

# 基于 Bayes-Bootstrap 法确定土力学参数及可靠性分析

魏德永<sup>1</sup>, 阮永芬<sup>1</sup>, 孟 涛<sup>2</sup>, 刘高林<sup>1</sup>, 王雨洁<sup>1</sup>

(1. 昆明理工大学建筑工程学院, 云南 昆明 650500; 2. 中铁三局集团广州公司, 广东 广州 510000)

**摘要:** 岩土参数的可靠取值是工程设计施工的基础, 但要获得岩土参数准确信息需要花费巨大的成本. Bayes 法能将样本及先验两种信息充分利用起来, 推导后验分布, 对参数预测取得很好的成效. 但通常勘察的样本数据量较小, 如果把所勘察到的样本量加以修正调整后作为先验信息, 再引入基于插值法改进的 Bayes-Bootstrap 法对勘察的样本量进行扩大作为样本信息, 结合 Bayes 大样本方法和 Fisher 信息量就可得到岩土力学参数的后验分布和某地层岩土参数当勘察样本量趋于无穷时的参数收敛值, 并以该值作为能准确代表地层信息的代表值. 研究发现: 当样本量增大的同时, 岩土参数的可靠收敛值逐渐向后验均值靠近, 而后验均值一定程度上又与样本均值和样本量有关系, 在得出各地层参数收敛取值之后反过来寻找参数准确取值时所需的最小样本量, 并以一基坑工程开挖过程为例, 通过实测监测数据和有限元模拟数据综合对比, 验证了 Bayes-Bootstrap 法的所确定参数的可靠性.

**关键词:** 岩土参数; Bayes 大样本法; 改进 Bayes-Bootstrap 法; 最小样本量; 基坑开挖

中图分类号: TU443

文献标志码: A

文章编号: 1006-7930(2021)05-0706-10

## Determination of soil mechanical parameters by Bayes-Bootstrap method and reliability analysis of foundation pit excavation

WEI Deyong<sup>1</sup>, RUAN Yongfen<sup>1</sup>, MENG Tao<sup>2</sup>, LIU Gaolin<sup>1</sup>, WANG Yujie<sup>1</sup>

(1. Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China; 2. Guangzhou Company of China Railway Third Bureau Group, Guangzhou 510000, China)

**Abstract:** The accurate value of geotechnical parameters is the basis of engineering design, but it costs a lot to obtain accurate information of geotechnical parameters. Bayes method can make full use of the sample and the prior information, deduce the posterior distribution, and achieve good results in parameter prediction. However, the amount of survey sample data is usually small. If the surveyed sample size is modified and adjusted as prior information, and then the improved Bayes-Bootstrap method based on interpolation is introduced to expand the survey sample size as the sample information, the Bayes large sample method and Fisher information amount can be used to obtain the posterior distribution of geomechanical parameters (in the state of solid fastness) and the parameter convergence value of the geotechnical parameters of a stratum when the sample size of the survey approaches infinity, and the value is used as a representative value that can accurately represent the stratum information. It is found that when the sample size increases, the reliable convergence value of geotechnical parameters gradually approaches the posterior mean value, and the posterior mean value is related to the sample mean value and sample size to a certain extent. After obtaining the convergence value of parameters in each layer, the minimum sample size required for accurate parameter value is found in turn. Taking the excavation process of a foundation pit as an example, the reliability of the parameters determined by the Bayes-Bootstrap method is verified by the comprehensive comparison between the measured monitoring data and the finite element simulation data.

**Key words:** geotechnical parameters; Bayes large sample method; improved Bayes-Bootstrap method; minimum sample size; foundation pit excavation

由于在岩土工程中存在大量的不确定和不确定性因素, 应用可靠性理论解决岩土工程中的问题一直比较困难, 但有很好的应用前景<sup>[1]</sup>.

土工试验后采用经典统计学方法给出岩土参

数值. 在岩土工程分析中一般认为: 若样本量  $n \leq 38$ , 即可认为是小样本<sup>[2]</sup>. Keaton JR<sup>[3]</sup> 王桂林<sup>[4]</sup>、朱焕珍<sup>[5]</sup>、苏永华<sup>[6]</sup>、Luis-Fer nando Contreras<sup>[7-8]</sup>、阮永芬<sup>[9]</sup>等采用经典统计学方法和 Bayes

收稿日期: 2021-04-21

修改稿日期: 2021-09-27

基金项目: 云南省重点研发计划基金资助项目(社会发展领域)(No. 2018BC008)

第一作者: 魏德永(1993—), 男, 硕士研究生, 主要从事岩土工程方面的研究工作. E-mail: 396431183@qq.com

通讯作者: 阮永芬(1964—), 女, 教授, 主要从事岩土工程方面的教学及科研. E-mail: ryy64@aliyun.com

法去推断岩土参数, 并取得很好的成果。

文献[9]指出在  $n_{\min}=200$  时, 土的力学参数收敛效果已经很好。但一般工程由于样本量的限制, 导致样本信息不能很好地反应土层的总体信息时, 有必要在原样本的基础上采取相应的数学方法对样本量进行扩大。因此, 本文在所收集土体样本  $c$ 、 $\varphi$  不足 200 时, 采用基于插值法改进的 Bayes-Bootstrap 法去扩充样本, 保证每种土的样本量  $n$  都达到 200 以上, 然后采用文献[9]的方法推算 Bayes 大样本法下的岩土后验分布以及先验分布的超参数值, 得出后验分布表达式以及收敛值, 再求出后验分布在风险最小情况下的岩土参数可靠区间。随后根据后验均值  $\mu(\bar{x})$  与样本均值  $\bar{x}$  和样本量  $n$  之间的关系反算岩土参数达到可靠值时所需样本量的最小量。并通过一个基坑开挖工程, 结合开挖过程中的深层水平位移的实际监测数据和改变参数情况下的有限元模拟深层水平位移数据

进行对比, 验证 Bayes-Bootstrap 法确定参数的可行性。

1 Bayes 大样本方法确定的岩土参数

对滇池湖湘沉积的特殊软土如泥炭质土、粉土及黏土等力学指标  $c$ 、 $\varphi$  进行收集, 因为岩土参数会随取样场地不同而存在较大的变异性<sup>[1]</sup>, 故把数据收集范围局限在昆明滇池会展中心, 分地层对参数进行收集及相关计算。

对收集的样本, 采用宫风强<sup>[10]</sup>等提出的同时考虑峰度和偏度的方法对参数进行调整, 调整后的样本量作为先验信息作出样本频率直方图如图 1 所示。根据张继周<sup>[11]</sup>等提出的方法, 把岩土参数视为随机变量, 确定了样本分布的最佳概率分布类型, 检验结果如表 1。从图 1 和表 1 可看出, 三种土  $c$ 、 $\varphi$  的先验分布都符合  $N(\mu, \sigma^2)$  正态分布,  $\mu$ 、 $\sigma$  分别为均值及方差。

