

动力固结问题的弱形式求积元分析

王 东¹, 袁 帅², 张森豪², 司晓东², 周容名²

(1. 山西省交通规划勘察设计院有限公司, 山西 太原 030032; 2. 长安大学 公路学院, 陕西 西安 710064)

摘要: 弱形式求积元法是一种新型的高阶方法, 已经在岩土及结构分析中取得了成功的应用, 本文对该方法进行进一步的发展和完善, 将其应用于饱和土动力固结分析. 首先基于 Biot 饱和土波动理论框架, 以孔隙水压力和土体骨架位移为基本控制变量, 建立饱和土波动问题控制方程弱形式描述, 然后应用 Lobatto 积分和微分求积法进行数值积分和数值微分并采用 Newmark 方法进行时域逐步积分, 建立饱和土波动问题求积元法求解列式. 通过数值算例验证了本文方法的正确性, 显示了方法的计算效率.

关键词: 弱形式求积元法; 饱和土; Biot 动力固结理论

中图分类号: TU433

文献标志码: A

文章编号: 1006-7930(2020)02-0222-05

Dynamic consolidation analysis by the weak form quadrature element method

WANG Dong¹, YUAN Shuai², ZHANG Senhao², SI Xiaodong², ZHOU Rongming²

(1. The Communications Planning Surveying and Designing Institute of Shanxi Province, Taiyuan 030012, China;

2. School of Highway, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract: The weak form quadrature element method is a novel high order algorithm applied successfully in structural and geotechnical engineering. In the present study, it is reformulated for dynamic consolidation analysis of saturated soils. Based on Biot's theory of dynamic consolidation, the pore pressure and soil displacement are chosen to be the control variables to establish the weak form governing equations. Then the Lobatto integration rule and the differential quadrature method are employed respectively to numerically integrate and differentiate the weak form governing equations, and the Newmark scheme is used for time integration. The established formulation is verified by numerical examples and its efficiency is highlighted.

Key words: the weak form quadrature element method; saturated soils; Biot's theory of dynamic consolidation

固结问题求解是土力学中的一个经典课题, 涉及到土体渗流和变形的耦合, 在岩土工程中得到了广泛的应用. 由于传统问题的复杂性, 固结方程尤其是考虑惯性影响的动力固结方程的解析解一般无法得到, 通常采用数值方法对其进行近似求解. 常用的数值方法有有限单元法^[1-2] (Finite element method, FEM)、边界单元法^[3-4]、无网格法^[5]、有限差分法^[6]和微分求积法^[7-8]等. 上述数值方法已经被应用于求解动力固结问题, 而且取得了丰富的研究成果. 然而, 这些低阶方法仍然存在一些难以改善的缺陷: 方法中使用的低阶线性插值使得波动周期被数值延长, 幅值被数值衰减, 数值方法得到的波速和实际波速具有较大差别, 即所谓的数值弥散误差和数值耗散误差, 并且误差会随着时间的积累不断增大, 使得数值结果变得非常不可靠.

弱形式求积元法 (Weak form quadrature element method, QEM) 简称求积元法^[9-14], 是一种新型高阶算法, 该方法结合了弱形式描述和微分求积法的特点, 具有全域近似的性质, 结果精度高, 收敛速度快, 能够大大减小问题计算规模. 可以通过增加单元的阶次来提高结果的计算精度, 无需重新划分网格, 降低了前处理成本. 计算结果具有很高的连续性, 积分点与结点重合, 结果的后处理也比较简单. 求积元法首先对问题泛函进行数值积分, 然后对结点导数进行微分求积近似, 得到求解问题的代数方程. 求积元法自提出以来, 在结构以及岩土力学分析中取得了成功的应用, 显示出了其独特的优势. 本文对该方法进行进一步的发展和完善, 将其应用于饱和土动力固结分析, 可以有效克服动力问题求解中的数值弥散和数值耗散, 大大提高数值方法的计算效率.

收稿日期: 2019-01-21

修改稿日期: 2020-03-25

基金项目: 陕西省自然科学基金基础研究计划基金资助(2018JQ5098)

第一作者: 王 东(1982—), 男, 高级工程师, 主要从事工程设计及计算研究. E-mail: 94794161@qq.com

首先基于 Biot 饱和土波动理论框架^[15], 以孔隙水压力和土体骨架位移为基本控制变量, 建立饱和土波动问题控制方程弱形式描述, 然后应用 Lobatto 积分和微分求积法进行数值积分和数值微分并采用 Newmark 方法进行时域逐步积分, 建立饱和土波动问题求积元法求解列式. 最后通过数值算例验证了本文方法的正确性, 显示了方法的计算效率.

