

一种空间六杆张拉整体结构找形分析与设计

冯晓东^{1,2}, 周倩倩¹, 章万鹏¹, 何 溯¹, 张佳丹¹, 赵容舟¹

(1. 绍兴文理学院 土木工程学院, 浙江 绍兴 312000 2. 浙江大学 建筑工程学院, 浙江 杭州 310000)

摘要:本文提出了一种求解张拉整体结构初始形态的可行预应力找形的新方法. 根据已知结构的单元类型和几何拓扑关系, 分别采用谱分解和奇异值分解的方法将结构体系的平衡矩阵和力密度矩阵分解, 在此基础上进行循环迭代直至满足对应矩阵最小秩缺失的必要条件, 以此寻找合适的节点坐标和力密度. 基于空间六杆张拉整体结构算例结果, 利用棉绞线和 PVC 管模拟拉压单元成功制作模型进行了结果验证. 本文的算例分析和模型结果证实了该空间六杆张拉整体结构体系的合理性, 为新型复杂张拉整体结构的构型研究提供了一条新的途径.

关键词:张拉整体结构; 初始形态; 平衡矩阵; 奇异值分解

中图分类号: TU411

文献标志码: A

文章编号: 1006-7930(2020)03-0343-08

A form finding analysis and design of a spatial six-bar tensegrity structure

FENG Xiaodong^{1,2}, ZHOU Qianqian¹, ZHANG Wanpeng¹, HE Su¹, ZHANG Jiadan¹, ZHAO Rongzhou¹

(1. College of Civil Engineering Shaoxing, Shaoxing University, Zhejiang Shaoxing 312000, China

2. College of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University, Hangzhou 310000, China)

Abstract: A novel form-finding for solving the initial configuration of tensegrity structures is presented. According to the given elemental type and topological relationship of the structure, the structural equilibrium matrix and the force density matrix are decomposed by spectral decomposition and singular value decomposition respectively. In order to find the appropriate node coordinates and force density, the iteration was terminated until the corresponding matrix satisfies the necessary rank deficiency condition. Based on the numerical results of the spatial six-bar tensegrity structure, a simulate model is successfully fabricated by using cotton strands and PVC pipes. The results obtained in this paper confirm the rationality of the space six-bar tensegrity structure theoretically and practically, which also provide a new path for investigating configurations of more complicated tensegrity structure.

Key words: tensegrity structures; initial shape; equilibrium matrix; singular value decomposition

“张拉整体”这一概念由 Snelson 和 Fuller 在 20 世纪 60 年代提出, 该类结构体系一般是由若干离散的杆元和索元组成, 其中杆元受压, 索元受拉. 结构中的受拉索元存在着自应力, 在未受外力作用下, 该结构可起到自适应平衡作用. 由于这类智能结构存在着一系列的潜在优点, 使其自出现以后, “张拉整体”概念便在众多工程和科学领域得到了广泛的应用. 在生物力学领域中研究细胞骨架力学特性时通常运用张拉整体模型, 并将其视为合适的研究模型. 但现有的张拉整体模型并不能较好地解决这些几何和拓扑形态极为复杂的聚合物纤维结构. 因此复杂且非对称的张拉整体结构自由形态设计仍需进行深入的研究.

近年来, 针对张拉整体结构研究所得的找形方法主要有: 以多面体几何分析为基础发展的几

何分析法、力密度法及其他系列关于张拉整体结构找形的衍生算法^[4-5]. 此外, 还有将结构找形问题转化为约束优化问题的非线性规划法; 在原有找形基础上的改进力密度法; 利用有限单元法确定结构初始形态^[9]; 张拉整体结构找形中蚁群算法的应用^[4]; 多自应力模态张拉整体结构的数值找形方法; 基于平衡方程和几何相容方程的形式解决找形问题^[13]等.

现有找形方法大多基于一定的条件假定, 其中如以力密度系数作为符号变量并需假定各构件长度^[14]; 通过假定结构对称以达到缩减矩阵简化找形步骤的目的^[15]. 由于事先确定结构的初始假定条件存在难度. 因此, 对于快速求解复杂的、非对称的张拉整体结构的找形问题仍存在一定的挑战.

收稿日期: 2019-10-09 修改稿日期: 2020-05-08

基金项目: 国家自然科学基金项目(51908356); 浙江省自然科学基金项目(LQ19E080013); 绍兴文理学院国际科技合作项目(2019LGGH1005)

第一作者: 冯晓东(1987—), 博士, 副教授, 研究方向为大跨度空间结构及智能可展结构. E-mail: xiaodong.feng@csu.edu.cn

本文为解决一类张拉整体结构的找形问题,提出了一种新型数值分析找形方法.分别采用谱分解和奇异值分解法处理结构体系的平衡矩阵和力密度矩阵.根据力密度矩阵和平衡矩阵的最小秩亏条件,采用双向循环迭代的方式,以相当小数量的迭代即可获得任意稳定态,求解节点坐标和力密度,即:满足于切线刚度矩阵为正定矩阵或超稳定态.同时,张拉整体结构自由形态的几何刚度矩阵必为正定矩阵.现有的找形方法往往需要假定张拉整体结构的单元长度、初始节点坐标、力密度矩阵的半正定性或几何对称性等条件,但本文所呈现的方法中,只根据已有结构的几何维数、单元类型以及节点间的几何拓扑关系,就可完成找形,本文较其他找形方法具有明显的优势.