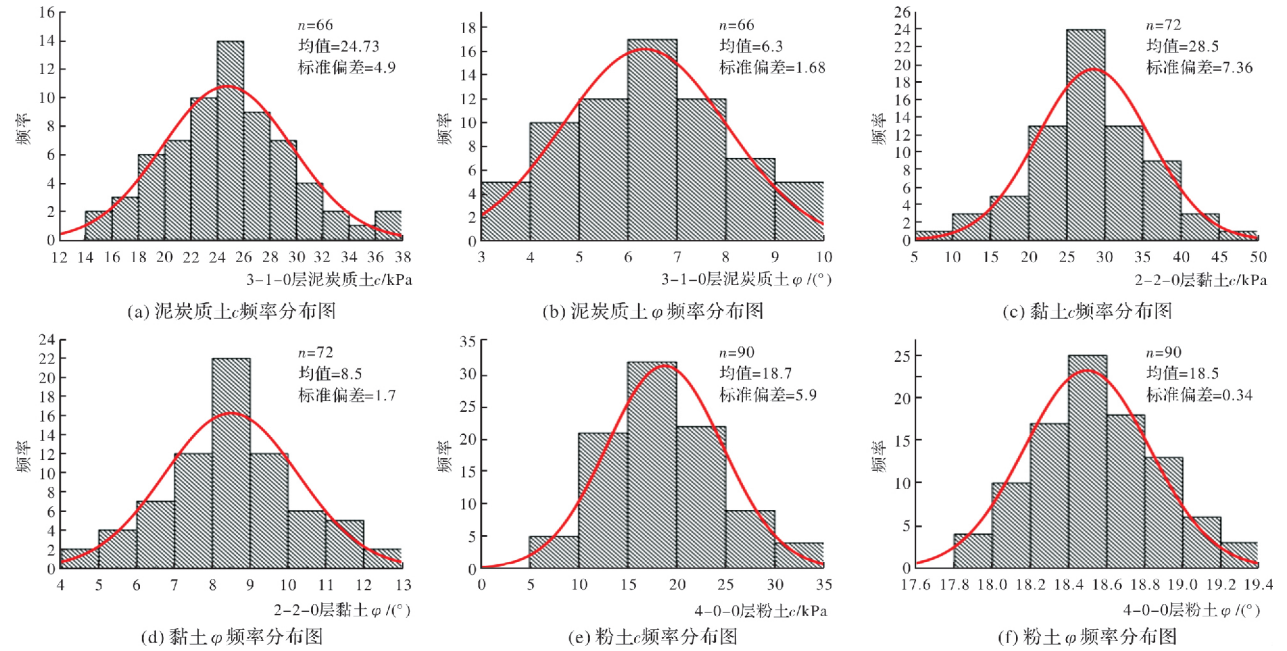


图 1 先验信息分布图

Fig. 1 prior information distribution

表 1 岩土参数概率分布的 K-S 检验

Tab. 1 K-S test of probability distribution of geotechnical parameters

图标	变异系数	偏度系数绝对值	密度函数类型
a	0.199	0.015 89	正态分布
b	0.267	0.023 64	正态分布
c	0.258	0.016 38	正态分布
d	0.208	0.022 41	正态分布
e	0.316	0.027 14	正态分布
f	0.018	0.024 58	正态分布

1.1 Bayes-Bootstrap 法扩大样本及超参数计算

由图 1 可知三种土的力学参数样本量最大的为

粉土,  $n=90$ ; 泥炭质土的最小  $n=66$ 。与文献[9]相比样本量还较少, 因此需对岩土参数进行扩充, 使样本量  $n \geq 200$ 。骆飞<sup>[12]</sup>、孙慧玲<sup>[13-14]</sup>、何成铭<sup>[15]</sup>等对 Bayes-Bootstrap 法下的数据的重构提出了不同的方法。综合对比各种方法下的数据重构, 最后发现基于插值法改进的 Bayes-Bootstrap 法比一般的 Bayes 法或者 Bootstrap 法的数据重构不仅存在效率较高, 而且也能逐步扩展到取样之外的样本信息的优势。故本文把勘察得到的小样本作为先验信息, 基于插值法改进的 Bayes-Bootstrap 法对样本进行扩充。方法如下:

设  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  是从某层土的总体样本中随机抽取的有限样本, 并将这些样本按照某一步距  $h$  随机分为  $k$  组 ( $h, k$  都为整数), 其中  $h = n/k$ . 每组样本里有  $h$  个数据,  $B_1 = (x_1, x_2, \dots, x_h), \dots, B_k = (x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ . 其中  $k = n - h + 1$ . 则样本量矩阵为

$$B = [B_1, B_2, B_k] = \begin{bmatrix} x_1 & x_{h+1} & \cdots & x_k \\ x_2 & x_{h+2} & \cdots & x_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_h & x_{2h} & \cdots & x_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

此时仅对原样本分组, 样本容量没有得到改变. 改变样本量的方法是对每组数据进行从小到大排序:

$B_{(1)} = (x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(h)}), \dots, B_{(k)} = (x_{(k)}, x_{(k+1)}, \dots, x_{(n)})$ , 就得到岩土参数样本数据的顺序的统计量为

$$B^* = [B_{(1)}, B_{(2)}, B_{(k)}] = \begin{bmatrix} x_{(1)} & x_{(h+1)} & \cdots & x_{(k)} \\ x_{(2)} & x_{(h+2)} & \cdots & x_{(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(h)} & x_{(2h)} & \cdots & x_{(n)} \end{bmatrix} \quad (2)$$

对  $x_{(i)}$  的观测值的做邻域可得

$$\begin{cases} A_1 = \left[ x_{(1)} - \frac{(x_{(2)} - x_{(1)})}{m}, x_{(1)} - \frac{(x_{(2)} - x_{(1)})}{c} \right] \\ A_2 = \left[ x_{(2)} - \frac{(x_{(3)} - x_{(2)})}{m}, x_{(2)} - \frac{(x_{(3)} - x_{(2)})}{c} \right] \\ A_n = \left[ x_{(h)} - \frac{(x_{(h+1)} - x_{(h)})}{m}, x_{(h)} - \frac{(x_{(h+1)} - x_{(h)})}{c} \right] \end{cases}$$

经笔者试算取不同的  $m$  值时采用式(3)扩展形成的样本与原始数据的相似度很高, 不足以表征地层的总体信息, 因此把式(3)加以改正, 采用另外一种方式去对样本量进行扩展, 如式(4).

$$\begin{cases} A_1 = \left[ x_{(1)} - \frac{(x_{(2)} - x_{(1)})}{x_{(1)}x_{(2)}}, x_{(1)} + \frac{(x_{(2)} + x_{(1)})}{x_{(1)}x_{(2)}} \right] \\ A_2 = \left[ x_{(2)} - \frac{(x_{(3)} - x_{(2)})}{x_{(2)}x_{(3)}}, x_{(2)} + \frac{(x_{(3)} + x_{(2)})}{x_{(2)}x_{(3)}} \right] \\ A_n = \left[ x_{(h)} - \frac{(x_{(h+1)} - x_{(h)})}{x_{(h)}x_{(h+1)}}, x_{(h)} + \frac{(x_{(h+1)} - x_{(h)})}{x_{(h)}x_{(h+1)}} \right] \end{cases} \quad (4)$$

此时  $x_{(0)}$  便可从式(5)中确定(取区间的左端点值):

$$A_1 = \left[ x_{(1)} - \frac{(x_{(2)} - x_{(1)})}{x_{(1)}x_{(2)}}, x_{(1)} + \frac{(x_{(2)} + x_{(1)})}{x_{(1)}x_{(2)}} \right] \quad (5)$$

$x_{(h+1)}$  从式(6)中确定(取区间的右端点值):

$$A_n = \left[ x_{(h)} - \frac{(x_{(h+1)} - x_{(h)})}{x_{(h)}x_{(h+1)}}, x_{(h)} + \frac{(x_{(h+1)} - x_{(h)})}{x_{(h)}x_{(h+1)}} \right] \quad (6)$$

每次计算结束后样本增加 2 个, 之后对第 2 组到第  $k$  组的样本量进行重复操作, 完成之后样本总量扩充为  $n_1 + 2k$  个, 依次重复上述步骤, 直至样本达到各个参数的样本量  $n \geq 200$ . 之后做出各个参数样本频率直方图如图 2. 同理可做出 K-S 检验表, 也能验证图 2 也是符合正态分布的. 但限于篇幅问题, 不再一一列举.

