准则可用下式表示:

$$\sigma_r(N) \leqslant \sigma_{S,P,max} \quad (10)$$

式中:  $\sigma_{S,P,max}$  为疲劳加载过程中最大应力。

## 4 疲劳全过程正截面应力计算

### 4.1 疲劳分析过程基本假定

通过对无粘结预应力 RPC 梁的疲劳试验研究表明: 在疲劳荷载循环作用下, RPC 应变沿梁高方向基本呈线性变化, 如图 5 所示。在 200 万次荷载循环后截面上已经出现裂缝, 但受压区 RPC 应力为 32 MPa, 相比其抗压强度 74 MPa 相对较小, 所以可以假定在疲劳加载过程中受压区 RPC 处于弹性阶段如应力应变图 6 所示。在疲劳加载过程中随着循环作用次数的增加材料会形成损伤, 考虑到钢筋面积损伤难测量, 所以钢筋损伤及 RPC 材料损伤都采用弹性模量的衰减来表示。

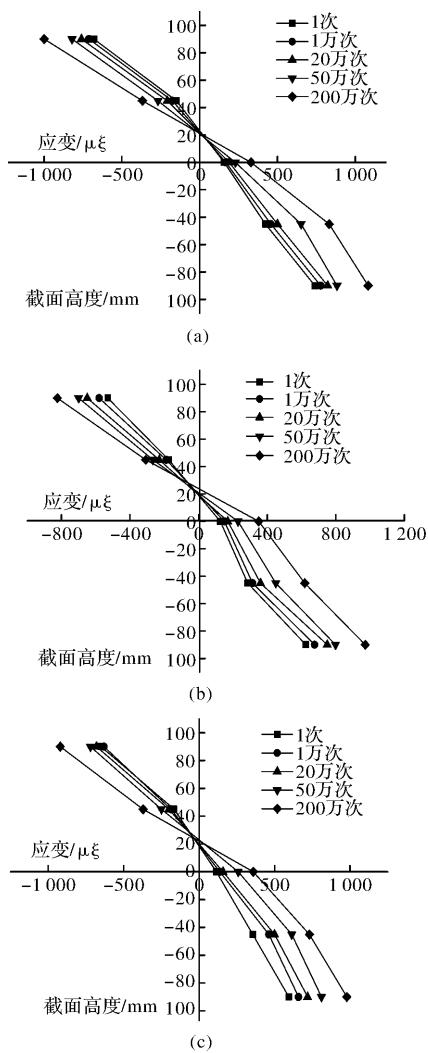


图 5 1#、2#、3# 梁疲劳最大荷载作用下  
截面应变分布

Fig. 5 Sectional strain under maximum load  
of 1#、2#、3#

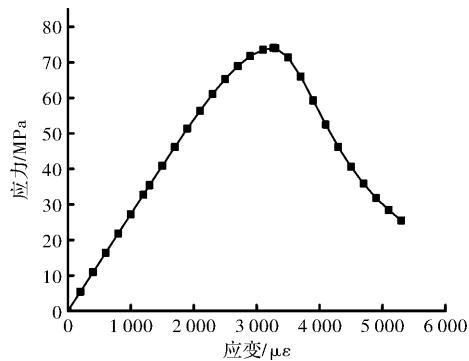


Fig. 6 Compressive stress-strain relationship  
of concrete

根据上述分析，在进行无粘结预应力 RPC 梁疲劳全过程分析时，基于以下基本假定：

(1)除无粘结预应力筋外，截面满足平截面假定；

(2)受压区 RPC 处于弹性阶段；

(3)疲劳过程中忽略受拉区 RPC 的抗拉作用；

(4)为简化计算，采用分段线性原理代替疲劳非线性过程，材料的疲劳损伤使用弹性模量的衰减来表示；

(5)对于 RPC 与钢筋组成的组合截面采用换算截面特性计算，取  $\alpha_{EP,S} = E_{p,s}^f/E_c^f$ 。

#### 4.2 正截面疲劳应力分析

目前对于无粘结筋在外荷载作用下的应力增量，其研究主要是针对于处于承载能力极限状态的极限应力增量<sup>[15]</sup>。但在本次无粘结预应力 RPC 疲劳试验过程中试验梁并未加载到承载能力极限状态，因此，本文借鉴文献[16]的预应力钢筋增量计算方法，在外荷载作用下的应力增量表示如下：

