

# 高、低浓度硫酸盐侵蚀下不同水灰比 混凝土抗剪性能的受损劣化规律

陶 琦

(中铁十九局集团 第六工程有限公司, 江苏 无锡 214028)

**摘要:** 通过室内硫酸盐侵蚀试验及直剪试验, 研究了高、低浓度硫酸盐侵蚀下不同水灰比混凝土抗剪强度受损劣化规律。试验结果表明: 混凝土抗剪性能随硫酸盐侵蚀时间的增加逐渐衰退, 具体表现为混凝土试件名义粘聚力和名义剪胀率随硫酸盐侵蚀时间的增长呈现逐渐减小的变化规律, 且高浓度硫酸盐溶液下试件抗剪强度损失更显著; 而试件内摩擦角在低浓度下呈现非线性降低趋势, 在高浓度下呈现先短暂增加后减小的趋势。

**关键词:** 硫酸盐侵蚀; 混凝土; 抗剪指标; 劣化特性; 试验研究

中图分类号: U213.1

文献标志码: A

文章编号: 1006-7930(2021)05-0630-06

## Damage and deterioration of shear properties of concrete with different water cement ratio under high and low concentration sulfate attack

TAO Qi

(China Railway 19th Bureau Group Sixth Engineering Co., Ltd., Jiangsu Wuxi 214028, China)

**Abstract:** Through indoor sulfate corrosion test and direct shear test, the shear strength reduction law of concrete with different water cement ratio under high and low concentration sulfate attack is studied. The test results show that the shear resistance of concrete gradually declines with the increase of sulfate attack time. The specific performance is that the nominal cohesion and the nominal shear expansion rate of concrete specimens gradually decrease with the increase of erosion time, and the shear strength loss of specimens under high concentration of sulfate solution is more significant; while the internal friction angle of concrete specimens shows a nonlinear decreasing trend at low concentration, and increases briefly and then decreases at high concentration.

**Key words:** sulfate attack; concrete; shear properties; degradation characteristics; experimental study

在桥梁混凝土结构中, 特别是处于水环境的墩台、桩基础等下部结构, 普遍存在盐类侵蚀病害<sup>[1-3]</sup>现象, 而硫酸盐侵蚀最为普遍。硫酸盐侵蚀会降低混凝土桥梁结构的耐久性、降低工作的服役寿命、加大后期加固维护成本。硫酸盐侵蚀混凝土, 其性能退化主要造成抗压强度、抗拉强度、抗剪强度及弹性模量等不同程度的损失<sup>[4-5]</sup>。而对于桥梁下部结构, 最常见的破坏形式之一为剪切破坏, 因此, 研究硫酸盐侵蚀对混凝土抗剪性能退化的影响规律及机制显得尤为重要。

目前, 既有文献涉及硫酸盐侵蚀对桥梁混凝土性能的影响, 主要聚焦在拉伸特性、压缩特性、弯曲特性、弹性模量以及不同力学约束条件下性能退化行为等方面。Yu 等<sup>[6]</sup>研究了不同类型硫酸

盐对混凝土性能(抗压强度, 弹性模量, 渗透系数, 膨胀特性)得到影响, 结果发现混凝土性能指标随侵蚀时间呈先增后减的变化规律。牛荻涛等<sup>[7]</sup>通过干湿交替硫酸盐侵蚀试验研究普通混凝土和喷射混凝土抗硫酸盐侵蚀的性能差异, 结果表明喷射混凝土基本性能损伤速率低于普通混凝土。Haufe 等<sup>[8]</sup>研究了硫酸盐侵蚀下混凝土抗拉强度的折减退化情况, 并发现强度折减量受混凝土胶凝组分含量的影响, 其中, 铝酸三钙占比高时侵蚀后混凝土强度退化最显著。文献<sup>[9]</sup>通过室内模型试验研究了混凝土力学特性在双向受压状态下受一定浓度硫酸盐侵蚀的影响规律, 试验结果表明双向力学约束限制了硫酸盐侵蚀对混凝土性能的退化效应。Chen 等<sup>[10]</sup>研究了混凝土处于三向受压