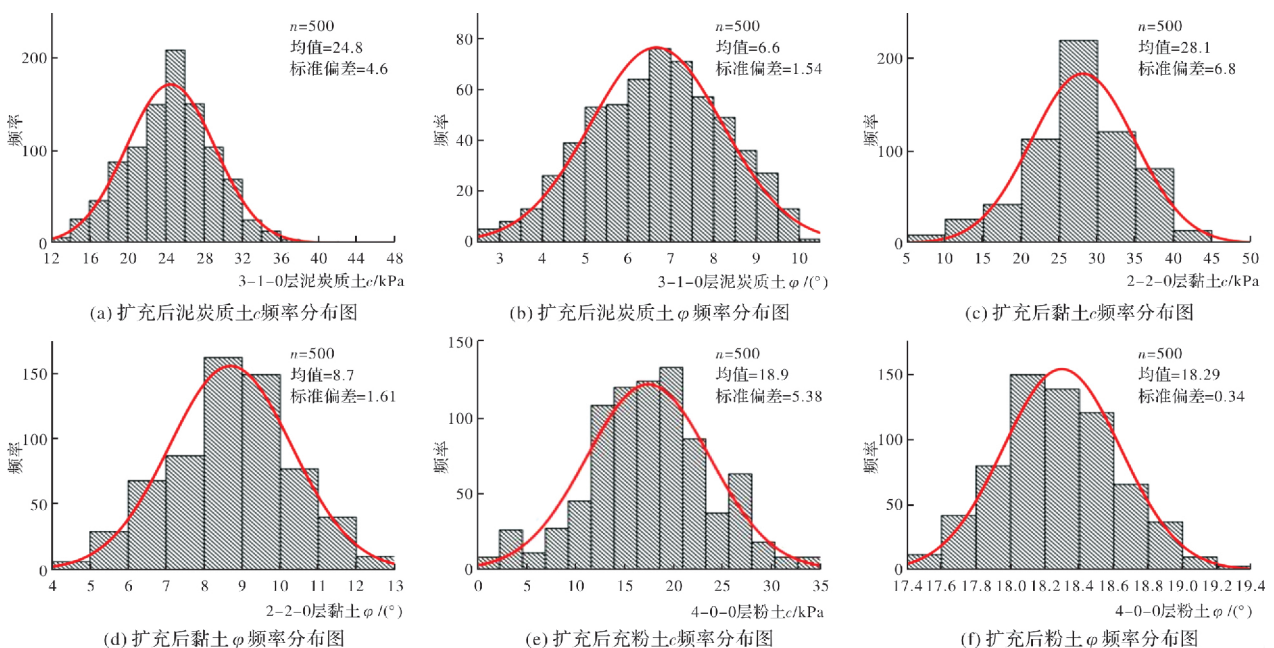


图 2 插值改进 Bayes-Bootstrap 扩充后的样本分布图

Fig. 2 The sample distribution after extended Bayes-Bootstrap

从图 1 和图 2 可知, 岩土力学参数的先验与后验分布基本都符合正态分布, 在得到先验信息与样本信息分布之后根据文献 9 所提供的方法计算后验超参数, 以确定后验分布表达式, 文献[2]也指

出在样本分布为  $N(\mu, \sigma^2)$  的正态分布时, 样本的后验分布为服从  $t(v_n, \mu(\bar{x}), \sigma_n^2/k_n)$  参数的一元  $t$  分布,  $v_n, \mu(\bar{x}), \sigma_n^2/k_n$  为后验的超参数, 具体计算方法参见文献[9]。相关参数计算后归入表 2。

表 2 超参数计算表  
Tab. 2 Calculation table of super parameters

土层	快剪 状态	先验分布			样本分布			后验超参数							
		$n_0$	$\mu_0$	$\sigma_0^2$	$n$	$\mu$	$\sigma^2$	$r/2$	$\lambda/2$	$k$	$v_n$	$k_n$	$\mu(\bar{x})$	$v_n\sigma_n^2$	$\sigma_n^2$
3-1-0 泥炭质土	$c/\text{kPa}$	66	24.73	4.94	500	24.8	4.6	24.73	4.94	1.1	549.5	501.1	24.85	2 305.28	4.2
	$\varphi/(^{\circ})$	66	6.3	1.68	500	6.66	1.54	6.3	1.68	1.1	512.6	501.1	6.65	771.82	1.5
2-2-0 黏土	$c/\text{kPa}$	72	28.5	7.36	500	28.1	6.8	28.5	7.36	1.1	557	501.1	28.1	3 407.92	6.1
	$\varphi/(^{\circ})$	72	8.5	1.77	500	8.7	1.61	8.5	1.77	1.1	517	501.1	8.7	806.93	1.6
4-0-0 粉土	$c/\text{kPa}$	90	18.7	5.9	500	18.9	5.38	18.7	5.9	1.1	537.4	501.1	18.9	2 696.42	5.0
	$\varphi/(^{\circ})$	90	18.5	0.34	500	18.29	0.34	18.5	0.34	1	537	501	18.3	170.34	0.3

表 2 中  $n_0, \mu_0, \sigma_0$  和  $n, \mu, \sigma$  分别为先验分布图 1 中及改进 Bayes - Bootstrap 扩展后的分布图 2 中样本的样本量、均值和标准偏差。得到超参数后, 通过 MATLAB 做出三种土六种参数的先验、样本、后验分布图, 如图 3。

从图 3 可以看出, 三种土六个参数的先验分布与样本分布的形式基本一致。因为在数据重构过程中某个值的频率如果很大, 该值在数据重构时所占比重会很大, 故先验分布与样本分布均值很接近, 一定程度上对原始先验样本的依赖性较高, 故两者的相似性较高。另外随着样本增加参数均值也是逐渐收敛的, 也说明岩土参数不需要达到 200 以上, 仅需要一个合适的样本量, 此时既能得到准确的参数取值, 也可节约成本。另外比较三种土  $c$  的后验分布都较先验分布、