设  $\beta = \frac{\text{等效变形区长度}}{\text{混凝土受压区高度}} = \frac{L_o}{x}$ ， $\epsilon_{pc}$  为计算截面处预应力筋四周的混凝土应变， $\Delta L$  为周围混凝土的伸长量， $\epsilon_c$  为计算截面混凝土受压区上边缘应变，则：

$$\Delta L = \epsilon_{pc} \cdot L_o = \epsilon_{pc} \cdot \beta \cdot x \quad (11)$$

由平截面假定可得：

$$\epsilon_{pc} = \epsilon_c \cdot (h_p - x)/x \quad (12)$$

式中： $h_p$  为预应力钢筋重心至受压区上边缘的距离。

结合(13)、(14)可得：

$$\Delta L = \epsilon_c \cdot (h_p - x) \cdot \beta \quad (13)$$

无粘结筋和周围混凝土可以发生相对滑移，但符合变形协调条件，即无粘结筋总伸长量与四周混凝土总伸长量相等。由此可得在外荷载作用下的应力增量为：

$$\Delta \sigma_p = \frac{E_p \Delta L}{L} = \frac{\alpha_{EP} \sigma_{cc} (h_p - x) \beta}{L} \quad (14)$$

式中： $\sigma_{cc}$  为受压区上边缘混凝土应力； $\beta$  为混凝土受压区高度与等效变形区长度的比值，取  $\beta = 15.2$ <sup>[18]</sup>； $\alpha_{EP}$  为无粘结筋弹性模量与混凝土弹性模量的比值； $L$  为整梁全长，取  $L = 2600$  mm。

部分预应力混凝土梁开裂截面的应力分布与大偏心受压构件相似，因此，无粘结部分预应力活性粉末混凝土梁开裂截面应力分析通过引入等效变形区的概念可以转化为有粘结部分预应力活性粉末混凝土结构按大偏心受力构件进行应力计算分析<sup>[17]</sup>。

由平截面假定<sup>[18]</sup>可得：

$$\frac{\epsilon_c}{x} = \frac{\epsilon_s}{h_0 - x} \quad (15)$$

式中： $h_0$  为预应力钢筋和普通钢筋重心至受压区边

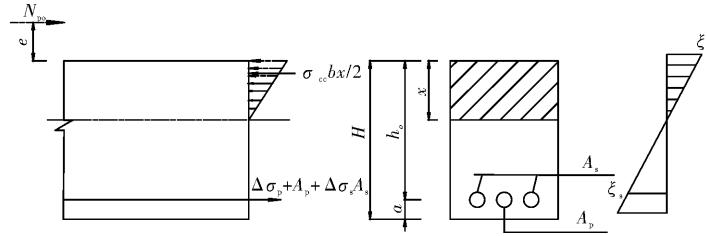


图 7 无粘结预应力 RPC 梁正截面疲劳应力分析计算简图

Fig. 7 The calculation model of sectional fatigue strain of unbonded prestressed RPC beams

缘混凝土的距离, 取  $h_o = h - a$ ;  $x$  为受压区高度;  $\epsilon_s$  为疲劳荷载作用下钢筋应变.

根据力的平衡条件可得:

$$N_{po} + \Delta\sigma_p A_p + \Delta\sigma_s A_s = \frac{1}{2} b x \sigma_{cc} \quad (16)$$

对偏心压力  $N_{po}$  作用点取矩  $\sum M_{N_{po}} = 0$ :

$$(\Delta\sigma_p A_p + \Delta\sigma_s A_s)(h_o + e) = \frac{1}{2} \sigma_{cc} x b \left( \frac{x}{3} + e \right) \quad (19)$$

经整理后可得开裂后矩形截面受压区高度关于  $x$  的三次方程为

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \quad (17)$$

$$A = \frac{bL}{6} \quad (18)$$

$$B = \frac{bLe}{2} + \alpha_{EP}^f \beta g A_p \quad (19)$$

$$C = \alpha_{ES}^f L g A_s - \alpha_{EP}^f h_p \beta g A_p \quad (20)$$

$$D = -\alpha_{ES}^f L g h_o A_s \quad (21)$$

其中:  $b$  为试验梁截面宽度;  $e$  为  $N_{po}$  作用点到试验梁受压区上边缘的距离;  $\alpha_{EP}^f$  为预应力钢筋疲劳

弹性模量与 RPC 疲劳变形模量之比;  $\alpha_{ES}^f$  为普通钢筋疲劳弹性模量与 RPC 疲劳弹性模量之比;  $g$  为预应力钢筋和普通钢筋重心至偏心压力  $N_{po}$  的距离, 取  $g = h_o + e$ .

