

集中荷载作用下 FRP 圆弧拱的面内非线性弹性失稳研究

张紫祥, 刘爱荣, 钟子林

(广州大学-淡江大学 工程结构灾害与控制联合研究中心, 广东 广州 510006)

摘要: 本文开展了集中荷载作用下 FRP 圆弧拱的面内弹性失稳理论研究, 基于能量变分原理建立了拱的非线性平衡方程, 提出了 FRP 拱修正长细比计算公式, 推导了拱失稳临界荷载解析解. 通过有限元数值解验证了理论公式的正确性, 着重分析了铺层角度、铺层厚度及矢跨比等设计参数对 FRP 拱失稳临界荷载的影响. 研究表明, 铺层方向显著影响拱的失稳临界荷载; 对于单种角度铺层的截面, 保证铺层总厚度不变条件下, 仅增加铺层数量并不会引起失稳临界荷载量值的变化; 拱矢跨比在 $1/10 \sim 1/3$ 范围内变化时, 失稳临界荷载随着矢跨比的增大而增大, 且随着矢跨比的增加, 增长速率逐渐下降.

关键词: FRP; 圆弧拱; 面内; 非线性屈曲; 解析解

中图分类号: TU111.2; TU411

文献标志码: A

文章编号: 1006-7930(2019)02-0230-05

Nonlinear in-plane elastic buckling of FRP circular arch subjected to a central concentrated load

ZHANG Zixiang, LIU Airong, ZHONG Zilin

(Guangzhou University-Tamkang University Joint Research Centre for Engineering Structure Disaster
Prevention and Control, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: This paper presents an analytical investigation of the in-plane elastic buckling of FRP arches subjected to a central concentrated load. The nonlinear buckling equilibrium equation is established based on energy variation principle. A new slenderness ratio formula is further proposed and the theoretical buckling load of FRP circular shallow fixed arch is derived. consequently. Numerical simulation and additional experiment are implemented to verify the accuracy of the analytical solutions derived in this context. A parametric study is then conducted to analyze the effect of ply orientation, laminated thickness, and the rise-span ratio on in-plane buckling critical load for laminated fixed circular shallow arch. It is found that the pavement condition significantly impact the buckling critical load. Increasing the number of layer only will not change the value of the critical load, with the thickness of laminated arch being constant. When the rise-span ratio varies from $1/10$ to $1/3$, the critical load of instability increases with the increase of span ratio, whereas the growth rate decreases with the increase of span ratio.

Key words: FRP; circular arches; in-plane; nonlinear buckling; theoretical solution.

在现代土木工程领域, 纤维增强材料以其高强度、质轻、抗腐蚀等优良性能, 日益成为结构选材的新宠^[1]. 随着纤维增强材料工艺大幅改良, 近年来国际上相继建成了十余座全纤维增强复合材料(FRP)拱桥(见图 1). 其中, 以西班牙 Lleida 跨线人行天桥^[2], 荷兰 Ooypoort 跨河人行单拱桥^[3]及 ApATeCh 俄罗斯公园桥^[4]最为著名. 建筑结构领域, 德国斯图加特大学 ICD/ICKE 研究展厅的弧形外壳, 美国乔布斯剧院圆形碳纤维屋顶, zara 香奈儿展馆玻纤外壁等均利用了 FRP 材料低成本化、可设计的优良特性, 极大的满足了建筑形态多样化的刚性需求^[5-8]. 然而, FRP 虽然能有效减

轻结构自重, 增加跨越能力, 但也加剧了结构失稳的风险. 与蓬勃发展的 FRP 拱形结构的工程应用相比, 目前关于 FRP 拱结构静力稳定性设计理论的研究仍停留在初步阶段, 失稳机理尚不明确, 设计缺乏依据, 无法完全指导工程实际设计.