样本分布集中, 取值更加方便; 而三种土  $\varphi$  的后验分布则表现出与样本和先验分布之间区别不是很大, 从表 1 可知三种土  $\varphi$  的先验与样本分布中标准偏差  $\sigma^2$  都较小(最大为 1.77), 故数据间的离散性不是很强, 导致 Bayes 大样本法的后验分布与样本和先验分布相比的效果不是很明显, 尤其 4-0-0 层粉土  $\varphi$  的( $\sigma^2=0.34$ ) 后验分布的拟合效果远不及样本和先验分布, 但是由于样本的增加, 最大后验分布密度可信区间是在减小的, 这与分布的形式无关。图 3 也在一定程度上说明了样本的增加, 确实可更准确、更方便地确定岩土参数的取值。随着样本的增加, 各地层参数取值是逐渐收敛的, 但是样本应该取为多少? 也就是说没必要把样本量勘察很大, 需要一个合理的样本量, 它既能节约成本, 又能带来准确的地层信息。

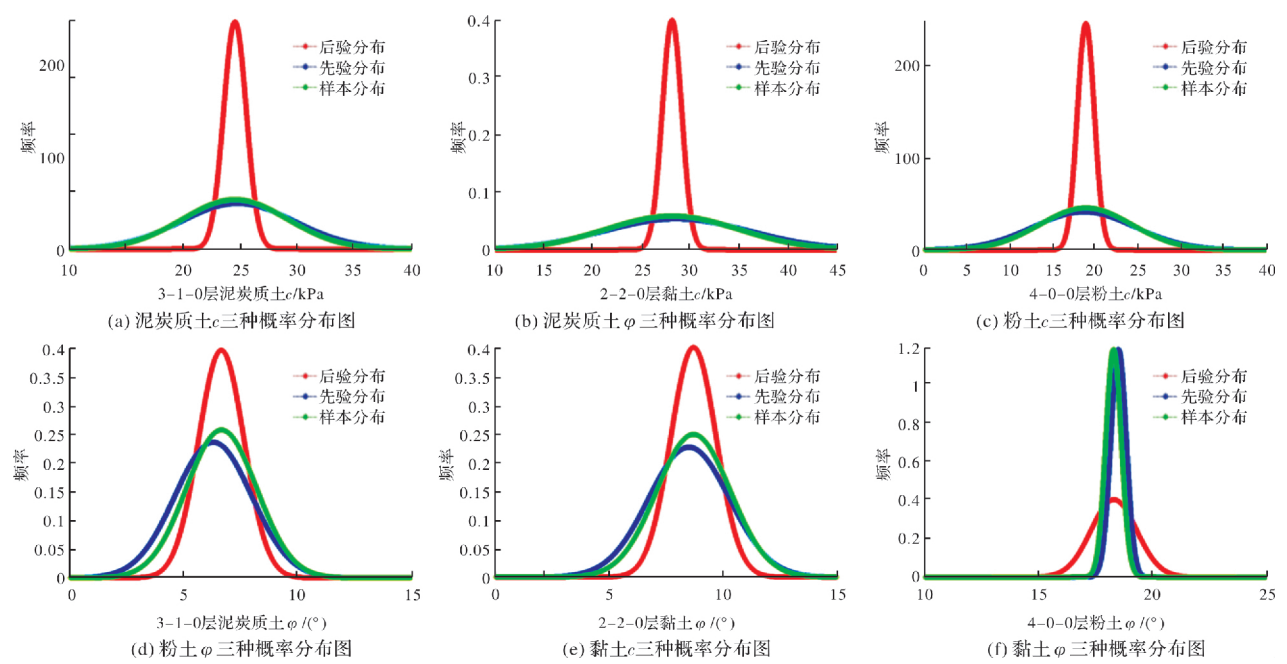


图 3 力学参数样本、先验、后验概率分布图

Fig. 3 Sample, prior and posterior probability distribution of mechanical parameters



## 1.2 岩土参数 Bayes 法最大后验密度可信区间

通常情况下一个区间的选择是否合理,区间的精度即区间长度是可以通过可信度  $1-\alpha$  来反应的.理论上区间可信度  $1-\alpha$  越大,区间越短效果越好.通常寻找最优可信区间的方法是给定一个  $\alpha$ ,控制可信度(本文中  $\alpha=0.05$ ,即可信度为 95%),寻找长度最短的区间.通常可获得的可信度为  $1-\alpha$  的区间不止一个,但必定会有一个是最短的<sup>[2]</sup>.等尾可信区间<sup>[16]</sup>在实际中应用较为广泛,且计算方便,但是不是最好的,即区间长度还不是最短.若后验分布是单峰对称,则等尾可信区间是最好的.要使可信区间最短,并且把后验密度的点都包含进去,而在区间外的点的后验密度值都不会超过区间内的点的后验密度值,这样的区间就称为最大后验密度可信区间,如图 4 所示.

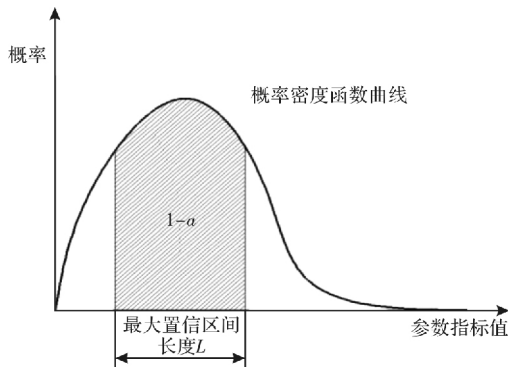


图 4 最大后验密度可信区间示意图

Fig. 4 Schematic diagram of confidence interval of maximum posteriori density

样本足够大时,参数  $\mu$  后验分布可用一个与先验分布无关的分布  $N(\mu(\bar{x}), I_n^{-1}(\mu))$  来代替<sup>[9]</sup>,其中  $\mu(\bar{x})$  为大样本情况下后验分布均值,  $I_n^{-1}(\mu)$  为其观测 Fisher 信息量的倒数,在后验分布为一元  $t$  分布时:

$$I_n^{-1}(\mu) \approx \frac{\sigma_n^2}{k_n} \quad (7)$$

其中,  $k_n = n + k$ .

此时参数  $\mu$  的最大后验密度可信区间为

$$[\mu(\bar{x}) - \mu_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{I_n^{-1}(\mu)}, \mu(\bar{x}) + \mu_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{I_n^{-1}(\mu)}] \quad (8)$$

式中:  $\mu_{\frac{\alpha}{2}}$  为标准正态分布  $N(0, 1)$  情况下上侧分位数,  $\alpha=0.05$  时取 1.96. 岩土力学参数在工程中采用标准值<sup>[1]</sup>,标准值可以采用下式确定.

$$\mu_k = \gamma_s \mu \quad (9)$$

式中:  $\mu_k$  为土体参数标准值;  $\gamma_s$  为统计修正系数,即

$$\gamma_s = 1 \pm \left( \frac{1.704}{\sqrt{n}} + \frac{4.678}{n^2} \right) \frac{\sigma}{\mu} \quad (10)$$

考虑到不利组合,对于抗剪强度指标  $\gamma_s$  取负号<sup>[1]</sup>,式中  $n$ 、 $\mu$ 、 $\sigma$  分别为 Bayes - Bootstrap 扩展后的样本分布图 3 中样本量、均值和标准偏差.据此就可得到三种土  $c$ 、 $\varphi$  的最大后验密度可信区间、标准值、经典统计学区间等,如表 3.

