

波形钢腹板 PC 箱梁剪力滞效应的能量变分法解

高 丽¹, 周 媛^{2,3}, 王社良², 刘 博⁴

(1. 淮阴工学院 计算机与软件工程学院, 江苏 淮安 223003; 2. 西安建筑科技大学 土木工程学院, 陕西 西安 710055;
3. 长安大学 理学院, 陕西 西安 710061; 4. 中铁二十局集团有限公司, 陕西 西安 710016)

摘要: 为研究波形钢腹板预应力混凝土箱梁的剪力滞效应, 引入 β 次曲线和近似余弦函数, 根据变分原理推导出了简支梁和悬臂梁结构在典型荷载工况下的剪力滞系数计算公式, 运用叠加法和肢解法将剪力滞计算方法推广应用到超静定桥梁的剪力滞系数求解中。采用有限元分析软件 ANSYS 和 MIDAS/FEA 建立波形钢腹板预应力混凝土箱梁空间模型, 通过对比有限元计算结果, 对能量变分解析方法进行了验证。对波形钢腹板 PC 箱梁开展了参数分析, 得到了剪力滞系数随钢腹板厚度和宽跨比变化规律。研究表明: 剪力滞系数值随纵向翘曲位移函数阶次的增加而增大, 不宜引入高阶函数来求解波形钢腹板 PC 箱梁剪力滞问题; 悬臂箱梁的剪力滞系数随着宽跨比增大显著升高, 均布荷载下的剪力滞系数比集中荷载下要大; 运用叠加法和肢解法解超静定桥梁的剪力滞问题简单高效, 结果可靠。

关键词: 波形钢腹板; 变分原理; 剪力滞; 有限元; 参数分析

中图分类号: TU391; U448. 38

文献标志码: A

文章编号: 1006-7930(2022)01-0027-08

Energy-variational method of shear-lag effect in PC box-girder with corrugated steel webs

GAO Li¹, ZHOU Yuan^{2,3}, WANG Sheliang², LIU Bo⁴

(1. Faculty of Computer and Software Engineering, Huaiyin Institute of Technology, Huai'an 223003, China;
2. School of Civil Engineering, Xi'an Univ. of Arch. & Tech., Xi'an 710055, China;
3. College of Science, Chang'an University, Xi'an 710061, China;
4. China Railway 20th Bureau Group Co., Ltd, Xi'an 710016, China)

Abstract: In order to investigate the shear lag effect of prestressed concrete box girder with corrugated steel webs, β power curve and approximate cosine function were introduced, and the calculation formula of the shear lag coefficient of simple-supported beam bridge and cantilever girder bridge under typical load conditions was deduced according to the variational principle, and then the formula was extended to solve the shear lag coefficient in statically indeterminate bridges by the method of superposition or dismemberment. By means of the finite element software ANSYS and MIDAS/FEA, the corresponding 3D model was established, and the method of energy variational analysis was verified by comparing the results with the theoretical values in the paper. The geometric parameters affecting the shear lag effect of box girder were analyzed, and the variation of shear lag coefficient with steel web thickness and width span ratio was obtained. The results show that the shear lag coefficient increases with the increase of the order of the longitudinal warping displacement function, and it is not suitable to adopt the high-order function to solve the shear lag problem of PC box girder with corrugated steel webs; the shear lag coefficient of cantilever box girder increases with the increase of width-span ratio, and the shear lag coefficient under uniform load is larger than that under concentrated load. The study proves that the method of dismemberment or superposition is simple and efficient to settle the shear lag effect of statically indeterminate bridges, and the results are reliable.

Key words: corrugated steel webs; variation principle; shear lag; FEM; parametric analysis

收稿日期: 2021-05-27

修改稿日期: 2021-12-25

基金项目: 国家自然科学基金(51678480)

第一作者: 高 丽(1976—), 女, 博士, 讲师, 研究方向: 结构振动控制。E-mail: ggl30662@163.com

通信作者: 王社良(1956—), 男, 教授, 博导, 研究方向: 新型智能材料及其在结构振动控制中的应用。E-mail: sheliangw@163.com

波形钢腹板预应力混凝土(PC)箱梁桥是将薄钢板弯折成波浪形后替换普通混凝土箱梁腹板后发展成的新型组合桥梁。由于波形钢腹板高强轻质的特性,箱梁的跨度有了新的突破,动力响应弱,抗震性能大为改善。凭借波形钢腹板的褶皱效应,腹板几乎不抵抗轴向力,由抗弯效率高的混凝土土顶底板承担竖向弯矩,受力更为合理、明确^[1-3]。钢腹板上可支模,架设迅速,维护方便,造型优雅,在50~100 m跨径桥梁方案极具竞争力。波形钢腹板PC箱梁桥自20世纪80年代法国提出后,在欧洲、日本得到成功实践,近年来,波形钢腹板PC箱梁桥在国内也得到了迅速发展^[4-5]。