收稿日期: 2021-01-15

修改稿日期: 2021-09-28

基金项目: 国家自然科学基金项目(51904110)

第一作者: 陶琦(1976—), 男, 硕士, 高级工程师, 主要研究方向为造桥施工技术。E-mail: taoqi123hy@163.com

状态下硫酸盐侵蚀对其力学性能的衰减影响，结果表明：在三向约束条件下混凝土粘聚力指标随侵蚀时间呈先增大后减小的变化趋势，这一规律在以往相关研究中大量出现。然而，有关不同浓度硫酸盐侵蚀对混凝土抗剪性能退化的研究还比较少见。

由此本文通过开展室内混凝土硫酸盐侵蚀试验和混凝土直剪试验，研究了混凝土试件抗剪性能受高、低浓度硫酸盐侵蚀的折减退化特性，旨在为工程设计中在不同浓度硫酸盐侵蚀下混凝土受剪破坏及应采取的防护措施提供试验支撑。

1 试验概况

1.1 试件及材料配合比

试验用水泥采用大庆德昌伟业化工有限公司生产的普通硅酸盐水泥，其化学组分见表1：细骨料采用细度模数3.0的河沙；粗骨料采用当地料场生产级配碎石，密度为2 660 kg/m<sup>3</sup>。作为一种水泥分散剂，减水剂采用高性能聚羧酸减水剂，减水率20%。试验方案设置3组不同水灰比混凝土开展试验，即0.4，0.45，0.5，对应的试验组别代号为PC40，PC45，PC50。各组混凝土材料配合比设计详见表2。

表1 试验用水泥化学组分表

Tab. 1 Chemical composition of cement for test

化学组分	CaO	SiO	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	MgO	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	SO <sub>3</sub>
含量/%	61.3	18.8	5.42	3.34	2.55	3.13

表2 每立方米混凝土试件配合比表

Tab. 2 Mix proportion of concrete specimen per cubic meter

混凝土组分	PC40	PC45	PC50
水泥/kg	465	465	465
水/kg	186	209.3	232.5
水灰比	0.40	0.45	0.50
粗骨料/kg	862	862	862
细骨料/kg	846	846	846
减水剂/kg	3.21	3.21	3.21

1.2 试验方法及步骤

硫酸盐侵蚀试验的试验材料主要包括混凝土试件和硫酸钠溶液。混凝土试件采用体积为150 mm<sup>3</sup>的标准立方体，硫酸钠溶液选用2种浓度的质量分数分别为5%和15%，为下文便于分析，5%专指低浓度，15%专指高浓度，试验工况一览表见表3。试验重点研究高、低浓度水平硫酸钠溶

液对混凝土试件抗剪特性和破坏模式、机制的影响。试验时将整个试块浸泡在硫酸钠溶液中，温度维持在20℃左右。为了确保硫酸钠溶液中硫酸根离子的浓度保持恒定，溶液每两周更换一次。同时，选定4个特定时点(浸泡前、浸泡3个月、6个月及9个月)对混凝土试件进行抗剪性能试验，测得抗剪强度指标。

表3 试验工况一览表

Tab. 3 Test condition table

硫酸盐浓度	水灰比 $w/c$		
	0.40	0.45	0.50
高浓度(15%)	H-0.40	H-0.45	H-0.50
低浓度(5%)	L-0.40	L-0.45	L-0.50

本文采用直剪方法对硫酸盐侵蚀下混凝土试件抗剪特性进行试验，试验时以轴向压力水平共设置五个组，分别为0.5~10 MPa，且每个压力组均包含3个平行试件，将其平均值作为试验最终结果。试验步骤为：将混凝土试件安置在试验台中心位置，施加轴向压力至设计值，并维持恒定；然后以位移控制模式施加剪切力，将试件加载至发生破坏为止。试验中重点采集剪应力、轴向力、剪位移等数据。混凝土试件直剪试验装置示意图如图1所示。