表 3 力学参数的后验密度可信区间

Tab. 3 Posterior density confidence interval of mechanical parameters

土层	固快状态	标准值	最大后验密度可信区间	经典统计学区间
3-1-0 层	$c/\text{kPa}$	24.69	[24.58, 24.92]	[20.3, 28.7]
泥炭质土	$\varphi/(\circ)$	6.56	[6.54, 6.76]	[4.23, 9.09]
2-2-0	$c/\text{kPa}$	27.90	[27.84, 28.27]	[22.99, 33.21]
黏土	$\varphi/(\circ)$	8.60	[8.58, 8.79]	[6.21, 11.19]
4-0-0 层	$c/\text{kPa}$	18.72	[18.68, 19.07]	[14.35, 23.45]
粉土	$\varphi/(\circ)$	18.25	[18.20, 18.30]	[17.15, 19.43]

从表 3 中可直观地看出三种土的力学参数的标准取值都在最大后验密度可信区间与典统计学区间内,并且与最大后验密度可信区间的差距更小.经典统计学区间长度总体比最大后验密度可信区间长,过于保守,因其上限值都比最大后验密度区间大,下限比最大后验密度区间小.最大后验密度区间较短,在参数的取值上比经典统计学的取值更加方便,在此证实了 Bayes 大样本方法的实用性.值得指出的是:4-0-0 层粉土  $\varphi$  样本分布的标准偏差虽然很小,但在同一置信水平下经典统计学区间还是比 Bayes 大样本最大后验密度可信区间长,这是因随样本量增多时,从获得的样本中可观测到费希尔信息量  $I(\mu)$  也会逐渐增加,对样本总体分布情况的掌握度会更全面,导致  $I_n^{-1}(\mu)$  会减小,区间长度变得较短.这也在一定程度上说明了最大后验密度可信区间与分布的形态无关,主要取决于所勘测到的样本信息值.

## 2 Bayes 法岩土参数最小样本量的确定

随着样本数的增加,样本的特征参数值是逐渐收敛的.但要获得大量数据,需要花费巨大成本,统计分析的目的就是在花费成本与可靠值之间寻找一个平衡点,力求最小费用情况下获得最准确参数.

### 2.1 岩土参数的变异性与达到收敛值 $\mu(\bar{x})$ 时最小样本量确定

传统的经典统计学方法指出,确定岩土参数

的取值时, 样本一般取件不超过 20 件, 但是这样岩土参数概率分布的特征参数是否收敛, 这值得考验, 因此本文从大样本角度论述了岩土参数取值达到收敛时所需的最小样本量并给出建议值。

土体的变异系  $\delta$  由下式确定:

$$\delta=\frac{\sigma}{\mu}$$

(11)

式中,  $\mu$ 、 $\sigma$  分别为样本分布均值及标准方差。

计算出各土层参数的变异系数、各参数在样本趋于无穷时参数的最后收敛值及该值在 95% 可信区间内的变动范围作为土体强度参数的包络线, 为寻找样本数量时提供参照标准。

从图 2 知当样本量达到 500 时, 参数变异系数  $\delta$  很小, 并已保证岩土参数  $\mu$  是收敛的。实际上大样本情况下岩土参数样本趋于无穷时岩土参数的收敛值就近似等于后验分布中  $t$  分布的位置参数  $\mu(\bar{x})$  的值, 据此可寻找最小样本量, 让力学参数均值达收敛值附近。

当得到岩土参数趋于无穷时的收敛值, 反过来寻找样本量最少应该为多少, 才能得到表征地层信息的合理参数取值。在样本趋于无穷时岩土参数收敛值近似等于后验  $t$  分布中位置参数  $\mu(\bar{x})$  为

$$\mu(\bar{x})=\frac{\overline{nx}+k\mu_0}{n+k}$$

(12)

式中:  $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^n x_n}{n}$ ,  $k=\frac{\lambda}{2\sigma}$ ,  $k$ 、 $\lambda$  为后验超参数;  $\mu_0$  为先验信息均值。

在样本量为 200 时, 岩土参数是收敛的, 故式 (12) 中的  $\mu_0$ 、 $k$ 、 $\lambda$  等参数可以保守地取表 2 中的值。此时对 (12) 式取极限为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\bar{x})=\frac{\overline{nx}+k\mu_0}{n+k} \approx \bar{x}$$

(13)

式中:  $\mu(\bar{x})$  为后验均值;  $n$  为样本量;  $k$ 、 $\lambda$  为先验超参数, 因为本文已经从大样本的情况下论证了岩土力学参数在本文的样本量时是收敛的, 故而  $k$ 、 $\lambda$  可以保守地取表 2 中的值。

据式 (13) 便可绘出样本量与收敛值间的关系。以泥炭质土  $\varphi$  为例, 为了与经典统计学方法比较, 也在同一个图中标注了经典统计学方法的 95% 及 Bayes 法的最大后验密度的可信区间为其包络区间, 为寻找合适的样本量提供依据, 如图 5 所示。

由图 5 清晰可见, 采用经典统计学方法确定的 95% 最大后验密度可信区间比 Bayes 法确定的宽, 这是过于保守的。在参数取值上来说, 一定程度

上 Bayes 法比经典统计学方法更具优势, 但从取样样本角度来看, 经典统计学方法又比 Bayes 方法更具优势, 从图 5 可知, 经典统计学方法达到样本量为 95% 的可信区间时, 所需要的样本量仅仅只需要 10 个左右, 而 Bayes 方法达到最大后验密度可信区间的范围则需要 40 个左右。泥炭质土  $\varphi$  的样本选取上本文提取到了 66 个 (图 1b 图), 但是采用 Bayes-Bootstrap 扩充后样本为 500 个 (图 2b 图) 故扩充后的样本是远远大于 Bayes 法的最大后验密度可信区间个数的, 本文确定的参数取值是能代表本地层实际情况的, 也是可以为小样本

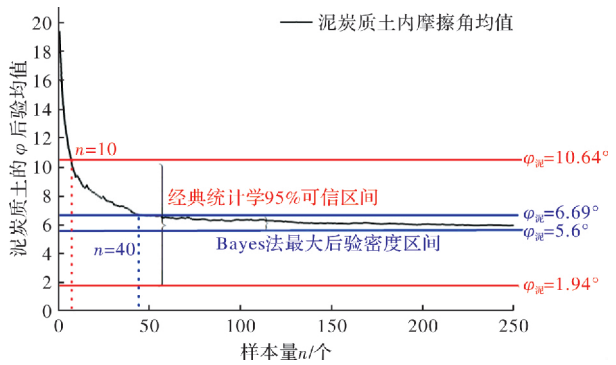


图 5 后验均值与样本量之间的关系图

Fig. 5 Relationship between posterior mean and sample size

方法提供检验的。同理可做出其余土体指标的收敛值和样本量的关系图, 从而确定个土体指标达到收敛值时的最小样本量。同时将经典统计学方法以及 Bayes 法下的标准值收敛值等整理归入表 4 中。

表 4 岩土参数取值和最小样本量确定

Tab. 4 Determination of soil parameters and minimum sample size

土名	参数	Bayes 法 标准值	经典统计 学方法标 准值	Bayes 法最 本量/个	经典统计 学方法样 本量/个
泥炭质土	$c/\text{kPa}$	24.7	29.2	40	15
	$\varphi/(\circ)$	6.1	7.3	40	10
粉土	$c/\text{kPa}$	26.2	27.9	25	15
	$\varphi/(\circ)$	6.5	7.4	30	15
黏土	$c/\text{kPa}$	17.2	18.6	35	8
	$\varphi/(\circ)$	17.3	18.6	30	8