其中:

$$e = \frac{M_{max}^f}{N_{po}} - h_o \quad (22)$$

$$N_{po} = \sigma_{pe} A_p + \frac{\sigma_{pe} A_p^2 \alpha_{EP}^f \beta y_{on}}{L} \left[ \frac{1}{A_n} + \frac{y_{cn}^2}{I_n} \right] \quad (23)$$

式中:  $M_{max}^f$  为疲劳荷载上限值;  $\sigma_{pe}$  为有效预应力, 取 882 MPa;  $y_{on}$  为净截面形心至截面上边缘的距离;  $y_{cn}$  为预应力钢筋重心至净截面形心的距离.

通过 NEWDON 迭代法求解受压区高度  $x$  值, 结合上式(14)~式(17)可以分别求出  $\epsilon_c$ 、 $\epsilon_p$ 、 $\epsilon_s$ . 根据上述计算方式及材料疲劳破坏准则, 可以求出任意疲劳荷载循环作用次数后截面应力, 从而能够实现无粘结预应力 RPC 梁疲劳全过程分析. 分析流程图如下图 8 所示.

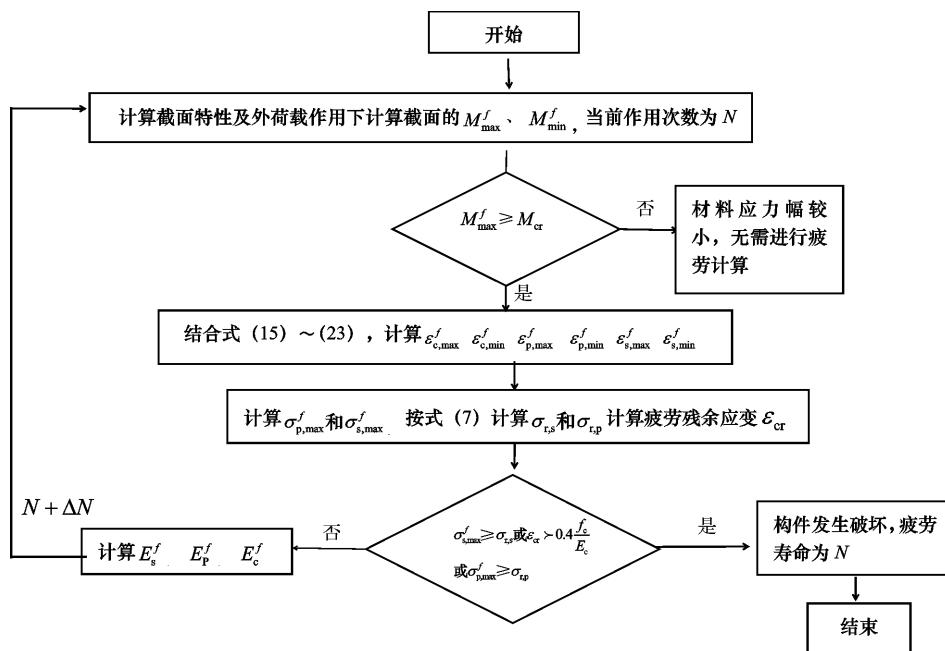


图 8 无粘结预应力 RPC 梁疲劳全过程分析流程图

Fig. 8 flow chart for nonlinear analysis of fatigue process

### 4.3 试验结果与计算结果比较

根据上述流程图的计算步骤, 对本次试验的三根无粘结预应力 RPC 梁进行疲劳全过程分析, 得到的理论计算值及试验值对比图如图 9~图 11 所示。图 9 为受压区 RPC 边缘应变试验值与计算值的对比图, 图 10 为普通钢筋应变试验值与计算值的对比图, 图 11 为无粘结筋应力增量实测值与理论值的对比图。