1 力密度找形法及相应的秩亏条件

1.1 基本假定

张拉整体结构找形需要基于以下六条基本假定:

(1)已知结构的几何拓扑连接,其形态由节点坐标表示;

(2)节点连接均为铰接;

(3)不考虑任何外力作用;

(4)忽略结构自重.

(5)不考虑任何整体或局部的弯曲变形;

(6)不考虑耗散力对结构体系的影响.

1.2 张拉整体结构的自平衡方程

对任意张拉整体结构,关联矩阵 $C_s \in R^{b \times (n+n_f)}$ 可用于表示结构的连接关系.其中, b 为单元数量, d 为结构空间维度.根据节点的约束情况,可分为自由节点和固定节点,分别用 n 和 n_f 来表示.

基于上述定义,假设连接单元 k 两端的节点编号分别为 i 和 j ($i < j$), 定义矩阵 C_s 第 k 行的第 i 列和第 j 列元素分别为 1 和 -1, 即

$$C_{S(k,p)} = \begin{cases} 1, & \text{当 } k=i, \\ -1, & \text{当 } p=j, \\ 0 & \text{其余情况.} \end{cases} \quad (1)$$

根据节点的连接关系, C_s 可分为 C 和 C_f , 分别表示自由节点间和固定节点间的连接关系.考虑这两者在数字标记顺序上的优先关系(固定节点可优于自由节点), 故关联矩阵 C_s 可表示为

$$C_s = [C \quad C_f] \quad (2)$$

对任意单元可根据静力平衡关系建立如下平衡方程:

$$\frac{x_i - x_j}{l_k} t = p_x \quad (3)$$

$$\frac{y_i - y_j}{l_k} t = p_y \quad (4)$$

$$\frac{z_i - z_j}{l_k} t = p_z \quad (5)$$

式中: x, y, z 为节点在各方向上的坐标; t 为对应单元内力; l_k 为对应单元长度; $p_x, p_y, p_z (\in R^n)$ 分别为作用在自由节点各方向上的外力.

定义上式 $q_k = t/l_k$ ($k = 1, 2, \dots, b$) 为力密度, 且矩阵表示为 $q = \{q_1, q_2, \dots, q_b\}^T \in R^b$. 故整个结构体系的力密度矩阵 $Q \in R^{b \times b}$ 可表示成

$$Q = \text{diag}(q) \quad (6)$$

且任意节点在 x, y, z 三个方向上需满足平衡方程组:

$$C^T Q C x + C^T Q C_f x_f = p_x \quad (7)$$

$$C^T Q C y + C^T Q C_f y_f = p_y \quad (8)$$

$$C^T Q C z + C^T Q C_f z_f = p_z \quad (9)$$

因为张拉整体结构本身具备无固定节点的特征, 故在忽略外力和自重的条件下, 整个结构体系可视为一个空间自由体系, 可根据对应的节点坐标来确定体系的几何形状, 且有

$$p_x = 0 \quad (10)$$

$$p_y = 0 \quad (11)$$

$$p_z = 0 \quad (12)$$

选用矩阵 $E \in R^{n \times n}$ 和 $E_f \in R^{n \times n_f}$ 简化公式,

$$E = C^T Q C \quad (13)$$

$$E_f = C^T Q C_f \quad (14)$$

根据式可得, 矩阵任意列或行元素之和均为 0, 因此对任意一个张拉整体结构而言, 矩阵 E 必然为一个对称的奇异方阵^[16], 表示张拉整体结构的力密度矩阵.

方程组(7)~(9)和方程组(10)~(14)可表示为:

$$E x = 0 \quad (15)$$

$$E y = 0 \quad (16)$$

$$E z = 0 \quad (17)$$

继续对方程组~合并与简化, 得

$$E[x, y, z] = C^T Q C[x, y, z] = [0, 0, 0] \quad (18)$$

式中: $[x, y, z]$ 为张拉整体结构的节点坐标矩阵.

将式(13)代入式(15)~(17), 整合后可得张拉整体结构的自平衡方程:

$$A q = \begin{bmatrix} C^T \text{diag}(C x) \\ C^T \text{diag}(C y) \\ C^T \text{diag}(C z) \end{bmatrix} q = 0 \quad (19)$$

式中: $A \in R^{dn \times b}$ 为张拉整体结构的平衡矩阵.

1.3 两个必要的秩亏条件

由于 d 维张拉整体结构至少存在一种可行自应力且需满足以下秩亏条件^[16] 来保证结构自应力模态数 $s = b - r_A \geq 1$ 和独立机构位移模态数 $m = dn - r_A$ ^[17]

秩亏条件一, 考虑半正定矩阵 E , 即

$$n_E = n - r_E = n - \text{rank}(E) \geq d + 1 \quad (20)$$

式中: n_E 为矩阵 E 的秩亏.