1 动力固结问题控制方程

假定孔隙水压力 p_w 以压为正, 应力 σ , 应变 ε 以拉为正. Biot 动力固结理论的基本方程为

$$\left(\frac{\alpha-n}{K_s} + \frac{n}{K_w}\right)\dot{p}_w + \alpha \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} + \nabla \cdot \dot{\mathbf{w}}_w = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{L}^T \sigma + \rho \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = 0 \quad (2)$$

其中: \mathbf{b} 为体力, α 为比奥系数, K_w, K_s 分别指的是孔隙流体和土体颗粒的体积压缩模量, n 为孔隙率, \mathbf{u} 为土体骨架位移, $\dot{\mathbf{w}}_w$ 为孔隙流体流动的达西流速, \mathbf{L} 为微分算子, ρ 为土体密度. 引入有效应力原理:

$$\sigma = \sigma' - \alpha m p_w \quad (3)$$

其中 σ' 为有效应力, 辅助向量 \mathbf{m} 在三维与平面应变条件下分别为 $\mathbf{m} = \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$ 及 $\mathbf{m} = \{1 \ 1 \ 0\}^T$. 广义达西定理为:

$$\dot{\mathbf{w}}_w = \mathbf{k}_w (-\nabla p_w + \rho_w \mathbf{b} - \rho_w \ddot{\mathbf{u}}) \quad (4)$$

\mathbf{k}_w 为渗透系数矩阵, ρ_w 为孔隙流体密度. 平衡方程的弱形式可以由虚功方程得到, 即

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV + \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma' dV \\ & - \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \alpha m p_w dV = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \rho \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{T} dS \end{aligned} \quad (5)$$

其中, \mathbf{T} 为面力. 同样, 连续性方程的弱形式描述为

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\nabla \delta p_w)^T \rho_w \mathbf{k}_w \ddot{\mathbf{u}} dV + \int_{\Omega} \delta p_w \alpha m \dot{\varepsilon} dV \\ & + \int_{\Omega} \delta p_w \left(\frac{\alpha-n}{K_s} + \frac{n}{K_w}\right) \dot{p}_w dV \\ & + \int_{\Omega} (\nabla \delta p_w)^T \mathbf{k}_w \nabla p_w dV \\ & = \int_{\Omega} (\nabla \delta p_w)^T \rho_w \mathbf{k}_w \mathbf{b} dV - \int_{\Gamma_{qw}} \delta p_w \dot{\mathbf{w}}_{wm} dS \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $\dot{\mathbf{w}}_{wm}$ 为边界达西流速.

2 弱形式求积元法求解列式

和常规有限元法不同, 弱形式求积元法首先对弱形式平衡方程进行数值积分, 然后针对积分后的方程进行数值微分, 最终转换为线性代数方程组的形式进行求解. 首先对(5)式进行数值积分:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N_{\xi}} \sum_{j=1}^{N_{\eta}} \sum_{k=1}^{N_{\zeta}} W_i W_j W_k \delta \mathbf{u}_{ijk}^T \rho \ddot{\mathbf{u}}_{ijk} |\mathbf{J}|_{ijk} + \\ & \sum_{i=1}^{N_{\xi}} \sum_{j=1}^{N_{\eta}} \sum_{k=1}^{N_{\zeta}} W_i W_j W_k \delta \varepsilon_{ijk}^T \sigma'_{ijk} |\mathbf{J}|_{ijk} - \\ & \sum_{i=1}^{N_{\xi}} \sum_{j=1}^{N_{\eta}} \sum_{k=1}^{N_{\zeta}} W_i W_j W_k \delta \varepsilon_{ijk}^T \alpha m p_{w,ijk} |\mathbf{J}|_{ijk} \quad (7) \\ & = \sum_{i=1}^{N_{\xi}} \sum_{j=1}^{N_{\eta}} \sum_{k=1}^{N_{\zeta}} W_i W_j W_k \delta \mathbf{u}_{ijk}^T |\mathbf{J}|_{ijk} \rho \mathbf{b}_{ijk} + \\ & \sum_{m=1}^{N_S} \sum_{i=1}^{N_{m1}} \sum_{j=1}^{N_{m2}} W_i W_j |\mathbf{J}|_{ij} \delta \mathbf{u}_{ij}^T \mathbf{T}_{ij} \end{aligned}$$