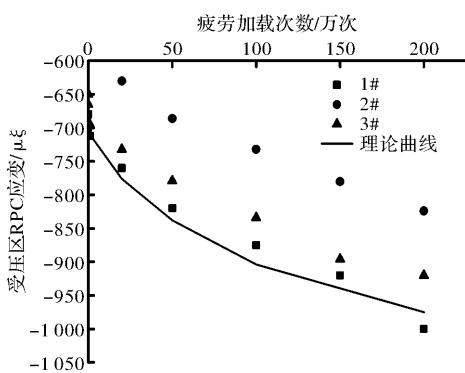


图 9 受压区 RPC 疲劳应变图

Fig. 9 RPC fatigue strain of the pressure zone

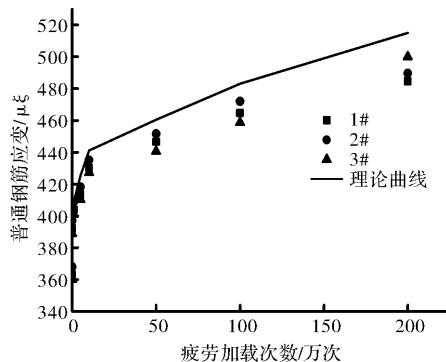


图 10 钢筋疲劳应变

Fig. 10 Steel fatigue strain

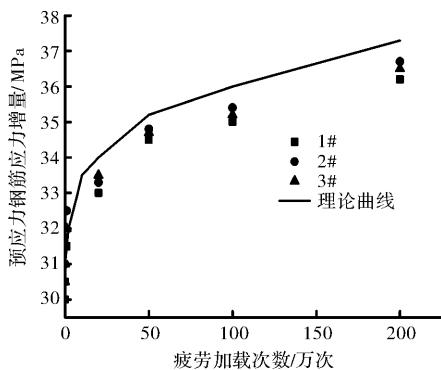


图 11 无粘结筋应力增量

Fig. 11 Unbonded stress increment

从上述对比图可以看出, 理论计算出的受压区 RPC 应变、受拉区普通钢筋应变、预应力钢筋应力增量与实际测量值具有相同的发展趋势, 随着循环加载次数的增多值都在不断的增加。其中普通钢筋应变计算值在 20 万次循环加载后增长速

度比受压区 RPC 应变及预应力筋应力增量增长速度快, 基本呈现线性增长。受压区 RPC 应变在 200 万次循环加载后, 三根试验梁实测平均值与理论计算值的比值为 0.93。在经历  $2 \times 10^6$  次疲劳循环作用后, 受拉钢筋应变及无粘结筋增量计算值与三根试验梁实测平均值的比值分别为 1.10 和 1.04。说明按本文方法进行无粘结预应力 RPC 梁疲劳全过程分析, 在加载后期具有很好的精度。

## 5 结论

(1) 采用钢筋弹性模量及 RPC 疲劳弹性模量作为相应的损伤参量, 通过试验研究, 提出了无粘结预应力 RPC 梁疲劳非线性分析的基本假定, 利用分段线性原理简化疲劳非线性分析过程, 推导出受压区 RPC 残余应变演化方程及其疲劳变形模量方程, 并拟合得到了方程系数。

(2) 推导了无粘结预应力 RPC 梁正截面疲劳应力计算公式, 并将试验结果与理论计算值进行对比, RPC 总应变值的理论计算值与试验值较为接近, 钢筋总应变理论计算值与试验值趋势相一致, 说明本文推导的计算公式基本正确。该方法适用于无粘结预应力 RPC 梁进行疲劳全过程分析, 且具有一定的精度。

## 参考文献 References

- CANBAZ M. The effect of high temperature on reactive powder concrete[J]. Construction & Building Materials, 2014, 70(70):508-513.
- RICHARD P, CHEYREZY M. Composition of reactive powder concretes [J]. Cement & Concrete Research, 1995, 25(7):1501-1511.
- 李莉. 活性粉末混凝土梁受力性能及设计方法研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2010.
- LI Li. Mechanical Behavior and Design Method for Reactive Powder Concrete Beams [J]. Harbin: Harbin Institute of Technology; 2010.
- 陶学康, 王逸, 杜拱辰. 无粘结部分预应力混凝土受弯构件的变形计算 [J]. 建筑结构学报, 1989, 10(1): 20-27.
- TAO Xuekang, WANG Yi, DU Gongchen. Deflection estimation for unbonded prestressed concrete flexural member [J]. Journal of Building Structures, 1989, 10(1): 20-27.
- 刘英超. 无粘结部分预应力矩形截面受弯构件短期刚度的试验研究 [J]. 土木工程学报, 1988, 21(8): 37-46.
- LIU Yingchao. Experimental study on short-term stiff-