秩亏条件二, 考虑平衡矩阵 A , 即

$$s = r_A = \text{rank}(A) < b \quad (21)$$

此外, 式(12)为式(10)无解的必要条件.

其中独立机构位移模态数包含刚体位移模态数和无穷小机构位移模态数两部分^[18]. 无穷小机构位移模态数 m_{im} 可由以下式子得到.

$$m_{im} = m - r_b \quad (22)$$

$$r_b = \frac{d(d+1)}{2} \quad (23)$$

式中: m 为独立机构位移模态数; r_b 为刚体位移模态数.

2 基于矩阵分析的找形步骤

本文提出了一种避免事先假定(单元长度, 几何对称性等)的找形方法, 但需已知结构的空间维数、拉压单元布置情况以及关联矩阵, 便能通过算法得到找形结果^[19].

由已知的结构拉压关系, 如下定义矢量:

$$q_0 = \left\{ \underbrace{+1 \ +1 \ \cdots \ +1}_{\text{受拉索元}} \ \underbrace{-1 \ -1 \ \cdots \ -1}_{\text{受压杆元}} \right\}^T \quad (24)$$

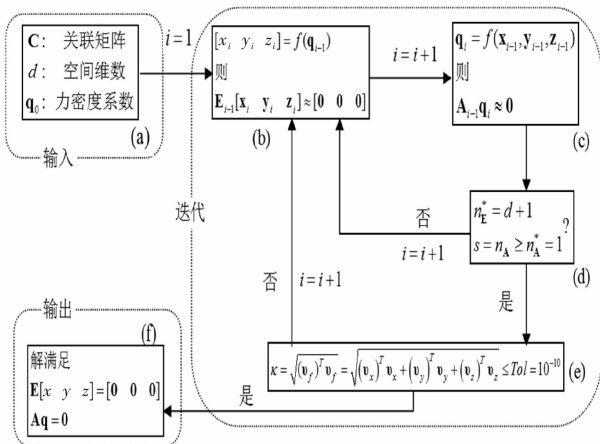


图1 自由形态张拉整体结构找形流程图

Fig. 1 Process of the proposed form-finding procedure for free-form tensegrity structures

图1为本文提出的算法具体流程. 已知结构的拉压关系, 关联矩阵 C , 结构空间维数 d , 以及

任意一组初始自应力 q_0 . 且在初始状态下的张拉整体结构处于0自应力模态状态. 根据图1(b), 可得到结构的初始节点坐标. 在图1(c)中可由节点坐标建立力密度系数的函数, 再次求解出一组新的力密度矢量(图1(c)). 并经过循环迭代直至满足式子和式子的约束条件(图1d)和误差精度(图1e)时, 终止找形过程, 求得结构最终的节点坐标矩阵 $[x \ y \ z]$ 和力密度系数矩阵 q .

$$n_E^* = d + 1 \quad (25)$$

$$s = n_A \geq n_A^* = 1 \quad (26)$$

式中: n_E^* 为满足力密度矩阵秩亏的最小值; n_A^* 为满足平衡矩阵秩亏的最小值.

2.1 力密度矩阵的特征值分解

将力密度矩阵特征值分解, 得

$$E = H \Lambda H^T \quad (27)$$

$$H H^T = I_n \quad (28)$$

式中: $H \in R^{n \times n}$ 为正交矩阵, $h_i \in R^n$ 为矩阵 E 第 i 列的特征向量基,

$\Lambda \in R^{n \times n}$ 其对角线上的元素 λ_i 为 h_i 对应的特征值;

$I_n \in R^{n \times n}$ 为单位矩阵;

根据上述分解结果得, 矩阵 E 的零特征值个数与零空间的维数一致^[20]. 此时, 定义 Λ 中对角线元素(特征值)不大于零的个数为 k , 存在以下两种情况

(1) 平衡态 ($k \leq n_E^*$)

以正交矩阵 H 的前 n_E^* 个正交的特征向量作为结构的节点坐标

$$[x \ y \ z] \in \bar{H} = [h_1 \ h_2 \ \cdots \ h_{n_E^*}] \quad (29)$$

且需满足矩阵 E 的前 n_E^* 个特征值无限趋于0, 即

$$\lambda_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n_E^*) \quad (30)$$

在迭代替换的过程中, 必须排除矢量 h_i (h_i 为矩阵 \bar{H} 的前 n_E^* 特征向量基中的前一列或者前几列)存在下列情况

$$C h_i = 0 \quad (31)$$

$$\det |l_d (l_d)^T| = 0 \quad (32)$$

$$l_d = \sqrt{(C h_i)^2 + (C h_j)^2 + (C h_k)^2} \quad (33)$$

式中: l_d 为 d 维空间中 b 个单元的长度.

若任意矢量 h_i 不满足式(31)或式(32), 张拉整体结构的节点坐标 $[x \ y \ z]$ 为矩阵 \bar{H} 的前三列特征向量.

当矩阵 E 为半正定矩阵, 能够满足最小秩亏 n_E^* , 且特征值都大于零. 此时, 若不考虑材料特

性和自应力系数,则任意满足上述条件的张拉整体结构都属于超稳定结构.