其中: W_i, W_j 和 W_k 是积分权系数, N_{ξ}, N_{η} 和 N_{ζ} 是单元坐标轴方向上的积分点个数, N_S 是指定面力边界条件的边界面个数, $|\mathbf{J}|$ 和 $|\mathbf{J}|$ 是单元内和边界上的雅克比行列式. 在弱形式求积元法中, 通常采用 Lobatto 积分. 然后引入如下变换:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_{ij}^T &= \delta \mathbf{d}^T \mathbf{D}_{ij}^q, p_{w,ijk} = \mathbf{G}_{ijk} p_w^e \\ \varepsilon_{ijk} &= \mathbf{B}_{ijk} \mathbf{d}^e, \mathbf{u}_{ijk} = \mathbf{D}_{ijk}^f \mathbf{d}^e \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\mathbf{D}_{ij}^q, \mathbf{G}_{ijk}, \mathbf{D}_{ijk}^f$ 为相应的联系矩阵, \mathbf{d}^e 为单元结点位移矢量, p_w^e 为单元孔压矢量, \mathbf{B} 为应变矩阵, 可由微分求积法得到, 具体可参考[1]. 继续整理后得到

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_u^e \ddot{\mathbf{d}}^e + \mathbf{K}_u^e \mathbf{d}^e - \mathbf{Q}_w^e p_w^e = \mathbf{F}_u^e \\ \mathbf{M}_u^e &= \sum_{i=1}^{N_{\xi}} \sum_{j=1}^{N_{\eta}} \sum_{k=1}^{N_{\zeta}} W_i W_j W_k \mathbf{D}_{ijk}^f \rho |\mathbf{J}|_{ijk} \mathbf{D}_{ijk}^{fT} \\ \mathbf{K}_u^e &= \sum_{i=1}^{N_{\xi}} \sum_{j=1}^{N_{\eta}} \sum_{k=1}^{N_{\zeta}} W_i W_j W_k \mathbf{B}_{ijk}^T \mathbf{E}_{ijk} \mathbf{B}_{ijk} |\mathbf{J}|_{ijk} \\ \mathbf{Q}_w^e &= \sum_{i=1}^{N_{\xi}} \sum_{j=1}^{N_{\eta}} \sum_{k=1}^{N_{\zeta}} W_i W_j W_k \mathbf{B}_{ijk}^T \alpha m |\mathbf{J}|_{ijk} \mathbf{G}_{ijk} \\ \mathbf{F}_u^e &= \sum_{i=1}^{N_{\xi}} \sum_{j=1}^{N_{\eta}} \sum_{k=1}^{N_{\zeta}} W_i W_j W_k \delta \mathbf{u}_{ijk}^T |\mathbf{J}|_{ijk} \rho \mathbf{b}_{ijk} \\ & + \sum_{m=1}^{N_S} \sum_{i=1}^{N_{m1}} \sum_{j=1}^{N_{m2}} W_i W_j |\mathbf{J}|_{ij} \delta \mathbf{u}_{ij}^T \mathbf{T}_{ij} \end{aligned} \quad (9)$$

其中, \mathbf{E}_{ijk} 为弹性矩阵. 然后对流体连续性方程进行数值积分:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{N_\xi} \sum_{j=1}^{N_\eta} \sum_{k=1}^{N_\zeta} W_i W_j W_k |J|_{ijk} (\nabla \delta p_w)_{ijk}^T \rho_w k_{wijk} \ddot{u}_{ijk} \\
& + \sum_{i=1}^{N_\xi} \sum_{j=1}^{N_\eta} \sum_{k=1}^{N_\zeta} W_i W_j W_k |J|_{ijk} \delta p_{wijk} \alpha_{ijk} m \dot{\epsilon}_{ijk} \\
& \sum_{i=1}^{N_\xi} \sum_{j=1}^{N_\eta} \sum_{k=1}^{N_\zeta} W_i W_j W_k |J|_{ijk} \delta p_{wijk} \left(\frac{\alpha - n}{K_s} + \frac{n}{K_w} \right)_{ijk} \dot{p}_{wijk} \\
& + \sum_{i=1}^{N_\xi} \sum_{j=1}^{N_\eta} \sum_{k=1}^{N_\zeta} W_i W_j W_k |J|_{ijk} (\nabla \delta p_w)_{ijk}^T k_{wijk} \nabla p_{wijk} \\
& = \sum_{i=1}^{N_\xi} \sum_{j=1}^{N_\eta} \sum_{k=1}^{N_\zeta} W_i W_j W_k |J|_{ijk} (\nabla \delta p_w)_{ijk}^T \rho_w k_{wijk} b_{ijk} \\
& - \sum_{m=1}^{N_S} \sum_{i=1}^{N_{m1}} \sum_{j=1}^{N_{m2}} W_i W_j |\bar{J}|_{ij} \delta p_{wij} \dot{w}_{wimj}
\end{aligned} \quad (10)$$