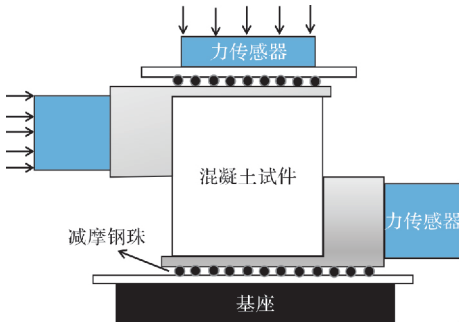


图1 直剪装置示意图

Fig. 1 Schematic diagram of direct shear device

2 试验结果与分析

2.1 抗剪强度随侵蚀时间变化规律

图2表示不同水灰比  $w/c$  混凝土试件在低浓度硫酸盐侵蚀不同时段下的轴向压力  $\sigma_N$  与峰值剪应力  $\tau_f$  的关系曲线。从图中可知，整体上，混凝土试件峰值剪应力  $\tau_f$  与轴向压力  $\sigma_N$  呈正相关的线性关系，侵蚀后期比前期的线性关系更明显，如线性拟合度从侵蚀初期的0.96增加至侵蚀9个月时的0.99。在图中，采用线性摩尔库伦理论对试验数据进行拟合时得到的截距，其物理意义表征混凝土试件的纯剪强度，即轴向压力为零时的抗

剪强度. 可以看出, 随侵蚀时间增长混凝土试件纯剪强度表现出逐渐降低的趋势, 这是由于硫酸根离子消耗了混凝土试件内部胶凝物质所致. 另外, 不同水灰比下侵蚀后混凝土试件抗剪强度减损程度不尽相同, 水灰比越小, 硫酸盐侵蚀导致混凝土试件抗剪强度降低程度越小. 这是由于水灰比越小, 混凝土试件内部物质结构致密性和结合性越好, 越不容易被溶液中的硫酸根离子侵蚀, 从而具有更好抗腐蚀性能及较高抗剪强度.

图2中采用线性摩尔库伦模型拟合试验数据得到的直线, 其斜率和截距分别表征内摩擦角正切值和黏聚力. 然而, 混凝土材料并非传统意义的散粒体材料, 其抗剪强度由多个部分组成<sup>[11]</sup>. 为了采用摩尔库伦理论来阐释混凝土材料的抗剪特性, 将图中拟合得到的直线斜率和截距分别用名义黏聚力 $c^n$ 和名义内摩擦角 $\varphi^n$ 命名, 则混凝土试件抗剪强度可由下式表示.

$$\tau_t = c^n + \sigma_N \tan \varphi^n \quad (1)$$

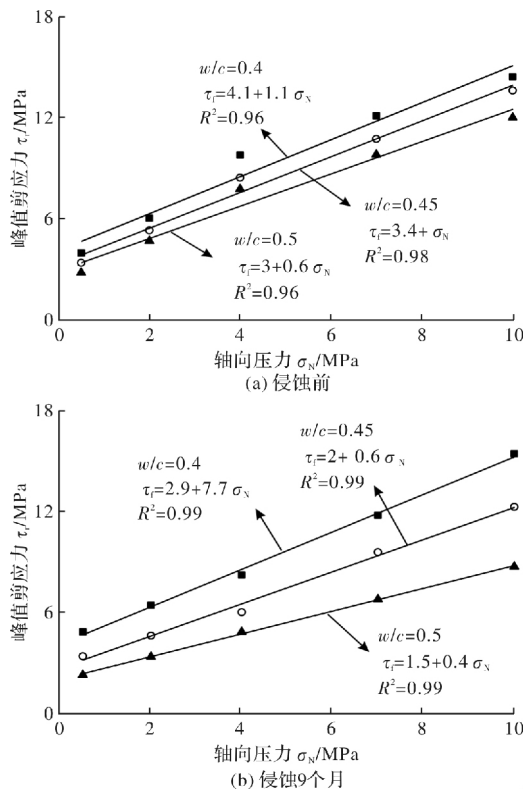


图2 不同侵蚀时间下混凝土试件峰值剪应力与轴向压力的试验数据及拟合曲线

Tab. 2 Experimental data and fitting curve of peak shear stress and axial pressure of concrete specimens under different erosion time