(2)非平衡态($k > n_E^*$)

当矩阵 E 不满足式(31)时,结构体系则处于非自平衡状态.在这种状态下,整个迭代过程将迫使矩阵的秩亏增大使其能够满足最小秩亏条件,且矩阵 E 并非定为半正定矩阵.因此需要引入张切线刚度矩阵 K^T 去判别拉整体结构的稳定性,其表达式如下所示

$$K^T = K^E + K^G = A \text{diag} \left(\frac{ea}{l^0} - q \right) A^T + I \otimes E \quad (34)$$

式中: K^E 为弹性刚度矩阵; K^G 为几何刚度矩阵; e 为各单元材料的杨氏模量(矢量); a 为各单元材料的横截面面积(矢量); l^0 为各单元的初始长度(矢量); $I \in R^{3 \times 3}$ 为单位矩阵; \otimes 为张量积.

根据式(34)确定忽略刚体位移数量.当切线刚度矩阵处于正定状态,则整个结构体系将是稳定的.

$$d^T (K^T) d > 0 \quad (35)$$

$$\text{eig}(K_T) = \left[\begin{array}{c} \underbrace{\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{r_b} = 0}_{\text{rigid-body motions}} \\ \underbrace{\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{dn-r_b}}_{\text{positive stiffness}} \end{array} \right] \quad (36)$$

式中: r_b 为式中定义的刚体位移模态数.

结合上述两种情况可知,正交矩阵 H 前四组特征向量基(分别相应于前四个最小的特征值)中选择三组可能为张拉整体结构的节点坐标,再通过循环迭代的方式,使得特征值逐步递减为零,使得结构体系最终能够处于平衡状态.

$$E[x \ y \ z] \approx [0 \ 0 \ 0] \quad (37)$$

2.2 平衡矩阵的奇异值分解

对平衡矩阵 A 奇异值分解可得:

$$A = UVW^T \quad (38)$$

$$U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{dn}] \quad (39)$$

$$W = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_b] \quad (40)$$

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_b \geq 0 \quad (41)$$

式中: $U \in R^{dn \times dn}$ 和 $W \in R^{b \times b}$ 均为正交矩阵;

$V \in R^{dn \times b}$ 为由矩阵 A 的非负奇异值组成的对角矩阵.

在算法计算流程中,对于自应力模态数 s 可分为两种情况.

(1)平衡态($s = 1$)

通过平衡矩阵的奇异值分解可得到力密度和机构的矢量空间基.因此,矩阵 U 和矩阵 W 应有

如下形式的零空间:

$$U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{r_A} \mid m_1 \ \dots \ m_{dn-r_A}] \quad (42)$$

$$W = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_{r_A} \mid q_1 \ \dots \ q_{b-r_A}] \quad (43)$$

式中: $m \in R^{dn}$ 为 m 个无穷小机构所组成的量.

定义机构矩阵 $M \in R^{dn \times (dn-r_A)}$ 如下:

$$M = [m_1 \ m_2 \ \dots \ m_{dn-r_A}] \quad (44)$$

由于 $s = b - r_A = 1$, 式(34)可写成如下形式:

$$W = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_{b-1} \mid q_1] \quad (45)$$

若矢量 q_1 与 q_0 符号相同,即 $\text{sign}(q_1) \equiv \text{sign}(q_0)$, 则矢量 q_1 为满足齐次方程的唯一自应力模态.

(2)非平衡态($s = 0$)

在结构自应力模态数为 0 的情况下, q 不存在非零解.此时,若将矩阵 W 的右奇异矢量基 w_b (对应于矩阵 V 中最小的右奇异值 μ_b) 作为近似的 q , 则矢量 q_1 与 q_0 可能会存在不同符号.为了解决该问题,必须逐一尝试矩阵 W 所有列,找到某个 w_j ($j = b, b-1, \dots, 1$) 的所有元素都与 q_0 符号相同,即 $\text{sign}(w_j) \equiv \text{sign}(q_0)$. 此时,近似的 q 可用矢量 w_j 直接使用.经过上述步骤,所得到的 q , 使得下式满足

$$Aq \approx 0 \quad (46)$$

综上所述,为满足式(25)和式(26)所述的两个秩亏条件,通过式和式的循环迭代,得到最终的结构形态及自应力.值得注意的是,对于给定的张拉整体结构,可先判断结构的自应力模态数 s , 若为 1, 则本方法所求得的力密度系数矢量 q 是唯一的.若大于 1, 则可能存在满足条件的多种矢量 q , 而本方法所求得的力密度系数矢量 q 则是一种可行解.

2.3 设计误差评估

鉴于张拉整体结构为自平衡结构体系,故采用不平衡力矢量 $v_f \in R^{dn}$ 作为评估计算结果精度的指标,其定义如下.

$$v_f = Aq \quad (47)$$

在各个方向上不平衡力矢量 v_f 分别表示为:

$$v_x = Ex \quad (48)$$

$$v_y = Ey \quad (49)$$

$$v_z = Ez \quad (50)$$

引入 Euclidean 范数,则设计误差 κ 可以表示为

$$\kappa = \sqrt{(v_f)^T v_f} = \sqrt{(v_x)^T v_x + (v_y)^T v_y + (v_z)^T v_z} \quad (51)$$

文中, 控制设计误差 κ 在 10^{-10} 以内.