由图 5 和表 4 可知, 岩土力学参数后验均值  $\mu(\bar{x})$  开始时随样本量的增加也在不断波动, 当样本量到达某个值时, 后验均值  $\mu(\bar{x})$  逐渐稳定下来, 且不再随样本的变化而变化。本文采用的样本量是远远大于所需最小样本量, 故计算结果能很好地体现地层的总体信息, 为小样本方法提供检验, 有很好的工程意义。

### 3 滇池卫城深基坑开挖有限元分析

#### 3.1 基坑模型的建立及参数取值

Bayes 法所确定的收敛值和标准值与经典统计学方法所确定的方法是不同的, 为了检验何种方法确定的参数取值的准确性更高, 以昆明某地铁基坑开挖过程为案例, 结合开挖过程中的监测数据, 通过 maids-GTS NX 有限元软件对基坑开挖过程进行模拟, 代入不同方法下确定的土力学参数模拟计算开挖过程中基坑深层水平位移的变化, 并和实际监测数据对比分析, 以验证方法的可行性.

滇池卫城站位于环湖东路与红塔东路交叉口的西南象限. 地表以下依次分布着广泛的素填土、泥炭质土、粉土、黏土等. 具体开挖顺序如图 6:

通过对勘察报告的数据整理, 结合本文的算法得出滇池卫城基坑各个地层的 Bayes 法收敛值以及经典统计学方法  $c$ 、 $\varphi$  的标准值, 采用参数见表 5 和表 6.

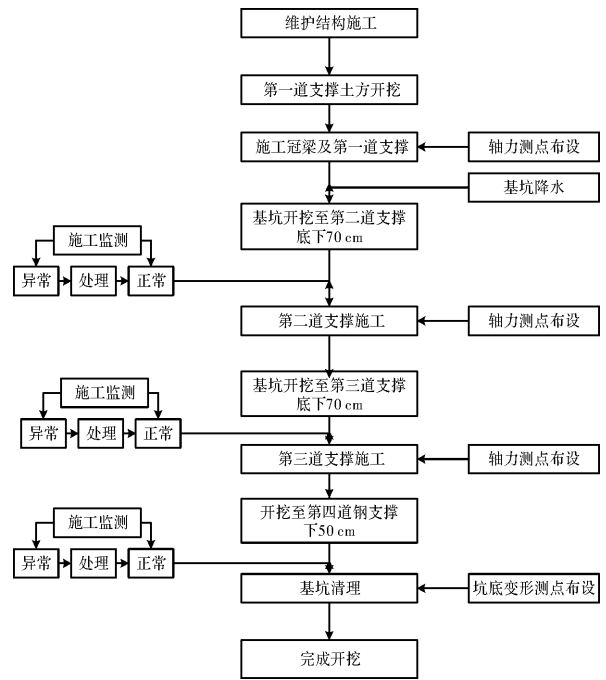


图 6 基坑开挖流程图

Fig. 6 Flow chart of foundation pit excavation

表 5 基坑开挖模拟分析时不同地层岩土参数指标取值

Tab. 5 Values of geotechnical parameters of different strata in foundation pit excavation simulation analysis

地层编号	$E_s/\text{MPa}$	$\nu$	$r/\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$	$k_0$	$r_{\text{sat}}$	$e_0$
(1)1-2 素填土	3.00	0.30	17.00	0.60	17.80	1.45
(2)2-2 泥炭质土	2.60	0.42	12.20	0.71	20.30	5.22
(2)3-3 黏土	3.00	0.40	17.30	0.66	20.30	1.27
(3)2-3 黏土	4.00	0.38	17.77	0.62	21.00	1.07
(3)4-3 粉砂	10.00	0.25	18.20	0.33	21.00	1.02
(4)2-3 黏土	4.00	0.41	17.46	0.70	21.00	1.18
(4)3-3 黏质粉土	6.50	0.30	17.94	0.43	21.00	1.07
(4)4-3 粉砂	10.00	0.25	20.00	0.33	21.00	1.07
(4)5-3 细砂	12.00	0.25	19.00	0.33	21.00	1.10
(5)2-3 黏土	4.50	0.35	17.29	0.55	21.00	1.27

注: 表中  $\nu$  为泊松比,  $r_{\text{sat}}$  为饱和重度  $\text{kN}/\text{m}^3$ ,  $k_0$  静止土压力系数.

表 6 模拟计算时岩土参数  $c$ 、 $\varphi$  取值

Tab. 6 Values of geotechnical parameters  $c$  and  $\varphi$  during simulation calculation

地层编号	Bayes 法			经典统计学法		
	$n/\text{个}$	$c/\text{kPa}$	$\varphi/(\text{^\circ})$	$n/\text{个}$	$c/\text{kPa}$	$\varphi/(\text{^\circ})$
(1)1-2 素填土	12	13.8	4.2	60	15.00	5.00
(2)2-2 泥炭质土	12	11.4	3.6	60	12.00	4.00
(2)3-3 黏土	12	15.1	3.4	60	16.00	4.00
(3)2-3 黏土	12	15.4	3.4	60	16.00	5.00
(3)4-3 粉砂	12	3.8	23.2	60	4.00	25.00
(4)2-3 黏土	12	18.1	4.1	60	19.00	4.00
(4)3-3 黏质粉土	12	11.7	9.8	60	12.00	11.00
(4)4-3 粉砂	12	3.8	25.3	60	4.00	27.00
(4)5-3 细砂	12	3.7	32.9	60	4.00	35.00
(5)2-3 黏土	12	18.1	6.4	60	19.00	7.00

拟建车站为地下二层岛式车站, 车站主体总外包长度为 205.9 m, 端头井段外包宽度 25.5 m,

基坑深度标准段深度 18.49~18.86 m, 端头井段 19.19~21.58 m.

拟建工程围护结构采用地下连续墙与内支撑相搭配的围护体系,其中地下连续墙采用 800 mm 厚的墙体为围护结构,基坑第一道支撑采用  $800 \times 800$  现浇钢筋混凝土支撑,支撑在冠梁上。其他三道支

撑为  $\Phi 800$ ,  $t=16$  mm 的钢支撑,支撑在连续墙上。地下连续墙、冠梁、混凝土支撑、混凝土角撑、导墙采用 C30 混凝土,钢筋采用 Q235。施工工序如图 6 所示,围护结构布置及断面选择如图 7。

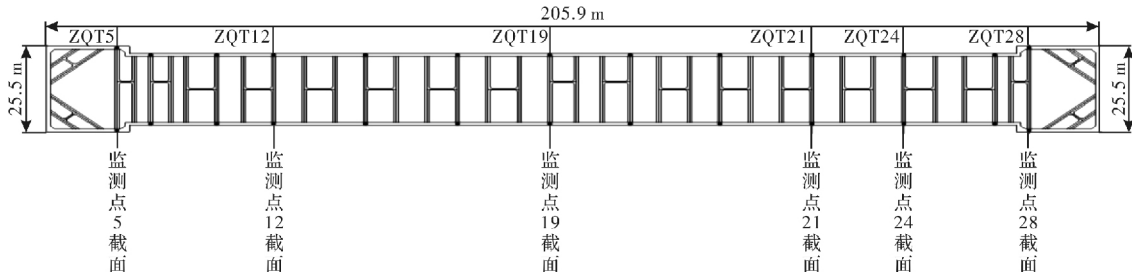


图 7 基坑深层水平位移监测点布置和断面选择图

Fig. 7 Layout of monitoring points and section selection for deep horizontal displacement of foundation pit