由微分求积法可将孔压梯度表示为

$$(\nabla p_w)_{ijk} = \mathbf{Z}_{ijk} \mathbf{p}_w^e \quad (11)$$

继续整理后可得:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{M}_u \ddot{\mathbf{d}}^e + \mathbf{Q}_w^T \dot{\mathbf{d}}^e + \mathbf{C}_{ww} \dot{\mathbf{p}}_w^e + \mathbf{H}_{ww} \mathbf{p}_w^e = \mathbf{F}_w^e \\
& \mathbf{M}_w^e = \sum_{i=1}^{N_\xi} \sum_{j=1}^{N_\eta} \sum_{k=1}^{N_\zeta} W_i W_j W_k |J|_{ijk} \mathbf{Z}_{ijk}^T \rho_w k_{wijk} \mathbf{D}_{ijk}^{fT} \\
& \mathbf{Q}_w^{eT} = \sum_{i=1}^{N_\xi} \sum_{j=1}^{N_\eta} \sum_{k=1}^{N_\zeta} W_i W_j W_k |J|_{ijk} \mathbf{G}_{ijk}^T \alpha_{ijk} m^T \mathbf{B}_{ijk} \\
& \mathbf{C}_{ww}^e = \sum_{i=1}^{N_\xi} \sum_{j=1}^{N_\eta} \sum_{k=1}^{N_\zeta} W_i W_j W_k |J|_{ijk} \mathbf{G}_{ijk}^T c_{wijk} \mathbf{G}_{ijk} \\
& \mathbf{H}_{ww}^e = \sum_{i=1}^{N_\xi} \sum_{j=1}^{N_\eta} \sum_{k=1}^{N_\zeta} W_i W_j W_k |J|_{ijk} \mathbf{Z}_{ijk}^T k_{wijk} \mathbf{Z}_{ijk} \\
& \mathbf{F}_w^e = \sum_{i=1}^{N_\xi} \sum_{j=1}^{N_\eta} \sum_{k=1}^{N_\zeta} W_i W_j W_k |J|_{ijk} \mathbf{Z}_{ijk}^T \rho_w k_{wijk} b_{ijk} - \\
& \sum_{m=1}^{N_S} \sum_{i=1}^{N_{m1}} \sum_{j=1}^{N_{m2}} W_i W_j |\bar{J}|_{ij} \mathbf{D}_{ij}^w \dot{w}_{wimj}
\end{aligned} \quad (12)$$

在所有单元上对式(9)和(12)进行集成,可以得到总体控制方程为

$$\mathbf{M}_u \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}_u \mathbf{d} - \mathbf{Q}_w \mathbf{p}_w = \mathbf{F}_u \quad (13)$$

$$\mathbf{M}_w \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{Q}_w^T \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}_{ww} \dot{\mathbf{p}}_w + \mathbf{H}_{ww} \mathbf{p}_w = \mathbf{F}_w$$

采用 NEWMARK 方法对时间项进行直接积分:

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{d}}^{n+1} &= a_0 (\mathbf{d}^{n+1} - \mathbf{d}^n) - a_2 \dot{\mathbf{d}}^n - a_4 \ddot{\mathbf{d}}^n \\
\dot{\mathbf{d}}^{n+1} &= a_1 (\mathbf{d}^{n+1} - \mathbf{d}^n) - a_3 \dot{\mathbf{d}}^n - a_5 \ddot{\mathbf{d}}^n \\
\dot{\mathbf{p}}_w^{n+1} &= a_1' (\mathbf{p}_w^{n+1} - \mathbf{p}_w^n) - a_3' \dot{\mathbf{p}}_w^n
\end{aligned} \quad (14)$$