3 算例

本节主要是通过一类张拉整体结构数值算例验证该找形方法的有效程度和适用程度. 根据算例结果表明, 本文所研究的找形方法在应用于分析解决稳定形态和超稳定形态下的张拉整体结构时, 非常适用.

3.1 6 杆 24 索张拉整体结构

以空间 6 杆 24 索张拉整体结构为例, 求解该结构稳定状态下的结构形态及自应力. 该结构共有 30 个单元, 12 个节点, 每个节点上均连接 4 根索和 1 根杆. 结构的拓扑连接及构件拉压关系如图 2 所示. 其中编号 25~30 为杆单元, 其余为索单元.

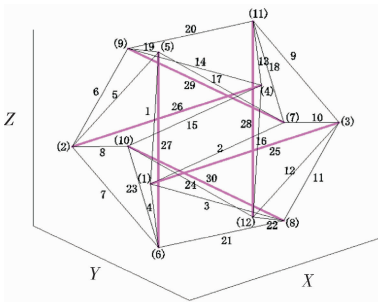


图 2 6 杆 24 索张拉整体结构拓扑连接图
Fig. 2 Topological connection of tensegrity structure with 6 struts and 24 cables

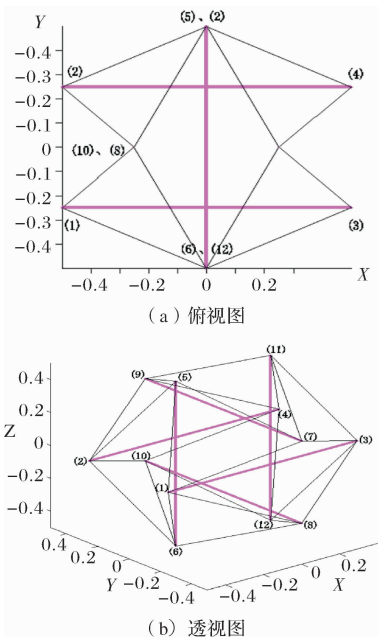


图 3 无指定节点坐标下得到的 6 杆 24 索张拉整体结构的几何形态
Fig. 3 The obtained geometric configuration of tensegrity structure (6 struts and 24 cables) without specified node coordinates

根据本论文所研究的找形方法, 自动分配初始力密度矢量如下:

$$q_0 = \left\{ \begin{matrix} q_i = 1, (i = 1, \dots, 24) \\ q_j = -1, (j = 25, \dots, 30) \end{matrix} \right\}^T$$

此结构包含 1 个自应力模态和 1 个内部机构位移模态, 通过乘积力的正定性, 以验证此结构体系为静不定且动不定结构, 几何稳定. 如图 3, 展示了本结构在无指定节点坐标情况下的几何形态.

指定张拉整体部分节点坐标: (0, 0, 0)、(0, 1, 0)、(2, 0, 0)、(4, 3, 0)、(3, 2, 1). 根据本文算法, 最终结构经 12 次迭代后收敛, 找到满足限定条件下的张拉整体结构如图 4, 节点坐标见表 1, 并在表 2 中列出此结构归一化后的可行自应力.

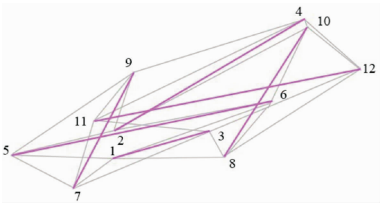


图 4 找形得到的 6 杆 24 索张拉整体结构 (状态 1)
Fig. 4 The obtained tensegrity structure with 6 struts and 24 cables (configuration 1)

表 1 图 4 所示结构的各节点坐标
Tab. 1 The nodal coordinates of the structure displayed in Fig. 4

节点号	<i>x</i> 坐标/m	<i>y</i> 坐标/m	<i>z</i> 坐标/m
1	0.000	0.000	0.000
2	0.000	1.000	0.000
3	2.000	0.000	0.000
4	4.000	3.000	0.000
5	-1.807	-0.615	-1.130
6	3.000	2.000	1.000
7	-0.605	-1.469	-0.510
8	2.050	0.085	0.731
9	0.636	1.835	-0.630
10	3.883	3.625	0.560
11	-0.065	-0.036	-0.983
12	4.724	2.770	1.334

在相同的初始条件下, 仅仅改变部分指定节点, 具体更改如下(1)(0, 0, 0)、(3)(5, 0, -1)、(6)(0, 3, 0)、(9)(2, 2, 5)、(12)(6, 2, 1). 同样以图 1 中的计算流程对新节点坐标下的张拉整体结构进行找形计算. 最终得到的张拉整体结构拓扑形态如图 5 所示, 节点坐标与构件自应力如表 3 和表 4 所示.