与普通PC箱梁一样,波形腹板PC箱梁顶板也会受剪切变形影响,横向变形不均匀,导致正应力沿宽度方向分布不均匀^[6-7]。已有的分析表明:波形钢腹板PC组合箱梁的剪力滞问题比普通预应力混凝土箱梁更加突出。波形腹板PC箱梁设计时不能直接套用普通PC箱梁剪力滞的研究结论^[8-9]。在运用能量变分法讨论PC箱梁的剪力滞效应时,许多学者拟定了二次、三次及四次曲线作为翘曲函数,其概念清晰,求解简单,取得了丰硕的成果^[10-13]。纵向翘曲位移函数与箱梁真实翘曲位移吻合程度决定了分析结果误差大小。

对于波形钢腹板组合箱梁的剪力滞问题,理论分析尚不全面。本文引入 β 阶曲线和近似余弦函数作为箱梁纵向翘曲的位移模式,推导了等截面波形钢腹板组合箱梁剪力滞系数的近似解,通过与空间有限元法计算结果比较,提出一个可靠度高,通用性强,方便实用的波形腹板PC箱梁剪力滞系数计算方法。

$$\begin{cases} \bar{V}_{su} = \frac{1}{2} I_{su} \int E \left[\omega'' + \frac{2\beta}{\beta+1} \omega'' u' + \left(1 - \frac{2}{\beta+1} + \frac{1}{2\beta+1} \right) (u')^2 \right] + \frac{G\beta^2}{(2\beta-1)b^2} u^2 dx \\ \bar{V}_{sb} = \frac{1}{2} I_{sb} \int E \left[\omega'' + \frac{2\beta}{\beta+1} \omega'' u' + \left(1 - \frac{2}{\beta+1} + \frac{1}{2\beta+1} \right) (u')^2 \right] + \frac{G\beta^2}{(2\beta-1)b^2} u^2 dx \end{cases} \quad (5)$$

式中: E 、 G 分别为翼缘板的弹性模量和剪切模量。忽略翼缘板自身惯性矩,截面惯性矩为

$$I = 2(1+\alpha)t_u b h_u^2 + 2t_b b h_b^2 \quad (6)$$

箱梁应变能总和为

$$C = -\bar{W} + \bar{V}_{su} + \bar{V}_{sb} \quad (7)$$

由最小势能原理有

$$\delta \Pi = 0 \quad (8)$$

分部积分后可得:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = \int \left[M(x) + EI\omega'' + \frac{\beta}{\beta+1} EIu' \right] d\omega'' + EI \int \left[\frac{\beta^2 G}{(2\beta-1)Eb^2} u - \frac{\beta}{\beta+1} \omega'' - \left(1 - \frac{2}{\beta+1} + \frac{1}{2\beta+1} \right) u'' \right] du + \\ EI \left[\frac{\beta}{\beta+1} \omega'' + \left(1 - \frac{2}{\beta+1} + \frac{1}{2\beta+1} \right) u' \right]_{x_1}^{x_2} \delta u = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

根据变分原理有

1 β 次翘曲位移函数的变分解

基本假定:(1)由于波形钢腹板预应力混凝土箱梁在竖向荷载作用下服从“拟平截面假定”^[14],可引入两个广义位移函数来描述翼板变形:

$$\begin{cases} \text{挠度: } \omega(x) \\ \text{翼板纵向位移: } \mu(x, y) = h_i \left[\frac{d\omega}{dx} + (1 - \bar{y}^\beta) \cdot u(x) \right] \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \bar{y} = y/b; 0 \leq y \leq b \\ \bar{y} = (b + \alpha b - y)/(\alpha b); b \leq y \leq b + \alpha b \end{cases} \quad (2)$$

式中: $u(x)$ 为翼缘板最大转角差,其余几何参数如图1示。

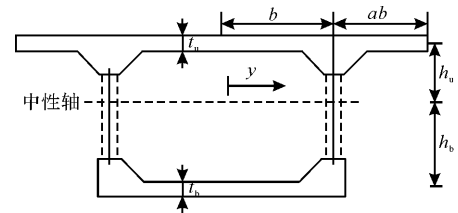


图1 波形钢腹板箱梁截面参数

Fig. 1 Section parameters of corrugated steel web box girder

(2)翼缘板为应力沿厚度均匀分布的薄板,忽略板的平面外剪应变和横向弯曲变形等微小量,不考虑波形钢腹板的剪切变形。

当箱梁弯曲时,外力势能为:

$$W = - \int M(x) \cdot \frac{d^2 \omega}{dx^2} dx \quad (3)$$

应变一位移几何关系为

$$\begin{cases} \text{顶板: } \epsilon_{xu} = \frac{\partial \mu_u(x, y)}{\partial x}; \gamma_u = \frac{\partial \mu_u(x, y)}{\partial y} \\ \text{底板: } \epsilon_{xb} = \frac{\partial \mu_b(x, y)}{\partial x}; \gamma_b = \frac{\partial \mu_b(x, y)}{\partial y} \end{cases} \quad (4)$$