式中,上标表示时间步,其他参数为

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1/\beta \Delta t^2, a_1 = \gamma/\beta \Delta t, a_2 = 1/\beta \Delta t, \\
a_3 &= \gamma/\beta - 1, a_4 = 1/2\beta - 1, \\
a_5 &= (1/2\beta - 1)\Delta t, a_1' = 1/\theta \Delta t, a_3' = 1/\theta - 1
\end{aligned} \quad (15)$$

其中, $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, γ, β, θ 为计算常数. 积分后得到动力固结问题的迭代格式为

$$\begin{aligned}
& (a_0 \mathbf{M}_u + \mathbf{K}_u) \mathbf{d}^{n+1} - \mathbf{Q}_w \mathbf{p}_w^{n+1} \\
& = \mathbf{F}_u^{n+1} + a_0 \mathbf{M}_u \mathbf{d}^n + a_2 \mathbf{M}_u \dot{\mathbf{d}}^n + a_4 \mathbf{M}_u \ddot{\mathbf{d}}^n \\
& (a_0 \mathbf{M}_w + a_1 \mathbf{Q}_w^T) \mathbf{d}^{n+1} + (a_1' \mathbf{C}_{ww} + \mathbf{H}_{ww}) \mathbf{p}_w^{n+1} \\
& = \mathbf{F}_w^{n+1} + (a_0 \mathbf{M}_w + a_1 \mathbf{Q}_w^T) \mathbf{d}^n + (a_2 \mathbf{M}_w + a_3 \mathbf{Q}_w^T) \dot{\mathbf{d}}^n \\
& + (a_4 \mathbf{M}_w + a_5 \mathbf{Q}_w^T) \ddot{\mathbf{d}}^n + a_1' \mathbf{C}_{ww} \mathbf{p}_w^n + a_3' \mathbf{C}_{ww} \dot{\mathbf{p}}_w^n
\end{aligned} \quad (16)$$

(16)式即为求解动力固结问题的迭代过程. 给定初始和边界条件后即可得到固结过程中固体骨架位移和孔隙水压力的变化.

3 数值算例

3.1 单相材料一维波动问题

首先研究如图 1 所示的一维波动问题,简化起见,本算例不考虑孔隙水压力的影响,假定材料为单相固体材料. 土体的底部完全约束,左右两侧约束水平方向位移,顶部受到均布正弦力的作用为 MPa.

$$F_0 = 100 \times \sin(80\pi t) \quad (17)$$

计算土体中波动传播过程. 土体的弹性模量为 10 MPa,泊松比为 0.3. 选用了 10 个均匀划分的求积元单元进行模拟,同时,为了与有限元结果对比,使用线性有限元单元计算该问题. 图 1 所示为一维单相材料的条件下土体中点处竖向位移计算结果对比,其中求积元法中的 n7 表示竖向取 7 个

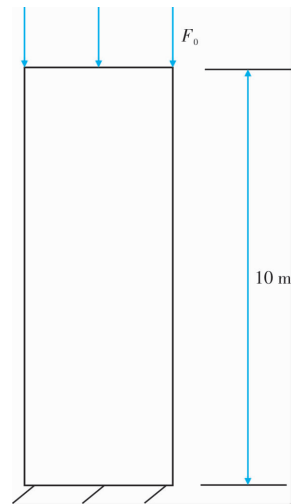


图 1 单相材料波动问题示意图

Fig. 1 Wave in the single phase material

积分点,依次类推.从对比中可以看到,在波动传播的早期,有限元与求积元的计算精度都比较高,随着时间的积累,有限元方法的计算误差逐

渐增大,当时间为1 s时,求积元的计算效率要大大高于有限元方法,这就证明了求积元方法在计算波动问题时具有较高的计算效率.