根据式(1)将高、低浓度试验数据采用图2的拟合方法即可得到高、低浓度硫酸盐侵蚀下不同水灰比混凝土试件的名义黏聚力和名义内摩擦角

不同侵蚀时间点的数值. 为便于分析, 将抗剪强度试验参数(名义内摩擦角和名义黏聚力)变化率作为因变量, 侵蚀时间作为自变量, 其中参数变化率为无量纲值, 即试验测试值与试验初始值的差除以初始值.

图3表示混凝土试件抗剪强度参数变化率随硫酸盐侵蚀时间的关系曲线.

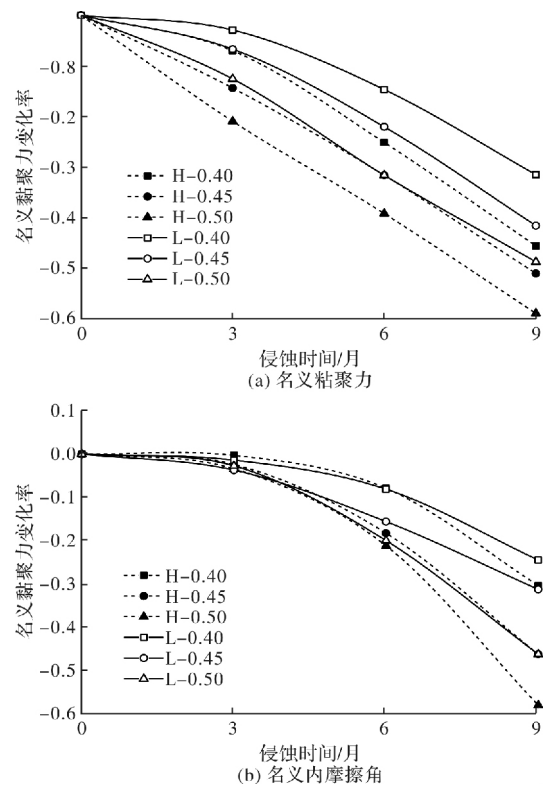


图3 混凝土试件抗剪强度参数随硫酸盐侵蚀时间的关系曲线

Tab. 3 Relation curve of shear strength parameters of concrete specimens with sulfate attack time

从图中总体来看, 在高、低浓度硫酸盐下混凝土试件名义黏聚力和名义内摩擦角随侵蚀时间的变化规律类似, 即随时间呈现逐渐降低的趋势, 但下降的幅度不同. 先分析图3(a), 混凝土试件名义黏聚力随侵蚀时间呈近似线性降低, 除了低浓度下侵蚀初始阶段降低速度较慢. 以低浓度试验数据为例, 三种水灰比  $w/c = 0.4$ ,  $0.45$  及  $0.5$  混凝土试件名义黏聚力在侵蚀9个月对应的降幅分别为29.8%, 41.6%及47.5%. 图3(b)中混凝土试件名义内摩擦角随侵蚀时间呈现非线性降低规律, 在侵蚀3个月前降速低, 侵蚀3个月以降速高, 同样以低浓度试验数据为例, 三种水灰比  $w/c = 0.4$ ,  $0.45$  及  $0.5$  混凝土试件名义内摩擦角在侵蚀9个月对应的降幅分别为23.3%, 31.2%和46.7%. 因此, 混凝土试件水灰比  $w/c$  与名义抗剪强度参数( $c^n$ 、 $\varphi^n$ )折减程度呈正相关关系. 再对