由于 FRP 材料性能的特殊性, FRP 拱的解析解公式推导过程复杂, 基本上均借助于数值模拟. Luu 等^[9]基于 NURBS 插值等几何法, 开展了考虑剪切变形影响下层合曲梁的弹性失稳数值研究. Fraternali^[10]基于有限元理论, 研究了双模量层合拱的非线性面内、外弹性失稳问题, 分析了拉压模量比对拱后屈曲响应的影响. Sonawane^[11]通过

收稿日期: 2018-10-01

修改稿日期: 2019-03-22

基金项目: 国家自然科学基金项目(No. 51878188); 羊城学者首席科学家项目(1201541551)

第一作者: 张紫祥(1994—), 男, 博士生, 主要从事复合材料拱的稳定性研究. E-mail: zhangzixiang@e.gzhu.edu.cn

通信作者: 刘爱荣(1972—), 女, 教授, 主要从事桥梁结构防灾减灾研究. E-mail: liu-a-r@163.com

试探函数法,开展了集中荷载作用下双层复材圆弧浅拱的非线性屈曲数值研究,给出了失稳临界荷载的近似解析式,但是理论结果与有限元结果存在较大差距. Kim and Chaudhuri^[12]开展了对称铺层条件下圆弧薄拱的后屈曲理论研究,由于未

考虑压弯耦合矩阵,其研究结果适用性大大受限.

本文开展了集中荷载作用下固接 FRP 圆弧拱的面内弹性稳定理论研究,在此基础上提出了新的修正长细比公式以表征层合拱的失稳模式,通过有限元模拟结果验证了理论结果的正确性.



图1 FRP 拱结构的工程应用

Fig. 1 Engineering application of FRP arch structure

1 新解析推导

为便于公式推导,本文引入如下假设:

(1)各铺层之间粘接牢固,形变过程中各层不发生相对滑动.(2)各层近似处于平面应力状态.(3)变形前后直线不变.(4)由于截面宽度 $b \ll$ 弧长 S ,忽略侧向泊松效应.(5)材料在形变过程中保持弹性.(6)满足平截面假定.

拱顶集中荷载作用下的 FRP 拱的力学模型如图 2 所示.本文拟采用 FRP 片材叠合截面,截面高度为 H ,宽度为 B .圆弧拱的开口角为 2φ , v 和 w 分别表示中面处的径向位移和轴向位移, R 是圆弧拱的初始半径, r 是横截面上任意一点 $P(r, \varphi)$ 的坐标值.

综合考虑拱失稳前非线性影响,构建 FRP 圆弧拱在极坐标系下膜应变 ϵ_m 及弯曲应变 ϵ_b 组成的轴向应变表达式^[12-21]:

$$\epsilon = \epsilon_m + \kappa \rho \quad (1)$$

考虑拱失稳前非线性影响计入径向变形一阶导数的平方项,有

$$\begin{aligned} \epsilon_m &= \tilde{w} - \tilde{v} + \frac{1}{2}(\tilde{v}')^2, \\ \kappa &= -\frac{\tilde{v}''}{R} \end{aligned} \quad (2)$$

其中, ϵ_m 是中面应变, κ 为中面曲率,无量纲轴向

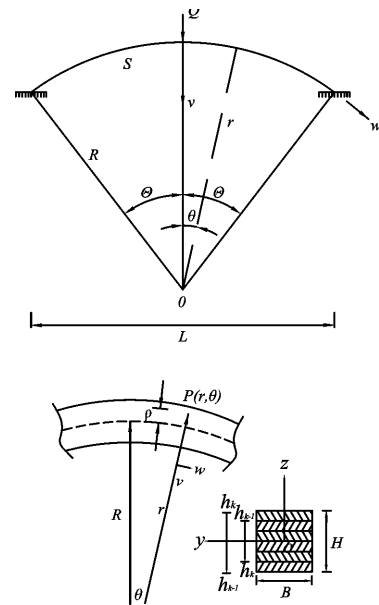


图2 纤维复合材料拱的力学简图(注意边界)

Fig. 2 FRP fixed circular arch subjected to a central concentrated load

及径向位移分别表示为 $\tilde{w} = w/R$, $\tilde{v} = v/R$, $\tilde{w}' = \partial \tilde{w} / \partial \phi$. 根据经典层合理论,非弹性主方向上各层等效弹性模量可表示为^[22]

$$\frac{1}{E_k} = \frac{\cos^4 \theta_k}{E_{11}} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_{11}} \right) \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k + \frac{\sin^4 \theta_k}{E_{22}} \quad (3)$$

其中, E_{11} 为弹性主方向纵向弹性模量, E_{22} 为弹性主方向横向弹性模量, G_{12} 为面内剪切模量, ν_{12} 为纵横泊松比, θ 为纤维布置方向.