上下翼板应变能分别为

$$\begin{cases} M(x) + EI\omega'' + \frac{\beta}{\beta+1}EIu' = 0 \\ \frac{\beta^2 G}{(2\beta-1)Eb^2}u - \frac{\beta}{\beta+1}\omega'' - \left(1 - \frac{2}{\beta+1} + \frac{1}{2\beta+1}\right)u'' = 0 \\ EI\left[\frac{\beta}{\beta+1}\omega'' + \left(1 - \frac{2}{\beta+1} + \frac{1}{2\beta+1}\right)u'\right]_{x_1}^{x_2} \delta u = 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{令: } \frac{1}{n} = 1 - \frac{2}{\beta+1} + \frac{1}{2\beta+1} - \frac{\beta^2}{(\beta+1)^2} \quad (11)$$

$$K = \sqrt{\frac{\beta^2 Gn}{(2\beta-1)b^2 E}} \quad (12)$$

可得简化后的表达式:

$$\begin{cases} u'' - k^2 u = \frac{\beta n \cdot Q(x)}{(\beta+1)EI} \\ \left[u' - \frac{\beta n}{\beta+1} \frac{M}{EI}\right]_{x_1}^{x_2} \delta u = 0 \end{cases} \quad (13)$$

式中: M 、 Q 分别为计算截面的弯矩和剪力。

当等截面简支梁承受集中荷载 P 时, 解的一般形式为

$$u(x) = \frac{\beta n P}{(\beta+1)EI} (C_1 \operatorname{sh} kx + C_2 \operatorname{ch} kx + u^*) \quad (14)$$

式中: u^* 为剪力 $Q(x)$ 分布有关的特解; C_1 、 C_2 为待定系数, 由边界条件确定。

翼缘板纵向正应力:

$$\sigma_x = Eh_i \left[\frac{M(x)}{EI} - \left(1 - \bar{y}^\beta - \frac{\beta}{\beta+1}\right) u' \right] \quad (15)$$

$$\text{固支边界: } u = 0 \quad (16)$$

$$\text{非固支边界: } \begin{cases} \left[u' - \frac{\beta n}{\beta+1} \frac{M}{EI}\right]_{x=x_1} = 0 \\ \left[u' - \frac{\beta n}{\beta+1} \frac{M}{EI}\right]_{x=x_2} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

同理, 可得到其他力学图式和荷载工况下的位移和边界条件的具体表达式, 最后导出应力并将剪力滞系数 λ_1 汇总到表 1。

2 近似余弦函数的变分解

余弦函数的泰勒展开公式:

$$\cos \frac{\pi \bar{y}}{2} = 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi \bar{y}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi \bar{y}}{2}\right)^4 + \dots \quad (18)$$

由上式可以看出, 余弦函数本质上是一个高阶多项式, 高次幂的系数很小, 一般取前三项已有足够的精度, 常数项不影响应力的横向分布, 可以假定翘曲位移模式为

$$\mu(x, y) = h_i \left[\frac{d\omega}{dx} + (1 - \xi \bar{y}^2 - \eta \bar{y}^3 - \zeta \bar{y}^4) u(x) \right] \quad (19)$$

式中: ξ 、 η 、 $\zeta \in [-1, 1]$ 任意参数, 为保证腹板处位移的连续条件还应有: $\xi + \eta + \zeta = 1$

$$\text{令: } n = \frac{1}{4\alpha - \beta^2}, \quad k = \sqrt{\frac{4G\gamma n}{Eb^2}} \quad (20)$$

式中:

$$\alpha = 1 + \frac{\xi^2}{5} + \frac{\eta^2}{7} + \frac{\zeta^2}{9} - \frac{2\xi}{3} - \frac{\eta}{2} - \frac{2\zeta}{5} + \frac{\xi\eta}{3} + \frac{2\xi\zeta}{7} + \frac{\eta\zeta}{4} \quad (21)$$

$$\beta = 2 \left(1 - \frac{\xi}{3} - \frac{\eta}{4} - \frac{\zeta}{5} \right) \quad (22)$$

$$\gamma = \frac{4\xi^2}{3} + \frac{9\eta^2}{5} + \frac{16\zeta^2}{7} + 3\xi\eta + \frac{16\xi\zeta}{5} + 4\eta\zeta \quad (23)$$

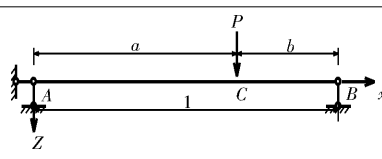
运用最小势能原理和变分原理, 最后得到应力表达式及边界条件, 并将剪力滞系数 λ_2 汇总于表 1:

$$\sigma_x = Eh_i \left[\frac{M(x)}{EI} - \left(1 - \xi \bar{y}^2 - \eta \bar{y}^3 - \zeta \bar{y}^4 - \frac{\beta}{2}\right) u' \right] \quad (24)$$

$$\left[u' - 2\beta n \cdot \frac{M(x)}{EI} \right] \delta u \Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \quad (25)$$