表 2 图 4 所示结构各构件的自应力

Tab. 2 The self-stresses of all components of the structure displayed in Fig. 4

单元	自应力	单元	自应力	单元	自应力
1	1.000	11	0.347	21	1.112
2	0.956	12	0.555	22	2.200
3	0.773	13	2.051	23	0.979
4	2.012	14	1.150	24	0.694
5	0.892	15	0.451	25	-1.145
6	0.643	16	0.336	26	-2.892
7	1.732	17	0.677	27	-3.928
8	1.567	18	0.825	28	-3.101
9	0.895	19	1.864	29	-2.506
10	0.843	20	1.034	30	-2.585

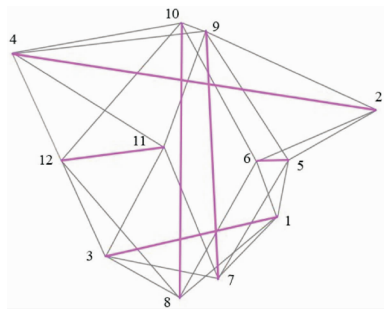


图 5 找形得到的 6 杆 24 索张拉整体结构(状态 2)

Fig. 5 The obtained tensegrity structure with 6 struts and 24 cables (configuration 2)

表 3 图 5 所示结构的各节点坐标

Tab. 3 The nodal coordinates of the structure displayed in Fig. 5

节点号	x 坐标/m	y 坐标/m	z 坐标/m
1	0.000	0.000	0.000
2	-3.845	4.672	0.393
3	5.000	0.000	-1.000
4	8.643	-1.920	7.106
5	-0.332	0.464	1.562
6	0.000	3.000	0.000
7	2.199	-2.321	-0.464
8	2.532	0.840	-3.048
9	2.000	2.000	5.000
10	2.753	1.903	5.385
11	4.071	-2.389	4.007
12	6.000	2.000	1.000

三维 6 杆 24 索张拉整体结构在有无事先指定节点的两种情况条件下得到的找形结果表明,该算法在无指定节点情况下,找形结果可接近于经典扩展八面体张拉整体,构件受力也较为均匀.而在指定部分节点情况下,仍可找到一种稳定的张拉整体结构形态.两者找形结果不同是由于自应力模态数为 1 的张拉整体结构形态与结构的节点坐标为一一对应的关系.即指定节点坐标找形结果定会

出现特定的张拉整体结构与其对应^[23].

表 4 图 5 所示结构各构件的自应力

Tab. 4 The self-stresses of all components of the structure displayed in Fig. 5

单元	自应力	单元	自应力	单元	自应力
1	1.000	11	1.885	21	2.259
2	1.938	12	0.793	22	1.369
3	1.410	13	3.116	23	2.325
4	0.821	14	5.090	24	1.199
5	2.240	15	5.085	25	-2.041
6	5.442	16	2.616	26	-14.820
7	2.708	17	1.019	27	-1.467
8	5.207	18	2.872	28	-2.796
9	1.015	19	1.449	29	-4.177
10	0.912	20	1.617	30	-4.807

4 张拉整体结构模型制作

在现有成果中,对结构找形的研究基本处于数值计算阶段,制作实际模型并进行验证的研究相对较少.本节将基于算例中的找形结果,制作三维六杆 24 索张拉整体结构,并将所得模型与理论计算结果进行比较.同时,尝试改变初始模型的节点位置,比较改变前后模型的状态.结合模型制作期间存在的技术问题,对结果进行初步分析总结.

4.1 模型制作过程

此模型含有 6 个杆单元,24 个索单元,12 个节点.根据算例的找形结果,其拉索单元的力密度、长度及内力均相等.由此确定结构单元尺寸:杆单元受压,选择长度为 0.5 m,直径为 10 mm 的 PVC 管;索单元受拉,选择长度为 0.7 m 的棉绞线.对结构的计算模型进行力学模型简化,完成初始模型制作,具体流程如下:

(1)首先剪裁六段长度为 0.5 m 的 PVC 管,在每段 PVC 管两端,用铅笔画出深 15 mm、宽 3 mm 且位于同一直径方向上的黑实线,再使用钢锯、刻刀、剪刀等工具分别在 PVC 管两端,沿黑实线刻出凹槽,并进行适当打磨使其光滑.

(2)裁剪六段长度为 0.7 m 的棉绞线,并在每段棉绞线中点处用黑色签字笔做上记号.以棉绞线中点为基准,卡入 PVC 管一端的凹槽中,将棉线两端拉直至另一端凹槽,每边预留长度为 5 mm,并使用胶带进行固定,如图 6 所示.

(3)用上述方法制作完成六组杆件,完成准备工作,采用临时支撑将 6 根压杆进行临时固定.同时,为方便穿索过程,任意选取两根压杆采用弹性固定.