由于最小势能原理力学概念清晰, 解法便利, 较易获得收敛的解析解, 因此常被用于解决结构稳定问题. 基于以上优势, 本文构建了拱的变形能和外力势能, 建立了整体结构的势能泛函.

$$\delta W = \int_{-\varphi}^{\varphi} [N\delta\epsilon_m - M\delta\kappa]d\varphi + \int_{-\varphi}^{\varphi} \text{Dirac}(\theta)Q\delta\tilde{v}d\varphi = 0 \quad (4)$$

上式中, FRP 拱的轴力和弯矩可以表示为

$$\begin{Bmatrix} -N \\ M \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} \sigma_k \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} dA_k = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_m \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n E_k b_k \begin{Bmatrix} h_k - h_{k-1}, \\ \frac{1}{2}(h_k^2 - h_{k-1}^2), \\ \frac{1}{3}(h_k^3 - h_{k-1}^3) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

圆弧拱的固接边界条件可表示为

$$\text{当 } \phi = \pm\varphi \text{ 时, } \tilde{w} = \tilde{v} = \tilde{v}' = 0 \quad (7)$$

联立式(5)和式(6), 求解弯矩的二阶导数:

$$M'' = (D - \frac{B^2}{A})\kappa'' = EI_{\text{eff}}\kappa'' \quad (8)$$

将式(8)代入式(4)并进行分部积分, 引入边界条件, 得出集中荷载作用下 FRP 圆拱的径向位移:

$$\begin{aligned} \tilde{v} = & \frac{\cos(\beta) - \cos(\mu\varphi)}{\sin(\beta)} \cdot \frac{\beta}{\mu^2} - \frac{1}{2}(\frac{\beta^2}{\mu^2} - \varphi^2) - \\ & \frac{QR^2}{2\mu^3 EI_{\text{eff}}} \left[\frac{\cos((\beta) - 1)(\cos(\mu\varphi) + 1)}{\sin(\beta)} \right] - \\ & \frac{QR^2}{2\mu^2 EI_{\text{eff}}} \{ (2H(\varphi) - 1)[\sin(\mu\varphi) - \mu\varphi] \} - \\ & \frac{Q\beta R^2}{2\mu^2 EI_{\text{eff}}} \end{aligned} \quad (9)$$

其中, Q 是外部集中荷载, H 为 Heaviside 阶跃函数. μ 和 β 为轴力参数, 定义如下:

$$\mu^2 = \frac{NR^2}{EI_{\text{eff}}}, \beta = \mu\varphi \quad (10)$$

由式(9)可知, 径向位移 \tilde{v} 同时为 N , Q 及 ϕ 的函数, 为了描述荷载与位移关系, 沿拱轴在轴力 N 两侧积分有

$$A_1 P^2 + B_1 P + C_1 = 0 \quad (11)$$

其中,

$$P = \frac{QR^2\varphi}{2EI_{\text{eff}}} = \frac{Q\pi^2}{2N_{E2}\varphi}, N_{E2} = \frac{\pi^2 EI_{\text{eff}}}{(S/2)^2} \quad (12)$$

参数 A_1 , B_1 , C_1 分别为

$$A_1 = \frac{\beta\cos\beta - 3\sin\beta + 2\beta}{2\beta^2(\cos\beta + 1)} \quad (13)$$

$$B_1 = \frac{\sin\beta - \beta}{2\beta^2(\cos\beta + 1)} \quad (14)$$

$$C_1 = \frac{2\beta\cos^2\beta - 3\cos\beta\sin\beta + \beta}{12\beta\sin^2\beta} + \frac{\beta^2}{\lambda^2} \quad (15)$$

拱的修正长细比及等效回转半径定义为

$$\lambda = \frac{R\varphi^2}{r_{\text{eff}}} = \frac{S\varphi}{r_{\text{eff}}} \quad (16)$$

$$r_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{EI_{\text{eff}}}{EA}} = \sqrt{\frac{D - (B^2/A)}{A}} \quad (17)$$

平衡路径线上的极值点可由式(11)对 β 求微分得出, 即

$$A_2 P^2 + B_2 P + C_2 = 0 \quad (18)$$

其中,

$$A_2 = \frac{\partial A_1}{\partial \beta}, B_2 = \frac{\partial B_1}{\partial \beta}, C_2 = \frac{\partial C_1}{\partial \beta} \quad (19)$$

2 数值验证

为了验证解析公式的正确性, 本文采用 ANSYS 软件中 Shell 181 单元建立图 3 所示的有限元模型. 表 1 给出了有限元模型采用的材料特性. 通过设置 Tsai-Wu 失效准则, 较为精确地模拟了 FRP 圆弧拱模型的非线性弹性失稳, 跟踪了拱的失稳平衡路径曲线.