比高、低浓度硫酸盐的影响,从图中可知,对于水灰比一定的混凝土试件,高浓度硫酸盐侵蚀下其名义抗剪强度参数的降低幅度高于低浓度的情况。以 $w/c=0.45$ 为例,在高浓度硫酸盐侵蚀下混凝土试件名义黏聚力在浸泡9个月后下降了51.3%,而低浓度的情况则下降39.8%。

## 2.2 抗剪强度组件随侵蚀时间变化规律

如前文所述,混凝土材料不同于散粒体材料,其抗剪强度组成包含多个部分:粗细骨料间咬合作用;浆体—骨料黏结作用;接触摩擦作用及剪胀作用四部分<sup>[12]</sup>,称为抗剪强度组件。据此,结合摩尔库伦通式,混凝土抗剪强度参数可以式(2)来表示。

$$\tau_f = c + \sigma_N \tan(\varphi + \psi) \quad (2)$$

其中, $\psi$ 为表征混凝土试件剪胀作用的剪胀角。黏结组件 $c$ 由浆体—骨料黏结与骨料间咬合构成,与2.1所述的名义黏聚力物理意义相同,表征混凝土内部化学黏附作用。名义摩擦角则实际包含接触面摩擦与剪胀双重作用。剪胀作用一般采用剪胀率 $R_{sd}$ 来刻画,而剪胀率是通过直剪试验的轴向位移—剪切位移实时曲线计算得来,该曲线的瞬时斜率即为剪胀率,剪胀率与剪胀角存在如下数学关系。

$$\psi = \arctan R_{sd} \quad (3)$$

一般地,混凝土试件在受剪时剪胀率变化很小,因此,可采用平均剪胀率来表示从剪胀开始至出现峰值剪应力整个过程的剪胀率。图4为混凝土试件剪胀率随硫酸盐侵蚀时间的关系曲线。从图中可见,不同浓度下不同水灰比的混凝土试件剪胀率与硫酸盐侵蚀时间呈线性降低的变化趋势。以低浓度工况为例,三种水灰比 $w/c=0.4, 0.45$ 及 $0.5$ 混凝土试件残余剪胀率(即侵蚀9个月)分别为0.24, 0.21和0.18。剪胀特性的降低是由于硫酸根离子侵蚀混凝土试件导致其密实度损失所致。在混凝土试件侵蚀前,水灰比 $w/c=0.4, 0.45$ 及 $0.5$ 混凝土试件初始剪胀率分别为0.3, 0.29及0.28,试件水灰比与剪胀率呈反比例关系,原因在于水灰比高的试件导致其内部微观结构更为疏松。

再分析浓度的影响,与低浓度工况相比,高浓度硫酸盐侵蚀下试件剪胀率降低幅度更显著,以 $w/c=0.45$ 为例,低浓度下剪胀率从未侵蚀时的0.29减小至侵蚀9个月时的0.21,降幅为29%;而高浓度工况剪胀率从未侵蚀时的0.29减小至侵蚀9个月时的0.16,降幅达到42%。分析

原因可能是,高浓度下硫酸根离子与混凝土物质组分发生化学反应<sup>[13]</sup>,损耗骨料间的胶凝物质,使得骨料—浆体结构变得疏松多孔,密实度降低,从而显著降低试件剪胀率。而低浓度硫酸根离子不足以与混凝土胶凝物质发生明显的化学作用,而更多是以生成结晶为主<sup>[14]</sup>,而结晶压会导致混凝土试件结构出现微小裂缝,因此相较于高浓度的情况而言,其剪胀率的降低程度较小。