- ness of flexural members with unbonded partly prestressed rectangular section [J]. Chinese Journal of Civil Engineering, 1988, 21 (8): 37-46.
- [6] 钱永久, 车惠民. 疲劳荷载作用下无粘结部分预应力混凝土梁的受力行为 [J]. 铁道学报, 1992, 14 (4): 67-74.  
QIAN Yongjiu, CHE Huimin. Stress behavior of unbonded prestressed concrete beams under fatigue load [J]. Journal of China Railway Society, 1992, 14 (4): 67-74.
- [7] 宋永发, 王清湘, 宋玉普. 重复荷载作用下无粘结部分预应力高强混凝土梁正常使用阶段性能研究 [J]. 土木工程学报, 2001, 34(1): 19-23.  
SONG Yongfa, WANG Qingxiang, SONG Yupu. Study on normal performance of unbonded prestressed high strength concrete beams under repeated loading [J]. Chinese Journal of Civil Engineering, 2001, 34 (1): 19-23.
- [8] 赵灿晖, 刘日圣, 江炳章. 重复荷载作用下无粘结部分预应力混凝土梁的抗剪强度 [J]. 中国公路学报, 2000, 13(4): 42-46.  
ZHAO Canhui, LIU Risheng, JIANG Bingzhang. The shear Strength for partially prestressed concrete with unbonded tendons under fatigue Loading [J]. Chinese Journal of Highway Science, 2000, 13 (4): 42-46.
- [9] 宋玉普. 混凝土结构的疲劳性能及设计原理 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2006.  
SONG Yupu. Fatigue performance and design principle of concrete structure [M]. Beijing: Machinery Industry Press, 2006.
- [10] 谢建斌, 何天淳. 循环荷载下路面用钢纤维混凝土的弯曲疲劳研究 [J]. 兰州理工大学学报, 2004, 30 (2): 104-109.  
XIE Jianbin, HE Tianchun. Study on bending fatigue of steel fiber reinforced concrete under cyclic loading [J]. Journal of Lanzhou University of Technology, 2004, 30(2): 104-109.
- [11] 曾志斌, 李之榕. 普通混凝土梁用钢筋的疲劳 S-N 曲线研究 [J]. 土木工程学报, 1999, 32(5): 10-14.  
ZENG Zhibin, LI Zhirong. Investigation flexural fatigue behavior of steel fiber reinforced concrete for pavement surface stratum under cyclic load [J]. Journal of Civil Engineering, 1999, 32 (5): 10-14.
- [12] 马林. 国产 1860 级低松弛预应力钢绞线疲劳性能研究 [J]. 铁道标准设计, 2000, 20(5): 21-23.  
MA Lin. Study on Fatigue Performance of 1860 Low Relaxation Prestressed Steel Strand [J]. Railway Standard Design, 2000, 20 (5): 21-23.
- [13] 冯秀峰. 混合配筋部分预应力混凝土梁疲劳性能研究 [D]. 大连: 大连理工大学, 2005.  
Feng Xiufeng. Study on fatigue behavior of P. P. C Beams with Mixed Reinforcement [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2005.
- [14] 谢里阳, 于凡. 疲劳损伤临界值分析 [J]. 应用力学学报, 1994(3): 57-60.  
XIE Liyang, YU Fan. Finite value analysis of fatigue damage [J]. Journal of Applied Mechanics, 1994 (3): 57-60.
- [15] 郑文忠, 王晓东, 王英. 预应力混凝土梁板中无粘结筋应力增量极限值计算方法研究 [C]//全国混凝土及预应力混凝土学术会议. 长沙: 中国土木工程学会, 2007: 22.  
ZHENG Wenzhong WANG Xiaodong WANG Ying. Study on calculation method of stress increment limit of unbonded tendons in prestressed concrete beam slab [C]//National Conference on Concrete and Prestressed Concrete, Changsha: CCES, 2007: 22.
- [16] 杜进生. 使用荷载下无粘结部分预应力混凝土梁的应力分析 [J]. 土木工程学报, 1998(1): 72-75.  
DU Jinsheng. Stress analysis of unbonded partially prestressed concrete beams under Load [J]. Journal of Civil Engineering, 1998(1): 72-75.
- [17] 叶见曙. 结构设计原理 [M]. 第 3 版. 北京: 人民交通出版社股份有限公司, 2014.  
YE Jianshu. Structural Design Principles [M]. 3rd ed. Beijing: People's Communications Publishing Co., Ltd, 2014.
- [18] 罗许国, 刘岱鑫. 钢筋活性粉末混凝土梁的疲劳性能试验研究 [J]. 西安建筑科技大学学报(自然科学版), 2016, 48(4): 484-488.  
LUO Xuguo, LIU Daixin. Research on the fatigue performance of reinforced reactive powered concrete beam [J]. J. Xi'an Univ. of Arch. & Tech. (Natural Science Edition), 2016, 48 (4): 484-488.

(编辑 桂智刚)