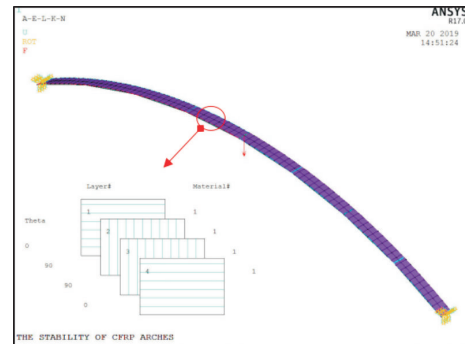


图 3 FRP 圆弧拱有限元模型

Fig. 3 FE Model of FRP arches

表 1 T300B/WP2300 型纤维复合材料特性表

Tab. 1 Material properties of the laminates

材料特性	E_1/GPa	E_2/GPa	G_{12}/GPa	ν_{12}
	130	8.7	4.3	0.320

图 4(a)和图 4(b)分别描绘了拱顶及 1/4 弧长处的无量纲荷载与位移关系曲线. 图 4(a)所示, 固接 FRP 圆弧拱的非线性平衡路径曲线可以分成 oa, ab 和 bc 三个分支. 加载初期, 无量纲拱顶位移 v/f 沿路径线 oa 随无量纲荷载 $Q/2N_c\varphi$ 的增大而增大, 抵达上极值点 a 后圆弧拱失稳, 拱轴内部产生力差, 无量纲位移 v/f 沿路径线 ab 随无量纲荷载 $Q/2N_c\varphi$ 减小继续增长; 当荷载减小至下极值

点 b 时,圆弧拱重新具备承载能力,无量纲荷载 $Q/2N_{\varphi}$ 随着无量纲拱顶径向位移 v/f 的增大,沿平衡路径线 bc 再次增大.图4(a)及4(b)表明,理论推导结果与有限元模拟结果基本吻合,推导得出的失稳临界荷载的解析式可以较为准确地描述FRP圆弧拱的失稳形式.

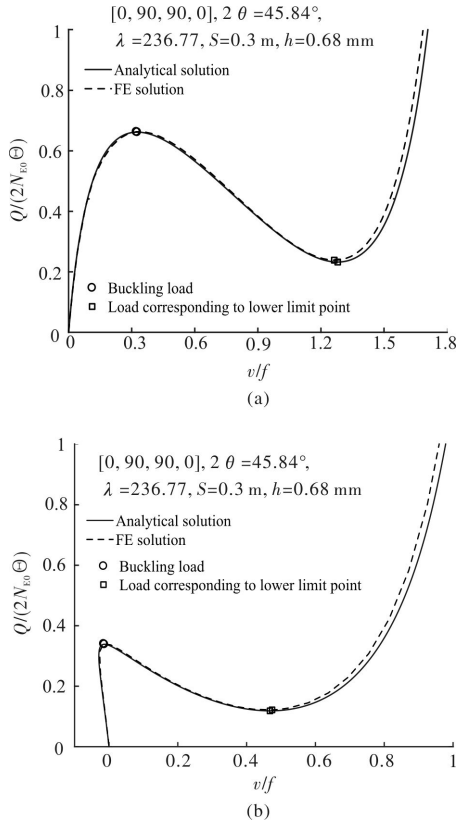


图4 有限元与理论对比图

Fig. 4 Comparison of FE and theoretical result

为了研究铺层角度对失稳临界荷载的影响,本文设计了铺层工况.以四层等厚铺层为例(见图5a),任意选择某层布置90度铺层,其余各层布置0度铺层并绘出无量纲轴力—荷载曲线.由图可知,固定边界条件下,铺层 $[0, 90, 0, 0]$ 与 $[0, 0, 90, 0]$ 承载能力相当,铺层 $[90, 0, 0, 0]$ 与 $[0, 0, 0, 90]$ 的承载能力亦相等.然而,比较铺层 $[0, 90, 0, 0]$ 及 $[0, 0, 0, 90]$ 可以发现,90度铺层位置显著影响拱的失稳临界荷载.