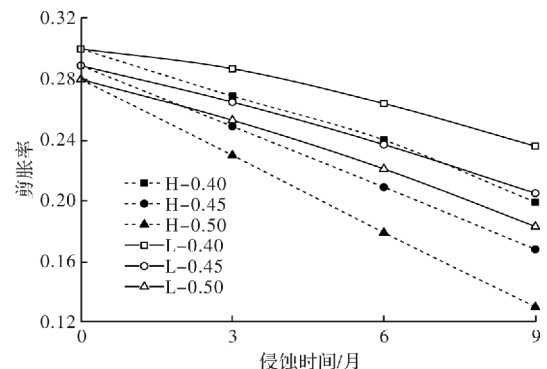


图4 混凝土试件剪胀率随硫酸盐侵蚀时间的关系曲线

Fig. 4 Relation curve of shear expansion rate of concrete specimen with sulfate attack time

如前文所述,混凝土名义内摩擦角反映了接触摩擦作用和剪胀作用,从而可以得到表征接触摩擦作用的实际内摩擦角。图5为高、低浓度下不同水灰比混凝土试件内摩擦角随硫酸盐侵蚀时间的关系拟合曲线。从图中可见,硫酸盐侵蚀下混凝土试件内摩擦角与侵蚀时间呈非线性降低变化规律,侵蚀早期(3个月前)降速较缓,侵蚀中后期(3至9个月)降速较快。以低浓度工况为例,水灰比 $w/c=0.4, 0.45$ 及 $0.5$ 的混凝土试件内摩擦角最终降幅(侵蚀9个月时)分别为25.1%, 33.2%和51.8%。

值得注意的是,对于高浓度工况,三种水灰比混凝土试件在侵蚀早期均出现了内摩擦角轻微增大的现象(增长2%~5%,如图5所示),而后又迅速降低的变化趋势,这是与低浓度工况显著不同之处。可能的原因是:在早中期(侵蚀5个月前),高浓度下硫酸根离子与混凝土胶凝物质(少许)发生化学反应生成钙矾石等具有膨胀特性的物质<sup>[15]</sup>(此时试件的密实度变化不大),致使在混凝土微观结构孔隙中产生较大的膨胀力,当试件受剪时膨胀力与施加的轴向压力相叠加,从而在剪切面产生更大的接触面压力。而采用内摩擦角表征的接触摩擦特性受接触面压力大小和接触面粗糙程度控制<sup>[16]</sup>,因此接触面压力增大引起内摩擦角的增大。而到了中后期(侵蚀5个月后),随着化

学反应的加剧,混凝土胶凝材料耗损增大,不断掏蚀混凝土骨架-胶凝微观结构,从而显著降低试件的密实度,而与之相比生成的钙矾石等膨胀性物质产生的膨胀力则影响甚微,故试件内摩擦角在侵蚀中后期迅速降低.对低浓度的工况,硫酸根离子的浓度不足以与混凝土胶凝物质发生化学反应,或反应很微弱(可忽略不计),而主要对混凝土试件诱发物理结晶为主,其结果使得试件结构变得更疏松,因而整个侵蚀过程内摩擦角一直降低,并未出现增大的现象.

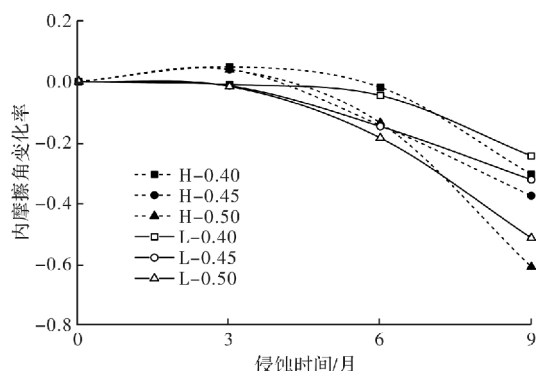


图5 混凝土试件内摩擦角随硫酸盐侵蚀时间的关系曲线

Fig. 5 Curve of internal friction angle of concrete specimen with sulfate attack time

### 3 结论

本文通过开展硫酸盐侵蚀混凝土试验及直剪试验,研究了高、低浓度硫酸盐溶液侵蚀对不同水灰比混凝土试件抗剪性能的影响,主要结论如下:

(1)混凝土试件抗剪性能在硫酸盐侵蚀作用下有显著的折损劣化现象.试件抗剪强度参数名义粘聚力及名义内摩擦角随侵蚀时间的增长均逐渐降低,且高浓度比低浓度,抗剪强度降低幅度更大;

(2)在同一浓度硫酸盐溶液下,混凝土试件水灰比越大,其抗剪强度参数随侵蚀时间的增长降速越大;

(3)高、低浓度硫酸盐侵蚀下混凝土试件剪胀率与侵蚀时间均呈线性降低的变化趋势.与低浓度工况相比,高浓度侵蚀下剪胀率降低幅度更显著;

(4)在低浓度硫酸盐溶液下,混凝土试件内摩擦角随侵蚀时间的增长呈非线性减小的变化规律,而在高浓度下,则呈现先短暂(侵蚀早期)增大后减小的变化趋势.

### 参考文献 References

- [1] 刘勇. 氯盐侵蚀对混凝土微观结构损伤的影响研究[J]. 西安建筑科技大学学报(自然科学版), 2020, 52(3): 390-395.  
LIU Yong. Study on the damage characteristics of concrete structures by chloride erosion[J]. J. of Xi'an Univ. of Arch. & Tech. (Natural Science Edition), 2020, 52(3): 390-395.
- [2] 卢峰. 海洋环境下混凝土硫酸盐腐蚀研究[D]. 青岛: 青岛理工大学, 2012.  
LU Feng. Study of sulfate corrosion of concretet in marine environment[D]. Qingdao: Qingdao Technological University, 2012.
- [3] 肖东. 邻近(连接)桥梁桩基础与高速铁路基耦合变形研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2019.  
XIAO Dong. Study on coupling deformation between neighboring or connecting bridge pile deformation and high speed railway embankment[D]. Southwest Jiaotong University, 2019.
- [4] Z Zhongya, J Xiaoguang, L Wei. Long-term behaviors of concrete under low-concentration sulfate attack subjected to natural variation of environmental climate conditions[J]. Cement and Concrete Research, 2019, 116:217-230.
- [5] 陈伟, 李宗刚, 李博. 聚合硫酸铝改性矿渣硅酸盐水泥水化及其抗氯离子渗透性能研究[J]. 硅酸盐通报, 2020, 39(5):43-49.  
CHEN Wei, LI Zonggang, LI Bo. Study on hydration of polyaluminum sulfate modified slag portland cement and its chloride permeability[J]. Bulletin of the Chinese Ceramic Society, 2020, 39(5): 43-49.
- [6] YU X T, CHEN D, FENG J R, et al. Behavior of mortar exposed to different exposure conditions of sulfate attack[J]. Ocean Engineering, 2018, 157(1): 1-12.
- [7] 牛荻涛, 王家滨, 马蕊. 干湿交替喷射混凝土硫酸盐侵蚀试验[J]. 中国公路学报, 2016, 29(2): 82-89.  
NIU Ditao, WANG Jiabin, MA Rui. Sulfate attack test of shotcrete under dry-wet alternation[J]. Chinese Journal of Highway and Transport, 2016, 29(2): 82-89.
- [8] HAUF E J, VOLLPRACHT A. Tensile strength of concrete exposed to sulfate attack[J]. Cement and Concrete Research, 2019, 116:81-88.
- [9] A Tai Ikumi, I S A B, S H P C C. Effects of biaxial confinement in mortars exposed to external sulfate attack[J]. Cement and Concrete Composites, 2019 95(1): 111-127.