(4)将各个杆端按照 x, y, z 的坐标方向顺序依次进行连接,模型具备初步形态时,调整每个索段位置并拉紧棉线,以对 6 杆 24 索张拉整体结构模型施加一定的力.在结构模型具有一定刚度

时,拆除临时支撑装置。

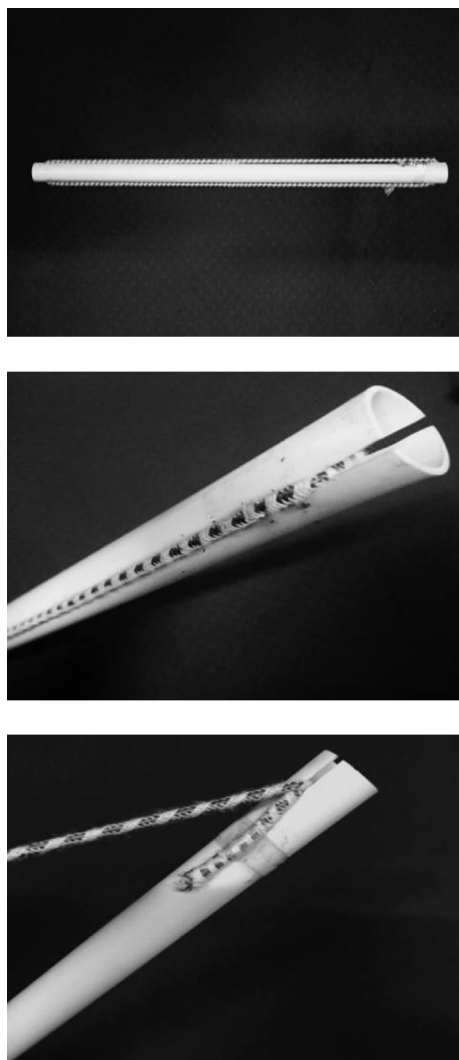


图6 安装杆件的前期准备

Fig. 6 Preparation for installation of members

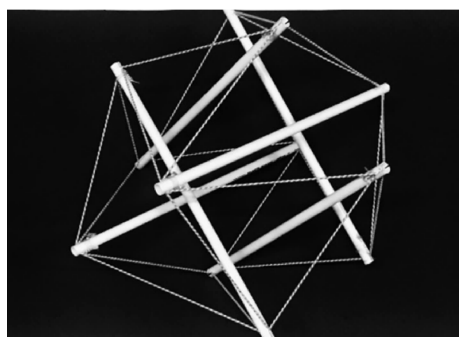


图7 张拉成型后的六杆张拉整体结构

Fig. 7 The formed configuration of tensegrity structure with 6 struts

自应力的产生机理:通过对索单元施加预应力,使索拉伸改变节点坐标。同时导致其他构件单元的产生拉伸或者压缩,进而达到施加预应力的效果。在施加过程中,若索单元受压则会松弛。因此,在对索单元拉伸时,需要保证其他索单元仍处于受拉紧绷的状态。基于此原则及自应力的产生机理,按

上述制作方法后调试不同的索单元,最终可得到6杆24索张拉整体结构模型,如图7所示。

4.2 不同约束条件下的结构形态分析

基于图7所示初始模型,对上述制作流程进行调整。即在第3步和第4步进行自动构型时,任意选取五个节点对其固定,通过调节其他剩余索杆单元,使其在调整后仍能保持为自稳定状态,并观察模型在此时的结构形态。

经过初步实验,总结出下述规律:

(1)当束的节点包含两根平行杆段时,稳定后各节点沿杆段方向的位移变化较大,整体形态较初始构型呈压缩或拉伸状态。

(2)当约束的节点在空间内相对分散时,稳定后大部分节点的移动相对情况(1)较小,但个别节点的移动较大,整体呈现不规则状。

4.3 原因分析与存在问题

对比理论解,结合制作过程中遇到的技术障碍,对实验结果进行初步的分析和总结,并提出下一阶段可深入进行研究的内容,具体如下:

(1)对于初始结构,其形态在杆件位置和棉线的张拉状态进行略微调整后,与理论结果较为接近。误差主要来源考虑是实验材料,工具以及制作流程存在一定缺陷。具体包括:剪裁处的光滑度和水平度不易保证;杆件两端凹槽的方向存在一定偏角;棉绞线的质量参差不齐,力学性能指标无法得到准确保证;棉线的拉伸过程只能在多次尝试后凭借经验进行,没有合适的定量工具进行控制。

(2)对于存在约束的结构,不同的约束条件会产生不同结果,与理论结果也存在一定差异,主要差异考虑在对节点进行固定时,位置定位不够精准。对于第一种情况,由于固定节点包含两根同方向杆段,固定位置相对容易且准确,最终形态与理论结果较为接近。第二种情况由于涉及固定的杆段数量较多,节点位置的控制相对繁琐,易发生偏移,最终结果的成型率相对较低,规律性不够明显。

5 结论

在传统张拉整体结构找形方法的研究基础上,运用矩阵分析理论和结构几何拓扑理论,综合考虑该类结构的结构刚度、稳定性、设计误差和几何拓扑等诸多因素,提出了一种同时适用于自由形态和指定形态的张拉整体结构的找形方法。在此基础上,通过制作空间六杆张拉整体结构模型,证实了该找形方法的准确性和有效性。