表 1 剪力滞系数实用计算公式汇总

Tab. 1 Summary of practical calculation formulas for shear lag coefficient

桥型-荷载工况	计算图式	剪力滞系数
简支梁-集中荷载		<p>AC 段: $\lambda_1 = 1 - \frac{\beta n l}{(\beta+1)k b x} \left(1 - \bar{y}^\beta - \frac{\beta}{\beta+1} \right) \left[\frac{\operatorname{sh} k(l-a)}{\operatorname{sh} k l} \operatorname{sh} k l \right]$</p> <p>$\lambda_2 = 1 - \frac{2\beta n l}{k b x} \left(1 - \xi \bar{y}^2 - \eta \bar{y}^3 - \zeta \bar{y}^4 - \frac{\beta}{2} \right) \left[\frac{\operatorname{sh} k(l-a)}{\operatorname{sh} k l} \operatorname{sh} k l \right]$</p> <p>CB 段: $\lambda_1 = 1 - \frac{\beta n l}{(\beta+1)(l-x)k a} \left(1 - \bar{y}^\beta - \frac{\beta}{\beta+1} \right) \left[\operatorname{sh} k a \cdot \operatorname{ch} k x - \operatorname{sh} k a \cdot \operatorname{cth} k l \cdot \operatorname{sh} k x \right]$</p> <p>$\lambda_2 = 1 - \frac{2\beta n l}{(l-x)k a} \left(1 - \xi \bar{y}^2 - \eta \bar{y}^3 - \zeta \bar{y}^4 - \frac{\beta}{2} \right) \left[\operatorname{sh} k a \cdot \operatorname{ch} k x - \operatorname{sh} k a \cdot \operatorname{cth} k l \cdot \operatorname{sh} k x \right]$</p>

续表 1

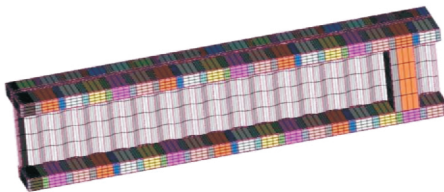
桥型-荷载工况	计算图式	剪力滞系数
简支梁-均布荷载		$\lambda_1 = 1 - \frac{2\beta n}{(\beta+1)(l-x)kx^2} \left(1 - \bar{y}^\beta - \frac{\beta}{\beta+1}\right) \left[1 - chkx + \frac{chk l - 1}{shkl} shkx\right]$ $\lambda_2 = 1 - \frac{2\beta n}{(\beta+1)(l-x)kx^2} \left(1 - \bar{y}^\beta - \frac{\beta}{\beta+1}\right) \left[1 - chkx + \frac{chk l - 1}{shkl} shkx\right]$ $CB \text{ 段: } \lambda_1 = 1 + \frac{\beta n}{(\beta+1)(x-a)k} \left(1 - \bar{y}^\beta - \frac{\beta}{\beta+1}\right)$ $\left[shka \cdot chkx - \left(\frac{1}{chkl} + thkl \cdot shka\right) \cdot shkx\right]$
悬臂梁-集中荷载		$\lambda_2 = 1 + \frac{2\beta n}{(x-a)k} \left(1 - \xi \bar{y}^2 - \eta \bar{y}^3 - \zeta \bar{y}^4 - \frac{\beta}{2}\right)$ $\left[shka \cdot chkx - \left(\frac{1}{chkl} + thkl \cdot shka\right) \cdot shkx\right]$
悬臂梁-均布荷载		$BA \text{ 段: } \lambda_1 = 1 + \frac{2\beta n}{(\beta+1)k^2 x^2} \left(1 - \bar{y}^\beta - \frac{\beta}{\beta+1}\right) \left[1 - \frac{chk(l-x) + klshkx}{chkl}\right]$ $\lambda_2 = 1 + \frac{4\beta n}{k^2 x^2} \left(1 - \xi \bar{y}^2 - \eta \bar{y}^3 - \zeta \bar{y}^4 - \frac{\beta}{2}\right) \left[1 - \frac{chk(l-x) + klshkx}{chkl}\right]$
悬臂梁-集中弯矩		$CB \text{ 段: } \lambda_2 = 1 - \frac{\beta n}{(\beta+1)} \left(1 - \bar{y}^\beta - \frac{\beta}{\beta+1}\right) (thkl \cdot shkx - chkx) \cdot chka$ $\lambda_2 = 1 - 2\beta n \left(1 - \xi \bar{y}^2 - \eta \bar{y}^3 - \zeta \bar{y}^4 - \frac{\beta}{2}\right) (thkl \cdot shkx - chkx) \cdot chka$