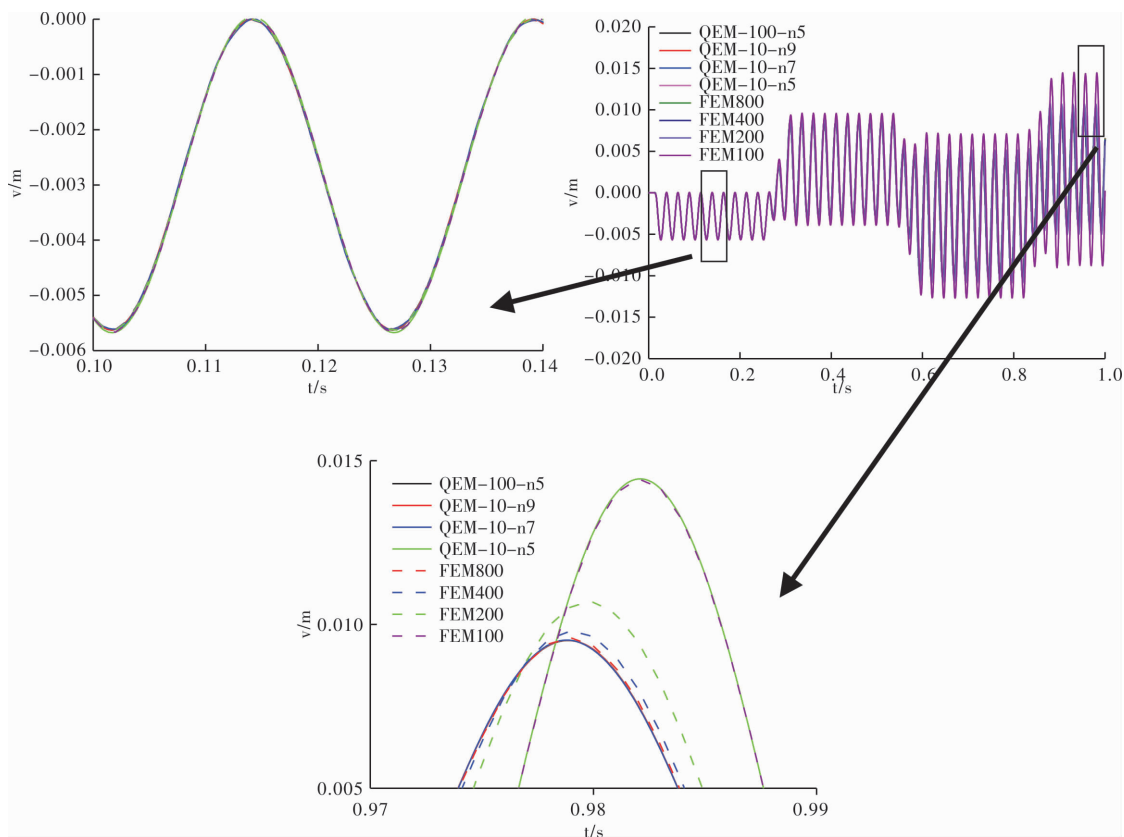


图2 一维波动问题计算结果对比

Fig. 2 Results of one-dimensional consolidation

3.2 饱和土体一维波动问题

本算例研究饱和土体中波动传播问题,计算模型仍如图1所示,土体的弹性模量为10 MPa,泊松比为0.3,渗透系数为 10^{-7} m/s.土体顶部受力为MPa.

$$F_0 = 10 \times \sin(80\pi t) \quad (18)$$

选用了10个均匀划分的4阶求积元单元进行模拟,同时,为了与有限元结果对比,使用线性孔压有限元单元计算该问题.图3为 $y=9$ m处孔压时程曲线,图4为 $t=0.07$ s时土体中孔压分布,从图中可以看到求积元与有限元结果非常吻合,证明了方法的正确性.

4 总结

本文基于比奥饱和土波动理论框架,以孔隙水压力和土体骨架位移为基本控制变量,推导了饱和土波动问题控制方程弱形式描述;应用Lobatto积分和微分求积法并采用Newmark方法进行时域逐步积分,建立了饱和土波动问题求积元