为了进一步研究铺层角度分布情况对失稳临界荷载的影响,本文设计了第二类铺层工况,即设定四层等厚铺层,其中两层为90度铺层,其余两层为0度铺层,该铺层条件涵盖了正对称铺层、反对称铺层及不对称铺层三类典型铺层方式.图5(b)为各铺层情况下无量纲荷载—位移的关系曲线.可以发现,对称铺层 $[0, 90, 90, 0]$ 的屈曲临界荷载最高,铺层 $[90, 0, 0, 90]$ 的临界荷载

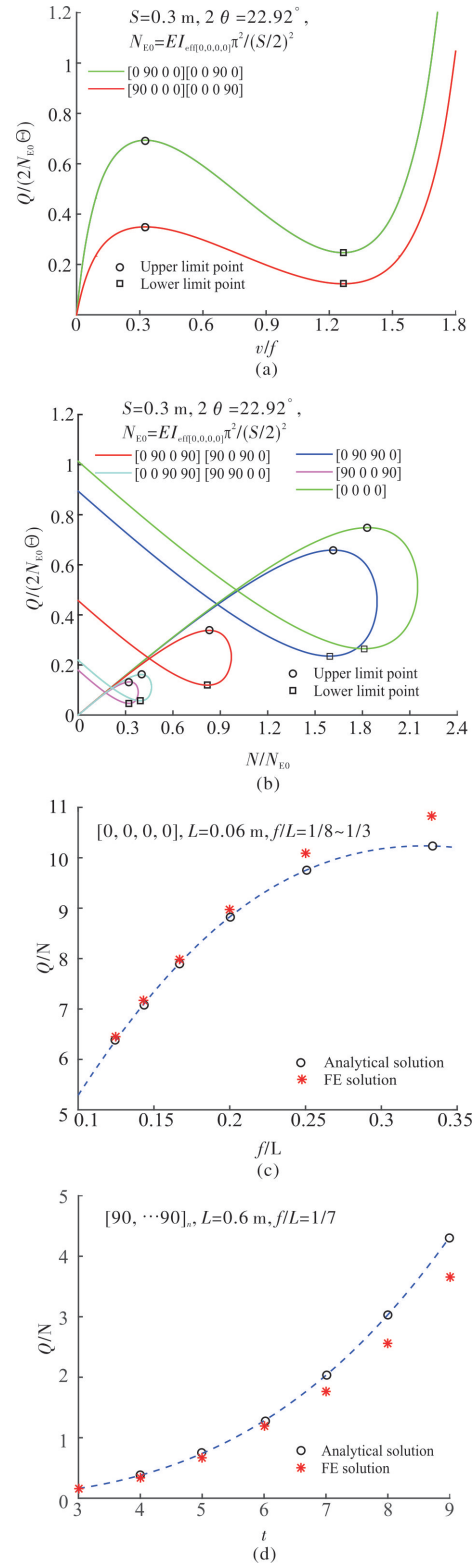


图5 铺层角度、铺层厚度及矢跨比对失稳临界荷载的影响
Fig. 5 The effects of ply-orientation, ply-thickness, and rise-span ratios on the buckling load of FRP arch

最低;反对称铺层 $[0, 90, 0, 90]$ 及不对称铺层 $[0, 0, 90, 90]$ 的失稳临界荷载适中,二者差异并不显著. FRP拱能够通过改变铺层的布置方式,实现对结构承载能力的主动控制,从而满足不同的工程需求.例如,在机械工程领域,FRP拱的跳

跃屈曲常被用于制造变阻尼装置、微型阀门及精密传感器等机敏结构。

本文还开展了矢跨比及铺层厚度对失稳临界荷载的影响研究。图5(c)显示, FRP拱的失稳临界荷载随矢跨比的增大而增大, 且随着矢跨比的增大, 增长速率逐渐下降。有限元结果表明, 对于矢跨比小于1/4的FRP拱, 本文提出的解析式可以较为准确的预测FRP拱的失稳临界荷载。由图5(d)可知, FRP拱的失稳临界荷载随着铺层厚度的增加而增加, 其增长速率亦逐渐增大。表2分析了铺层数目对单种角度铺层拱的失稳临界荷载的影响。在铺层总厚度不变条件下, 增加铺层数量不会引起单种角度拱的失稳临界荷载量值的变化。