力学参数的本构模型的选择对计算结果也影响较大。修正摩尔库伦准则能模拟包括软土和硬土在内的不同类型的土体行为的双硬化(压缩硬化和剪切硬化)弹塑性模型,它考虑了土体的剪胀特性,引入了屈服帽盖,土体刚度随应力变化而变化,与实际情况更加符合,故本文参数的本构模型为修正摩尔库伦模型。

根据实际情况选取监测数据比较全面的 6 个监测点断面进行有限元建模分析,监测点布置及断面选择如图 7 所示。本基坑开挖深度  $H=16$  m,因基坑左右两侧 3 倍深度范围内影响较大,故基坑左右各取 50 m,深度方向取围护地下连续墙深度的 2 倍,取 60 m,按照土层信息对地层进行划分共计 50 468 个节点,基坑网格模型如图 8 所示:

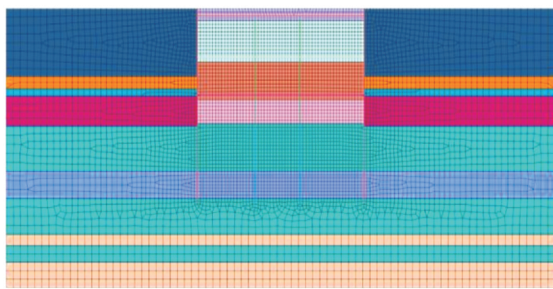


图 8 滇池卫城站有限元二维基坑模型

Fig. 8 Finite element model of foundation

### 3.2 监测结果与模拟结果对比分析

如果规定图 9 中红色部分表示开挖过程中基坑深层水平位移方向向右为正,则左侧蓝色部分为负,两者数值接近,变形方向不同则颜色也不同。通过提取得到不同开挖阶段基坑个某点的深层水平位移、地表沉降等数据与实际监测结果对比,如图 10 所示。

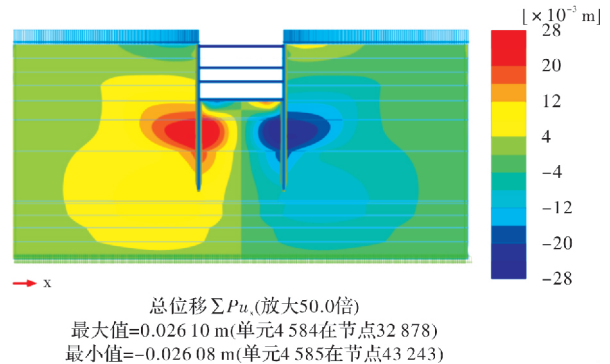
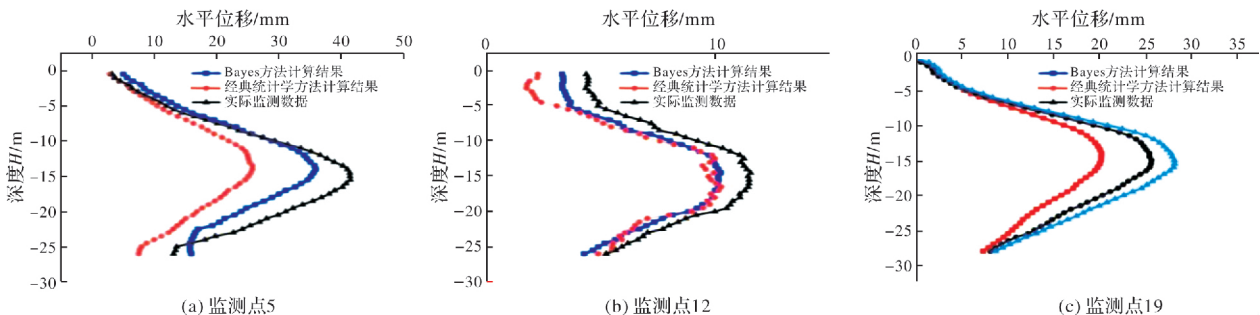


图 9 截面 19 开挖完成后水平方向位移云图

Fig. 9 Horizontal displacement nephogram of section 19 after excavation

从图 10 可以看出,基坑水平位移的有限元计算结果与实际监测结果相比有如下特点:有限元计算曲线与实测曲线发展规律基本一致,均表现为中间部分最大,两头较小,在深度 26 m 范围内,三种曲线的最大值基本出现在相同的位置处;





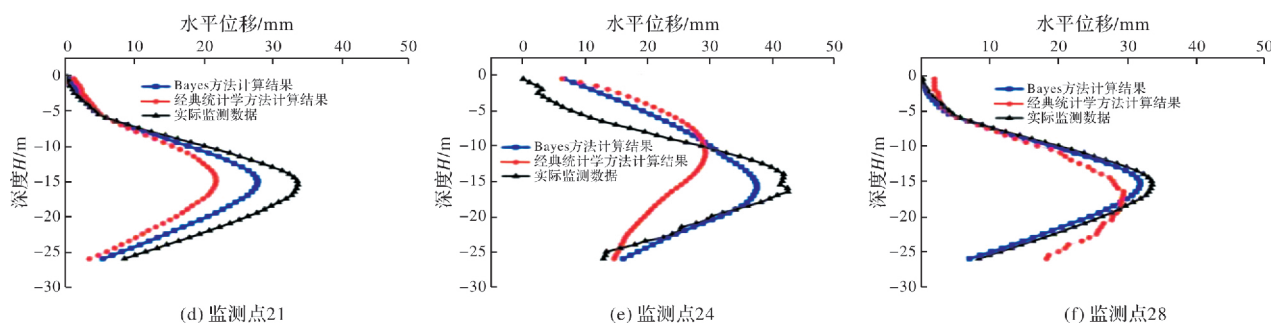


图10 基坑水平位移对比曲线

Fig. 10 Comparison curve of horizontal displacement of foundation pit

模拟结果均比实测结果小,用经典统计学方法确定的结果计算所得的水平位移最小,Bayes方法次之。但Bayes法计算值模拟所得的结果与实际监测情况更加接近。

#### 4 结论

本文从Bayes大样本统计法角度出发,采用Bayes-Bootstrap法对勘察所得小样本进行模拟抽样并且对样本进行扩充,分析岩土参数的收敛取值,并反过来给出达到参数收敛时的最小样本量,以一个实际基坑工程为例,对所得参数进行检验,可得出主要如下结论:

(1)岩土参数在小样本时,把勘察样本加以修正可作为先验信息。样本不足时可通过基于插值法改进的Bayes-Bootstrap法对样本进行扩充,结合先验分布,样本分布推导的后验分布,得出的最大后验密度可信区间比经典统计学所得区间更窄, $c$ 、 $\varphi$ 的标准值就落在最大后验密度可信区间内。且最大后验密度可信区间与分布的形式无关,样本量越大,对样本总体的认识越充足,最大后验密度可信区间越窄,取值越方便;

(2)当样本量增加,岩土参数的收敛值逐渐向后验均值 $\mu(\bar{x})$ 靠近,先验分布的影响逐渐减小,误差数据逐渐被洗去;

(3)Bayes法所确定岩土参数取值区间较小,但是所需样本量较大。而经典统计学法给定岩土参数区间较大,精度不高,所需样本量较少。用Bayes法所确定的参数取值在基坑开挖时基坑深层水平位移明显比用经典统计学方法确定取值效果好,Bayes法的计算结果与实际结果更加吻合。

#### 参考文献 References

[1] 李早,赵树德.基于可靠性理论的岩土工程反分析设计[J].西安建筑科技大学学报(自然科学版),2006,38(2):159-162,177.