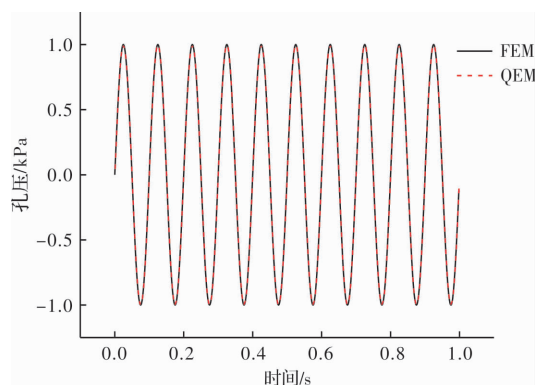
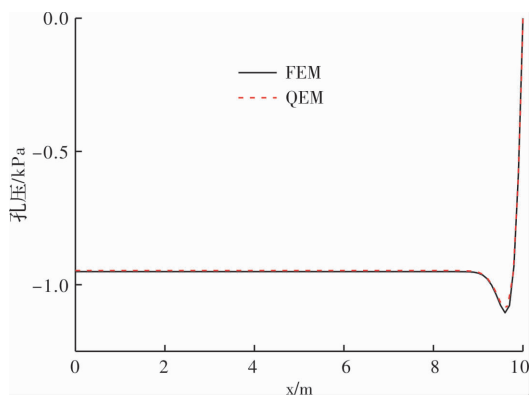


图3 $y=9$ m处孔压时程曲线

Fig. 3 Pore pressure at $y=9$ m

法求解列式.最后,通过一维单相材料及饱和土中波动传播问题检验了本文算法的精确性和计算效率.数值结果表明,在波动问题求解的初期,有限元和求积元法均具有较高的计算精度,随着时间的演化,求积元法的计算效率要大大高于有限元法.

图4 $t=0.07$ s时孔压分布Fig. 4 Pore pressure at $t=0.07$ s

参考文献 References

- [1] 徐洋, 谢康和, 卢廷浩. 二灰土桩复合地基三维固结有限元分析[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(2): 254-256.
XU Y, XIE K H, LU T H. Consolidation analysis of composite ground with lime-flyash columns by 3D FEM [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(2):254-256.
- [2] 王刚, 张建民. 波浪作用下某防沙堤的动力固结有限元分析[J]. 岩土力学, 2006, 27(4):555-560.
WANG G, ZHANG J M. Dynamic consolidation finite element analysis of a sediment-protecting dyke under ocean wave loading [J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, 27(4):555-560.
- [3] 林丰, 陈环. 真空和堆载作用了砂井地基固结的边界元分析[J]. 岩土工程学报, 1987, 9(4):13-22.
LIN F, CHEN H. Consolidation analysis of sand drains foundation subject to vacuum combined surcharging preloading by boundary element method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1987, 9(4): 13-22.
- [4] 欧贵宝, 饶意忠, 周博. 土体固结问题的一种边界元解法[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2002, 23(6):39-42.
OU B G, RAO Y Z, ZHOU B. Solution of soil-body concretion by boundary element method [J]. Journal of Harbin Engineering University, 2002, 23(6): 39-42.
- [5] WANG W, WANG J, WANG Z, et al. An unequal-order radial interpolation meshless method for Biot's consolidation theory[J]. Computers and Geotechnics, 2007, 34(2):61-70.
- [6] 李冰河, 王奎华. 软粘土非线性一维固结有限差分法分析[J]. 浙江大学学报(工学版), 2000, 34(4): 376-381.
LI B H, WANG K H. One-dimensional nonlinear consolidation analysis of soft clay by the finite difference method[J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2000, 34(4):376-381.
- [7] CHEN R, ZHOU W, WANG H, et al. One-dimensional nonlinear consolidation of multi-layered soil by differential quadrature method [J]. Computers and Geotechnics, 2005, 32(5):358-369.
- [8] ZHENG G Y, LI P, ZHAO C Y. Analysis of non-linear consolidation of soft clay by differential quadrature method[J]. Applied Clay Science, 2013, 79:2-7.
- [9] ZHONG H Z, YUE Z G. Analysis of thin plates by the weak form quadrature element method[J]. Science China Physics Mechanics & Astronomy, 2012, 55(5):861-871.
- [10] HE R, ZHONG H. Large deflection elasto-plastic analysis of frames using the weak-form quadrature element method[J]. Finite Elements in Analysis & Design, 2012, 50(1):125-133.
- [11] SHUAI Y, ZHONG H. Consolidation analysis of non-homogeneous soil by the weak form quadrature element method [J]. Computers & Geotechnics, 2014, 62:1-10.
- [12] SHUAI Y, ZHONG H. Three dimensional analysis of unconfined seepage in earth dams by the weak form quadrature element method[J]. Journal of Hydrology, 2016, 533:403-411.
- [13] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range[J]. The Journal of the acoustical Society of america, 1956, 28(2): 179-191.

(编辑 桂智刚)