- [10] CHEN D, YU X, GUO M, et al. Study on the mechanical properties of the mortars exposed to the sulfate attack of different concentrations under the triaxial compression with constant confining pressure [J]. *Construction and Building Materials*, 2017, 146(15): 445-454.
- [11] 韩宇栋, 张君, 高原. 混凝土抗硫酸盐侵蚀研究评述 [J]. *混凝土*, 2011(1): 52-56, 61.  
HAN Yudong, ZHANG Jun, GAO Yun. Review of sulfate attack on concrete [J]. *Concrete*, 2011(1): 52-56, 61.
- [12] 苑立冬, 牛荻涛, 姜磊, 等. 硫酸盐侵蚀与冻融循环共同作用下混凝土损伤研究 [J]. *硅酸盐通报*, 2013, 32(6): 1171-1176.  
YUAN Lidong, NIU Ditao, JIANG Lei, et al. Study on damage of concrete under the combined action of sulfate attack and freeze-thaw cycle [J]. *Bulletin of the Chinese Ceramic Society*, 2013, 32(6): 1171-1176.
- [13] 纪广. 超细微粉对水泥胶砂抗硫酸盐侵蚀的性能研究 [D]. 兰州: 兰州交通大学, 2020.  
JI Guang. Study on the performance of super fine powder against sulphate erosion in cement sand [D]. Lanzhou: Lanzhou Jiaotong University, 2020.
- [14] JIN Zuquan, SUN Wei, JIANG Jinyang, et al. Damage of concrete attacked by sulfate and sustained loading [J]. *Journal of Southeast University*, 2008, 24(1): 69-73.
- [15] 梁咏宁, 袁迎曙. 硫酸盐腐蚀后混凝土单轴受压本构关系 [J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2008, 40(4): 532-535.  
LIANG Yongning, YAN Yingshu. Constitutive relation of sulfate attacked concrete under uniaxial compression [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2008, 40(4): 532-535.
- [16] XIAO Dong, JIANG Guanlu, LIAO Dan, et al. Influence of cement-fly ash-gravel pile-supported approach embankment on abutment piles in soft ground [J]. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 2018, 10(5): 977-985.

(编辑 沈波)

(上接第 629 页)

- [9] MASSINAS S A, SAKELLARIOU M G. Closed-form solution for plastic zone formation around a circular tunnel in half-space obeying Mohr-Coulomb criterion [J]. *Geotechnique*, 2010, 60(7): 569-571.
- [10] EXADAKTYLOS G E, STAVROPOULOU M C. A closed-form elastic solution for stresses and displacements around tunnels [J]. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 2002, 39: 905-916.
- [11] EXADAKTYLOS G E, LIOLIO P A, STAVROPOULOU M C. A semi-analytical elastic stress displacement solution for notched circular openings in rocks [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, 40: 1165-1187.
- [12] 李培楠, 刘俊, 苏锋, 等. 任意形状隧道围岩应力与位移的解析延拓求解 [J]. *同济大学学报(自然科学版)*, 2013, 41(10): 1483-1489.  
LI Peinan, LIU Jun, SU Feng, et al. Analytical continuation method for solving stress and displacement of surrounding rock buried tunnel excavation with arbitrary shape section [J]. *Journal of Tongji University (Natural Science)* 2013, 41(10): 1483-1489.
- [13] 施有志, 高轩能. 深埋马蹄形隧道开挖围岩应力与位移的复变函数解 [J]. *土木建筑与环境工程*, 2014, 36(1): 101-105, 118.  
SHI Youzhi, GAO Xuanneng. Complex variable function solution of stress and displacement of surrounding rock buried deep horseshoe-shaped tunnel excavation [J]. *Journal of Civil Architectural and Environmental Engineering*, 2014, 36(1): 101-105, 118.
- [14] 程长清, 杨自友, 殷海波, 等. 有压隧洞围岩最小覆盖层厚度弹塑性力学分析 [J]. *地下空间与工程学报*, 2021, 17(2): 413-420.  
CHENG Changqing, YANG Ziyu, YIN Haibo, et al. Elastoplastic analysis on the minimum covering layer thickness of the pressure-tunnel surrounding rock [J]. *Chinese Journal of Underground Space and Engineering*, 2021, 17(2): 413-420.
- [15] HOEK E, BROWN E T. Practical estimates of rock mass strength [J]. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 1997, 34(8): 1165-1186.

(编辑 沈波)