表2 铺层数量对失稳临界荷载的影响

Tab. 2 The effects of layers on the buckling load

层方式	铺层总厚/mm	铺层数目	屈曲临界荷载/N
[0] _n	0.68	2	8.970
		4	8.970
[90] _n	0.68	2	0.605
		4	0.605

3 结语

本文开展了集中荷载作用下固接FRP圆拱的面内弹性稳定的理论研究, 并通过有限元模型验证了理论结果的正确性。研究结果表明, 90度铺层位置显著影响拱的失稳临界荷载, 对称铺层[0, 90, 90, 0]与[90, 0, 0, 90]铺层条件下的失稳临界荷载差异十分明显。此外, 本文还研究了铺层厚度(3~9层)及矢跨比(1/10~1/3范围内)对失稳临界荷载的影响。研究发现, FRP拱的失稳临界荷载随着铺层厚度的增加而增加, 且其增长速率亦逐渐增大; 对于单种角度布置的截面, 在保证铺层总厚度不变条件下, 仅增加铺层数量并不会引起失稳临界荷载量值的变化。FRP拱失稳临界荷载随矢跨比的增大而增大, 其随着矢跨比的增加, 增长速率逐渐下降。

参考文献 References

- [1] MYERS G J. Composite structure design[M]. New jersey, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1978. 4.
- [2] SOBRINO J A, PULIDO M. Towards advanced composite material footbridges[J]. Structural Engineering International, 2002, 12(2): 84-86.
- [3] ŁUKASZ Pyrzowski, MISKIEWICZ M. Modern GFRP composite footbridges[C]// Environmental En-

- gineering. 10th International Conference, Wilno: Vilnius Gediminas Technical University, 2017.
- [4] USHAKOV A, KLENIN Y, OZEROV S. Development of modular arched bridge design[C]// Proceedings of 5th International Engineering and Construction Conference (IECC 5). USA: CA, Irvine, 2008: 95-101.
- [5] 叶列平, 冯鹏. FRP在工程结构中的应用与发展[J]. 土木工程学报, 2006, 39(3): 24-36.
YE L, FENG P. Applications and development of fiber-reinforced polymer in engineering structures[J]. China Civil Engineering Journal, 2006, 39(3): 24-36.
- [6] 冯鹏. 复合材料在土木工程中的发展与应用[J]. 玻璃钢/复合材料, 2014(9): 99-104.
FENG P. Development and application of composite in Civil engineering[J]. FRP / CM, 2014(9): 99-104.
- [7] 冯鹏, 叶列平, 金飞飞, 等. FRP桥梁结构的受力性能与设计方法[J]. 玻璃钢/复合材料, 2011(5): 12-19.
FENG P, YE L, JIN F, et al. Mechanical behaviors and design methods of FRP bridge structures [J]. FRP/CM, 2011(5): 12-19.
- [8] LUU A T, KIM N I, LEE J. Bending and buckling of general laminated curved beams using NURBS-based isogeometric analysis [J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2015, 54: 218-231.
- [9] FRATERNALI F, SPADEA S, ASCIONE L. Buckling behavior of curved composite beams with different elastic response in tension and compression[J]. Composite Structures, 2013, 100: 280-289.
- [10] SONAWANE M. Buckling analysis of singly curved shallow bilayered arch under concentrated loading[D]. State of Texas: Texas A & M University, 2010.
- [11] KIM D, Chaudhuri R A. Postbuckling behavior of symmetrically laminated thin shallow circular arches [J]. Composite Structures, 2009, 87(1): 101-108.
- [12] LIU A, BRADFORD M A, PI Y L. In-plane nonlinear multiple equilibria and switches of equilibria of pinned-fixed arches under an arbitrary radial concentrated load[J]. Archive of Applied Mechanics, 2017, 87(11): 1909-1928.
- [13] PI Y L, BRADFORD M A, LIU A. Nonlinear equilibrium and buckling of fixed shallow arches subjected to an arbitrary radial concentrated load[J]. International Journal of Structural Stability & Dynamics, 2017, 17(8): 1750082.
- [14] LIU A, YANG Z, LU H, et al. Experimental and analytical investigation on the in-plane dynamic instability of arches owing to parametric resonance[J]. Journal of Vibration & Control, 2017(1): 107754631772621.
- [15] LIU A, LU H, PI Y L, et al. Out-of-plane parametric resonance of arches under an in-Plane central Harmonic load[J]. Singapor and Hangzhou: Springer Nature Singapore Pte. Ltd and Zhejiang University Press, 2018.