(1)本文的找形方法迭代次数少,精度高,既能够较为迅速准确地寻找到满足既定要求的张拉

整体结构的几何形态和自应力,同时也极大地缩短了找形的周期。

(2)通过固定与释放节点,以六杆二十四索空间张拉整体结构为算例,对其自由形态和指定形态进行搜寻,证实该算法可有效寻找到满足设计要求的张拉整体结构的初始形态。

(3)基于找形结论,利用棉绞线模拟拉索,PVC管模拟压杆,制作空间六杆张拉整体结构模型,证实了该找形方法的可靠性与合理性。

参考文献 References

- [1] INGBER D E, TENSEGRITY I. Cell structure and hierarchical systems biology [J]. *Journal of Cell Science*, 2003, 116(7): 1157-73.
- [2] 王丽丽, 陈维毅. 细胞不同铺展程度的张拉整体模型的计算分析 [J]. *太原理工大学学报*, 2019, 50(3): 380-5.
WANG Lili, CHEN Weiyi. Calculation analysis of tensegrity with different spreading degree of cell [J]. *Taiyuan University of Technology*, 2019, 50(3): 380-5.
- [3] SIMMEL S S, NICKELS P C, TIM L. Wireframe and tensegrity DNA nanostructures [J]. *Accounts of Chemical Research*, 2014, 47(6): 1691-9.
- [4] CHEN Y, FENG J, WU Y. Novel Form-Finding of tensegrity structures using ant colony systems [J]. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 2012, 4(3):
- [5] GAN B S, ZHANG J, NGUYEN D K, et al. Node-based genetic form-finding of irregular tensegrity structures [J]. *Computers & Structures*, 2015, 159: 61-73.
- [6] ZHANG J Y, OHSAKE M. Adaptive force density method for form-finding problem of tensegrity structures [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43(18-19): 5658-5673.
- [7] ESTRADA G G, BUNGARTZ H J, MOHRDIECK C. Numerical form-finding of tensegrity structures [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43(22-23): 6855-6868.
- [8] LEE S, LEE J. Form-finding of tensegrity structures with arbitrary strut and cable members [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2014, 85: 55-62.
- [9] 卢成江, 吴知丰, 赵洪斌. 非线性有限元法分析张拉整体结构初始形态 [J]. *沈阳建筑大学学报(自然科学版)*, 2007, 23(6): 900-4.
LU Chengjiang, WU Zhifeng, ZHAO Hongbin. Non-linear FEM for form-finding of tensegrity structures [J]. *Journal of Shenyang Jianzhu University (Natural Science)*, 2007, 23(6): 900-4.
- [10] TRAN H C, LEE J. Form-finding of tensegrity structures with multiple states of self-stress [J]. *Acta Mechanica*, 2011, 222(1-2): 131-47.
- [11] FENG X. An investigation on optimal initial self-stress design of tensegrity grid structures [J]. *International Journal of Steel Structures*, 2018, 18(3): 960-75.
- [12] FENG X. The optimal initial self-stress design for tensegrity grid structures [J]. *Computers & Structures*, 2017, 193: 21-30.
- [13] KOOHESTANI K, GUEST S D. A new approach to the analytical and numerical form-finding of tensegrity structures [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, 50(19): 2995-3007.
- [14] TIBERT Pellegrino. Review of form-finding methods for tensegrity structures [J]. *International Journal of Space Structures*, 2011, 26(3): 241-55.
- [15] MASIC M, ROBERT E Skelton, PHILIP E Gill. Algebraic tensegrity form-finding [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42(16-17): 4833-58.
- [16] MOTRO R. Tensegrity: structural systems for the future [M]. United Kingdom: Kogan Page Science, 2003.
- [17] PELLEGRINO S C C. Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks [J]. *Solids Struct*, 1986, 22(4): 409-28.
- [18] 冯晓东, 赵容舟, 黄世荣, 等. 具有约束支撑的张拉整体结构初始找形方法 [J]. *绍兴文理学院学报*, 2018, 38(8): 72-81.
FENG Xiaodong, ZHAO Rongzhou, HUANG Shirong, et al. Form-finding method of tensegrity structures with constrained supports [J]. *Journal of Shaoxing University*, 2018, 38(8): 72-81.
- [19] 冯晓东, 张佳丹, 周倩倩. 基于力密度矩阵和平衡矩阵的张拉整体结构找形方法 [J]. *绍兴文理学院学报*, 2017, 37(9): 9-18.
FENG Xiaodong, ZHANG Jiadan, ZHOU Qianqian. Form-finding method of tensegrity structures grounded on force density and equilibrium matrix [J]. *Journal of Shaoxing University(Natural Science)*, 2017, 37(9): 9-18.
- [20] MEYER C D. Matrix analysis and applied linear algebra [M]. SIAM, 2000.
- [21] ZHANG J Y, OHSAKI M. Stability conditions for tensegrity structures [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, 44(11-12): 3875-86.
- [22] 张沛, 冯健. 张拉整体结构的稳定性判定及刚度分析 [J]. *土木工程学报*, 2013, 46(10): 48-57.
ZHANG Pei, FENG Jian. Stability criterion and stiffness analysis of tensegrity structures [J]. *Chian Civil Engineering Journal*, 2013, 46(10): 48-57.
- [23] FENG X, GUO S. A novel method of determining the sole configuration of tensegrity structures [J]. *Mechanics Research Communications*, 2015, 69: 66-78.

(编辑 吴海西 沈 波)