3 算例分析

采用两种有限元分析软件 ANSYS 和 MIDAS/FEA 同时建立计算跨径为 30 m 的简支梁和 15 m 的悬臂梁的 1/4 空间模型,如图 2 所示。



(a) ANSYS Model



(b) MIDAS/FEA Model

图 2 有限元模型

Fig. 2 Finite element model

模型梁为单箱单室波形钢腹板箱梁,梁高 3 m,顶板宽 5.5 m,悬臂长 1.25 m,底板宽 3.5 m。顶底板板厚 0.4 m。端部设厚度为 0.9 m 的端隔板。波形钢腹板厚为 10 mm,波长 0.9 m,直幅宽 0.25 m,斜幅宽 0.2 m,波高 0.12 m。混凝土强度 C55,弹模为 3.5×10^4 MPa,泊松比为 0.2,采用带中间节点的高次实体单元模拟。钢腹板材质为 Q345c 优质低碳钢,弹模 2.06×10^2 GPa,泊松

比 0.3,选用 shell63 板单元建模,并与混凝土顶底板及端隔板共节点。在对称面施加对称约束,简支梁的支座位置采用面上铰约束,悬臂梁的固定端约束全部自由度。暂不计入预应力单元的影响。由于混凝土顶底板在钢混共节点区域刚度不均匀,受力复杂,恰好又是最大剪力滞系数的敏感位置,网格务需精细、中正,竖向至少 4 层单元。模型采用柔度较好的 20 个节点单元 solid95,共计 41 752 个单元和 198 917 个节点。

表 2 给出了集中荷载 20 kN 下简支梁和悬臂梁典型截面剪力滞系数。

表 2 集中荷载 20 kN 下典型截面剪力滞系数
Tab. 2 Shear lag coefficient of typical section under concentrated load of 20 kN

简支梁				悬臂梁		
曲线阶次	应力 /MPa	均值 /MPa	剪滞系数	应力 /MPa	均值 /MPa	剪滞系数
2	2.87	2.39	1.20	5.75	4.79	1.20
3	2.94	-	1.23	5.89	-	1.23
4	2.99	-	1.25	5.99	-	1.25
5	3.01	-	1.26	6.04	-	1.26
8	3.06	-	1.28	6.08	-	1.27
10	3.06	-	1.28	6.13	-	1.28
12	3.08	-	1.29	6.18	-	1.29
20	3.08	-	1.29	6.23	-	1.30
FEA	2.80	-	1.17	5.89	-	1.23
ANSYS	2.81	-	1.17	5.89	-	1.23

从表 2 可以看出, 当引入的曲线从 2 次增加至 20 次, 简支梁的最大剪力滞系数理论值由 1.20 增加到 1.29, 有限元值为 1.17. 悬臂梁的最大剪力滞系数从 1.20 上升至 1.30, 有限元值为 1.23. 翘曲位移函数的阶次愈大, 最大剪力滞系数的计算结果也愈大. 可见, 翘曲位移函数的阶次太高会导致结果偏离真实值, 采用三次抛物线是个比较保守, 富余量又不大的选择.

表 3 给出了 10 kN/m 均布荷载作用下简支梁和悬臂梁典型截面剪力滞系数.

表 3 均布荷载 10 kN/m 下典型截面剪力滞系数

Tab. 3 Shear lag coefficient of typical section under uniformly distributed load of 10 kN/m

简支梁				悬臂梁		
曲线阶次	应力 /MPa	均值 /MPa	剪滞系数	应力 /MPa	均值 /MPa	剪滞系数
2	3.26	3.19	1.02	4.95	3.59	1.38
3	3.25	-	1.02	5.17	-	1.44
4	3.25	-	1.02	5.31	-	1.48
5	3.22	-	1.01	5.39	-	1.5
FEA	3.25	-	1.02	4.42	-	1.23
ANSYS	3.25	-	1.02	4.42	-	1.23

简支梁在均布荷载下的最大剪力滞系数为 1.02, 且对曲线阶次并不敏感, 工程中可以忽略跨中剪力滞引起的应力集中效应. 悬臂梁在均布荷载下, 剪力滞系数为 1.23 左右, 比集中荷载下更为显著, 因此, 悬臂施工的薄壁箱梁必须重视剪力滞因素引起的不均匀现象.

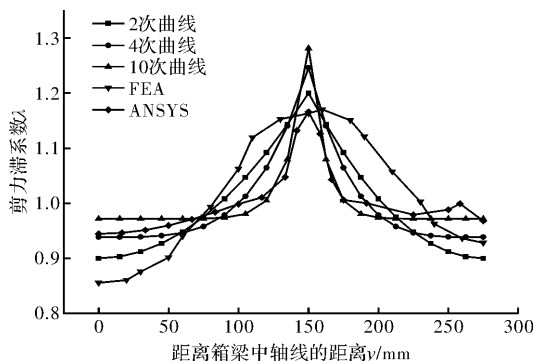


图 3 简支梁集中荷载下跨中截面剪滞系数分布

Fig. 3 Shear lag coefficient distribution of midspan section under concentrated load of simply supported beam

由图 3 可见, 变分法求解波形钢腹板预应力混凝土箱梁的最大剪力滞系数可以很好地逼近有限

元值, 但该法将翼缘板做了拟平面应力假定, 自由端存在一定的误差, 并且从有限元分析可以看出翼板悬挑段与箱室内段的剪力滞系数并非完全对称, 可以考虑拟定多条翘曲函数来分别计算.