LI Zao, ZHAO Shude. Back analysis design of geotechnical engineering based on reliability theory[J]. J. of Xi'an Univ. of Arch. & Tech. (Natural Science Edition), 2006,38(2): 159-162, 177

[2] 韦来生,张伟平.贝叶斯分析[M].北京:中国科学技术大学,2013.

WEI Laisheng, ZHANG Weiping. Bayesian analysis [M]. Beijing: University of Science And Technology of China, 2013.

[3] KEATON J R, PONNABOYINA H. Selection of geotechnical parameters using the statistics of small samples[J]. ASCE Geo- Congress, 2014, 234(1): 1532-1541.

[4] 王桂林,杨洋,孙帆,等.边坡失效概率分布特性影响因素研究[J].西安建筑科技大学学报(自然科学版),2020,52(4):463-469,484.

WANG Guilin, YANG Yang, SUN fan, et al. Study on Influencing Factors of probability distribution characteristics of slope failure[J]. J. of Xi'an Univ. of Arch. & Tech. (Natural Science Edition), 2020, 52(4): 463-469, 484.

[5] 朱唤珍,李夕兵,官凤强.大样本岩土参数概率分布的正态信息扩散推断[J].岩土力学,2015,36(11):3275-3282.

ZHU Huanzhen, LI Xibing, GONG Fengqiang. Inference of normal information diffusion for probability distribution of large sample geotechnical parameters [J]. Geotechnical Mechanics, 2015, 36(11): 3275-3282.

[6] 苏永华,何满潮,孙晓明.大子样岩土随机参数统计方法[J].岩土工程学报,2001,23(1):117-119.

SU Yonghua, HE Manchao, SUN Xiaoming. Statistical method for random parameters of large sample[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, 23(1): 117-119.

[7] Luis-Fernando Contreras, Edwin T. Brown. Slope reliability and back analysis of failure with geotechnical parameters estimated using Bayesian inference[J].

- Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering, 2019, 11(3): 628-643.
- [8] Luis Fernando Contreras, Edwin T Brown, Marc Ruest. Bayesian data analysis to quantify the uncertainty of intact rock strength[J]. Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering, 2018, 10(1), 11-31.
- [9] 阮永芬,魏德永,杨均,等.用 Bayes 法及后验分布极限确定土力学参数[J].岩土工程学报:2020,42(3):438-446.
- RUAN Yongfen, WEI Deyong, YANG Jun, et al. Determination of soil mechanical parameters by Bayes method and posterior distribution limit[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering: 2020, 42(3): 438-446.
- [10] 官凤强,侯尚骞,李夕兵.岩土参数截尾分布的正态信息扩散推断方法[J].武汉大学学报(工学版),2016,49(5):661-667,673.
- GONG Fengqiang, HOU Shangqian, LI Xibing. The normal information diffusion inference method for the tailoring distribution of geotechnical parameters[J]. Journal of Wuhan University (Engineering Edition), 2016, 49(5): 661-667, 673.
- [11] 张继周,缪林昌.岩土参数概率分布类型及其选择标准[J].岩石力学与工程学报,2009,28(S2):3526-3532.
- ZHANG Jizhou, MIAO Linchang. Probability distribution types and selection criteria of geotechnical parameters[J]. Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, 28(S2): 3526-3532.
- [12] 骆飞,罗强,蒋良淮等.小样本岩土参数的 Bootstrap 估计及边坡稳定分析[J].岩石力学与工程学报,2017,36(2):370-379.
- LUO Fei, LUO Qiang, JIANG Liangwei, et al. Bootstrap estimation of small sample geotechnical parameters and slope stability analysis[J]. Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2017, 36(2): 370-379.
- [13] 孙慧玲,胡伟文,刘海涛.小样本情况下参数区间估计的改进方法[J].哈尔滨理工大学学报,2017,22(1):109-113.
- SUN Huiling, HU Weiwen, LIU Haitao. An improved method of parameter interval estimation in small samples[J]. Journal of Harbin University of Technology, 2017, 22(1): 109-113.
- [14] 孙慧玲,胡伟文,杨美妮. Bayes Bootstrap 方法在小样本参数估计中的应用[J].计算机与数字工程,2016,44(5):788-790,808.
- SUN Huiling, HU weiwen, YANG Meini. Application of Bayes bootstrap method in small sample parameter estimation[J]. Computer and Digital Engineering, 2016, 44(5): 788-790, 808.
- [15] HE cheng ming, TENG shangru, DU haidong. Simulation evaluation study of system reliability based on improved Bayes-Bootstrap method[J]. Journal of Donghua University (English Edition), 2015, 32(6): 970-973.
- [16] 康文倩,郭民之,李盛.单峰分布枢轴量的等尾与等置信区间的比较[J].数学的实践与认识,2016,46(24):156-160.
- KANG Wenqian, GUO Minzhi, LI Sheng. Comparison of equitail and isohigh confidence interval of single peak distribution pivot[J]. Practice and Understanding of Mathematics, 2016, 46(24): 156-160.
- [17] 茆诗松,程依明,濮晓龙.概率论与数理统计教程习题与解答[M].北京:高等教育出版,2006.
- MAO Shisong, CHENG Yiming, PU Xiaolong. Exercises and solutions of probability theory and mathematical statistics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006.
- [18] 田密,盛小涛.岩土工程最小勘探数据量确定方法[J].岩土力学,2019,40(S1):400-408.
- Tian MI, SHENG Xiaotao. Determination method of minimum exploration data in geotechnical engineering[J]. Geotechnical Mechanics, 2019, 40(S1): 400-408.
- [19] 董教社,成利民.岩土工程勘察中土体取样合理子样数的探讨[J].工程地质学报,2000,52(3):357-360.
- DONG Jiaoshe, CHENG Limin. Discussion on reasonable number of subsamples for soil sampling in geotechnical engineering investigation[J]. Journal of Engineering Geology, 2000, 52(3): 357-360.
- [20] 梅源,袁一力,胡长明,等.西安地铁深基坑变形模式统计规律分析[J].西安建筑科技大学学报(自然科学版),2016,48(3):371-375.
- MEI Yuan, YUAN Yili, HU Changming, et al. Statistical analysis on deformation patterns of deep foundation pit of Xi'an Metro[J]. J. of Xi'an Univ of Arch. & Tech. (Natural Science Edition), 2016, 48(3): 371-375.

(编辑 沈波)