(下转第258页)

- CHEN Zhengfeng. Research on design of guest room for a star grade Hotel[J]. Industrial Construction, 2007, 37(S1):67-71.
- [11] 王方戟. 四步关联—建筑分析及设计的方法[J]. 建筑学报, 2018(8):107-110.
WANG Fangji. Four-step association: The method of architectural analysis and design[J]. Architectural Journal, 2018(8):107-110.
- [12] 李保峰, 丁建民, 徐昌顺, 等. 设计结合自然—恩施大峡谷聚落式度假酒店设计的传承与创新. 中国园林, 2018, (8):39-44.
LI Baofeng, DING Jianmin, XU Changshun, et al. Design with nature: Enshi Grand Canyon settlement resort hotel design of inheritance and innovation. China garden, 2018(8): 39-44.
- [13] 罗文兵, 李跃虹, 艾茗, 等. 探索地域文化的现代建筑表现手段——丽江悦榕酒店设计随想[J]. 建筑学报, 2009(11):43.
LUO Wenbing, LI Yuehong, AI Ming, et al. Exploration of modern architecture with regional culture means: Design of Lijiang Yuerong Hotel[J]. Architectural Journal, 2009(11):43.
- [14] 隈研吾. 自然的建筑[M]. 陈菁, 译. 济南: 山东人民出版社, 2010:66-67.
KENGO Kuma. Natural architecture [M]. CHEN Jing, Translated. Jinan: Shandong People's Press, 2010:66-67.
- [15] 陈圣疆, 林从华, 杜峰. 福州传统民居与当代建筑的创作探索[J]. 华中建筑, 2013(4):20-22.
CHEN Shengjiang, LIN Conghua, DU Feng. Study on the design of traditional civilian residential housing and modern architecture of Fuzhou city[J]. Huazhong Architecture, 2013(4):20-22.
- [16] 顾震弘, 韩冬青. 面向普通建筑的绿色设计策略——镇江丹徒高新园区信息中心设计[J]. 建筑学报, 2012(10):5-12.
GU Zhenhong, HAN Dongqing. Green design strategy for general architecture: Information Center Design of Dantu hitech Park in Zhenjiang[J]. Architectural Journal, 2012(10):5-12.

(编辑 沈 波)

(上接第 234 页)

- [16] LIU A, LU H, PI Y L, et al. Out-of-Plane Parametric Resonance of Arches Under an In-Plane Central Harmonic Load [M]//Environmental Vibrations and Transportation Geodynamics. Singapore: Springer 2018:45-51.
- [17] LIU A, LU H, FU J, et al. Lateral-torsional buckling of fixed circular arches having a thin-walled section under a central concentrated load[J]. Thin-Walled Structures, 2017, 118:46-55.
- [18] LIU A, LU H, FU J, et al. Lateral torsional buckling of circular steel arches under arbitrary radial concentrated load [J]. Journal of Structural Engineering, 2017, 143(9):1-13.
- [19] DENG J, LIU A, HUANG P, et al. Interfacial mechanical behaviors of RC beams strengthened with FRP [J]. Structural Engineering & Mechanics, 2016, 58(3):577-596.
- [20] 刘爱荣, 李晶, 黄永辉. 拱的静动力稳定性研究进展[J]. 广州大学学报(自然科学版), 2016, 15(5):1-12.
LIU A, LI J, HUANG Y, et al. Research progress on static and dynamic stability of arches[J]. Journal of Guangzhou University (Natural Science Edition), 2016, 15(5):1-12.
- [21] HUANG Y, YANG Z, LIU A, et al. Nonlinear buckling analysis of functionally graded graphene reinforced composite shallow arches with elastic rotational constraints under uniform radial load[J]. Materials, 2018, 11(6): 910.
- [22] Gibson R F. Principles of Composite Material Mechanics[M]. 4th ed. Boca Raton USA: CRC Press, Taylor and Francis, 2011.

(编辑 沈 波)