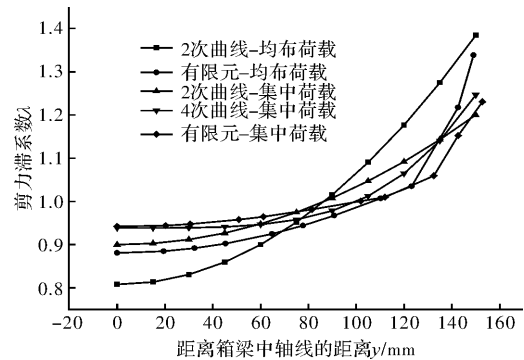


图 4 悬臂梁根部剪力滞系数横向分布

Fig. 4 Transverse distribution of shear lag coefficient at the root of cantilever beam

悬臂梁在均布荷载下的最大剪力滞系数值 1.34, 二次曲线的变分值为 1.38. 然而, 在集中荷载下最大剪力滞系数为 1.23, 高于二次曲线的求解值 1.20, 可以考虑采用 4 次曲线来解答, 对于不同的荷载工况, 也可以考虑采用不同阶次的曲线.

4 超静定桥梁的剪力滞解答

由最小势能原理推出超静定波形钢腹板组合箱梁桥的剪力滞系数存在两个难点: 一是联立求解困难, 公式繁杂, 应用不便; 二是超静定箱梁翼缘板有效宽度的变化影响弯矩 $M(x)$ 沿跨长方向的分布. 可以结合表 1 的实用公式应用肢解法和叠加法^[15], 使分析得以简化.

连续梁桥, 斜拉桥, 连续刚构等超静定桥梁在各种荷载工况下都存在多个弯矩为 0 的反弯点, 可以人为地在该点将桥梁拆解成若干根简支梁或悬臂梁, 最后运用表 1 的实用公式间接计算超静定结构的剪力滞系数, 这是肢解法.

在变分法求解过程中, 仅假定了纵向翘曲位移的横向分布, 纵向和竖向位移依然满足连续性要求和边界条件, 考虑到约束的本质是对桥梁施加相应的支座反力, 可以用等代力替代赘余约束, 将超静定桥梁简化为静定形式, 根据线弹性阶段的应力叠加原理, 将叠加原理推广到箱梁剪力滞的求解中, 这是叠加法. 计算截面 I 的剪力滞系数表达式为:

$$\lambda = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \lambda_i M_i$$

式中： M 为 I 截面真实弯矩； M_i 为基本体系在单个工况下 I 截面处的弯矩； λ_i 为基本体系单个工况下 I 截面的剪力滞系数； λ 为 I 截面真实剪力滞系数；

以第3节中的模型梁截面为基本截面，分别建立 $3\text{ m} \times 30\text{ m}$ 的三跨连续梁和连续刚构实体有限元模型，得到工况1：中跨跨中和边跨跨中同时施加集中荷载 10 kN 时典型截面的剪力滞效应，见表4；工况2：全桥均布荷载 10 kN/m 下，典型截面的剪力滞效应，见表5。

表4 工况1典型截面剪力滞系数

		连续梁剪力滞系数			连续刚构剪力滞系数		
方法	阶次	中跨跨中	中支座处	边跨跨中	中跨跨中	固结墩处	边跨跨中
肢解法	2	1.47	1.37	1.28	1.34	1.39	1.30
	3	1.53	1.42	1.32	1.39	1.45	1.35
	4	1.57	1.46	1.34	1.42	1.48	1.37
	10	1.66	1.52	1.39	1.48	1.56	1.42
叠加法	2	1.47	1.40	1.28	1.34	1.40	1.30
	3	1.54	1.46	1.32	1.40	1.47	1.35
	4	1.58	1.49	1.34	1.43	1.50	1.36
	10	1.66	1.55	1.39	1.48	1.58	1.41
ANSYS		1.42	1.32	1.24	1.35	1.35	1.33

表5 均布荷载下典型截面剪力滞系数

Tab. 5 Shear lag coefficient of typical section under uniformly distributed load

		连续梁剪力滞系数			连续刚构剪力滞系数		
方法	阶次	中跨跨中	中支座处	边跨跨中	中跨跨中	固结墩处	边跨跨中
肢解法	2	1.07	1.57	1.03	1.05	1.48	1.03
	3	1.06	1.67	1.02	1.04	1.54	1.03
	4	1.06	1.71	1.01	1.04	1.58	1.02
	10	1.03	1.81	1.00	1.01	1.67	1.00
叠加法	2	1.05	1.57	1.02	1.05	1.48	1.02
	3	1.05	1.65	1.02	1.05	1.53	1.02
	4	1.05	1.70	1.02	1.04	1.57	1.02
	10	1.02	1.80	1.00	1.00	1.66	1.00
ANSYS		1.06	1.53	1.04	1.04	1.43	1.05

从表4和表5可以看出，肢解法、叠加法和有限元结果基本吻合，虽然有些误差，但相对误差不大于3.4%，足以满足工程精度的要求。

5 剪力滞效应的参数分析

改变有限元模型的桥宽，建立宽跨比为0.1~1的10组波形钢腹板预应力悬臂箱梁模型，分析在悬臂端集中荷载和均布荷载工况下的剪力滞效应。

从图5可以看出，宽跨比是影响箱梁剪力滞效应的重要几何参数之一。悬臂梁在相同荷载工况下，顶底板的剪力滞系数基本一致。均布荷载工况的剪力滞效应对宽跨比的改变更为敏感。当宽跨比由0.1递增到1时，均布荷载下的最大剪力滞系数相应由1.19上升至2.67；集中荷载下的最大剪力滞从1.07浮升至2.00。因此，本文按照最小二乘法给出悬臂梁根部剪力滞系数 y 和宽跨比 x 的关系函数。

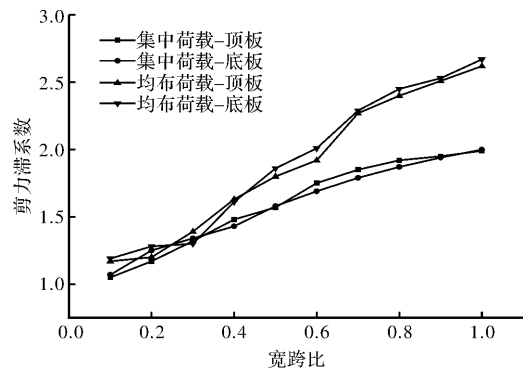


图5 宽度比对悬臂梁根部剪力滞的影响

Fig. 5 Effect of width ratio on shear lag at the root of cantilever beam

集中荷载： $y = -0.77x^2 + 1.95x + 0.83$

均布荷载： $y = -3.6x^3 + 5.86x^2 - 0.85x + 1.25$

变分法求解波形钢腹板预应力混凝土组合箱梁的剪力滞效应时，由于波形钢腹板的褶皱效应，钢腹板的轴向力的拉压刚度为0，不考虑剪切变形等微量对剪力滞的贡献，认为腹板仅在顶底板间起连接和传递剪力的作用。可以通过改变钢腹板的材料特性和结构参数，来分析由此引起的误差。

由图6可以看出，波形钢腹板在通常使用的厚度范围内，剪力滞系数随板厚变化波动微小，

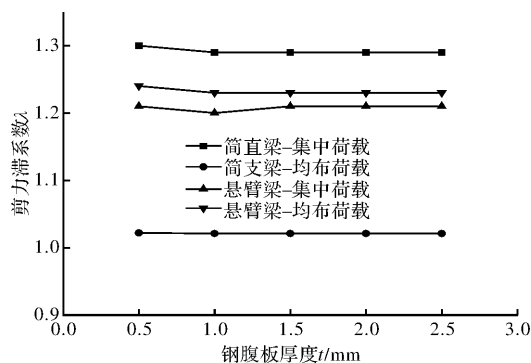


图6 波形腹板板厚对剪力滞的影响

Fig. 6 Effect of thickness of corrugated web on shear lag

进一步的研究发现钢腹板的波高、弹模、泊松比等对剪力滞的影响也不明显,由于篇幅限制,此处不再赘述。因此,变分法分析波形钢腹板组合箱梁的剪力滞效应时,钢腹板轴向不受力和不考虑剪切变形的假定不会对计算结果产生显著影响。

6 结论

(1)利用能量变分法求解波形钢腹板PC箱梁的剪力滞效应是可行的,最大剪力滞系数理论值一般随着引入纵向翘曲位移函数阶次的增加而增大,高次幂的曲线会导致结果偏离真实值,对于波形钢腹板PC箱梁而言,一般取3阶曲线是比较合理的。

(2)悬臂箱梁的剪力滞系数随着宽跨比增大显著升高,均布荷载下的剪力滞系数比集中荷载下要大,应该重视宽箱梁在平衡悬臂施工中由自重引起的剪力滞效应。简支梁在集中荷载下的剪力滞效应比较严重,而均布荷载下跨中截面的剪力滞系数1.02左右,并且对于纵向翘曲函数的选择并不敏感。

(3)以静定结构的剪力滞系数实用公式为基础,运用叠加法和肢解法解超静定桥梁的剪力滞问题简单高效,结果可靠,是一种值得推广应用的方法。

(4)对于纵向翘曲位移按照抛物线变化,最大剪力滞系数可以很好地逼近有限元值,在自由端存在一定的离散性,并且箱梁的纵向翘曲位移并非关于腹板对称分布,顶底板也有差异,可以考虑拟定多条翘曲函数来分别计算,在这方面还有

待深入探讨。

参考文献 References

- [1] HE Jun, LIU Yuqing, CHEN Airong, et al. Mechanical behavior and analysis of composite bridges with corrugated steel webs: state-of-the-art [J]. International Journal of Steel Structures, 2012, 12 (3): 321-338.
- [2] YI Jongwon, GIL Heungbae, YOUM Kwangsoo, et al. Interactive shear buckling behavior of trapezoidally corrugated steel webs [J]. Engineering Structures, 2008, 30(6): 1659-1666.
- [3] 聂建国, 李法雄. 考虑腹板剪切行为的波形钢腹板梁理论模型[J]. 中国公路学报, 2011, 24(6):40-48.
NIE Jianguo, LI Faxiong. Theory model of corrugated steel web girder considering web shear behavior [J]. China Journal of Highway and Transport, 2011, 24 (6):40-48.
- [4] 万水, 李淑琴, 马磊. 波形钢腹板预应力混凝土组合箱梁结构在中国桥梁工程中的应用[J]. 建筑科学与工程学报, 2009, 26(2):15-20.
WAN Shui, LI Shuqin, MA Lei. Application of prestressed concrete composite box-girder structure with corrugated steel webs in bridge engineering in China [J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2009, 26(2):15-20.
- [5] 陈宝春, 黄卿维. 波形钢腹板PC箱梁桥应用综述[J]. 公路, 2005(7):45-53.
CHEN Baochun, HUANG Qingwei. A summary of application of prestressed concrete box-girder bridges with corrugated steel webs [J]. Highway, 2005 (7): 45-53.
- [6] KÖVESDI B, JÁGER B, DUNAI L. Stress distribution in the flanges of girders with corrugated webs [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2012, 79: 204-215.
- [7] 贾慧娟, 戴航, 张建东. 波形钢腹板组合梁桥横向受力研究[J]. 工程力学, 2014, 31(12):76-82.
JIA Huijuan, DAI Huang, ZHANG Jiandong. Research on transverse internal forces in box-girder bridges with corrugated steel webs [J]. Engineering Mechanics, 2014, 31(12):76-82.
- [8] 周世军, 黄瑜, 江瑶, 等. 单箱双室组合箱梁剪力滞

- 效应分析[J]. 建筑科学与工程学报, 2017, 34(6): 110-115.
- ZHOU Shijun, HUANG Yu, JIANG Yao, et al, Analysis of shear lag effect of single-box twirrcell composite box girder[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2017, 34(6):110-115.
- [9] 卫星, 杨世玉. 单箱双室波形钢腹板 PC 箱梁剪力滞效应分析[J]. 铁道工程学报, 2017, 34(3):29-33.
- WEI Xing, YANG Shiyu. Research on the shear-lag effect in twin-cell pc box-girder with corrugated steel web[J]. Journal of Railway Engineering Society, 2017, 34(3):29-33.
- [10] ZHOU Shijun. Finite beam element considering shear-lag effect in box girder[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2010, 136(9): 1115-1122.
- [11] GARA Fabrizio, LEONI Graziano, DEZI Luigino. A beam finite element including shear lag effect for the time-dependent analysis of steel-concrete composite decks[J]. Engineering Structures, 2009, 31(8): 1888-1902.
- [12] 李立峰, 彭鲲, 王文. 波形钢腹板组合箱梁剪力滞效应的理论与试验研究[J]. 公路交通科技, 2009, 26(4): 78-83.
- LI Lifeng, PENG Kun, WANG Wen. Theoretical and experimental study on shear lag effect of composite box girder with corrugated steel webs[J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2009, 26(4):78-83.
- [13] 张元海, 李娜娜, 刘勇. 箱形梁正负剪力滞判别的广义力矩法[J]. 铁道学报, 2011, 33(9):108-113.
- ZHANG Yuanhai, LI Nana. LIU Yong. Discrimination between positive and negative shear lads in box girder by generalized moment[J]. Journal of the China Railway Society, 2011, 33(9):108-113.
- [14] 吴文清, 叶见曙, 万水, 等. 波形钢腹板-混凝土组合箱梁截面变形的拟平截面假定及其应用研究[J]. 工程力学, 2005(5):177-180, 198.
- WU Wenqing, YE JIANshu, WAN Shui, et al. Quasi Plane Assumption and Its Application in Steel-concrete Composite Box Girders with Corrugated Steel Webs[J]. Engineering Mechanics, 2005(5):177-180, 198.
- [15] 冀伟, 刘世忠, 蔺鹏臻. 等截面波形钢腹板连续箱梁竖向基频的参数研究[J]. 西安建筑科技大学学报(自然科学版), 2012, 44(4):468-473.
- JI Wei, LIU Shizhong, LIN Pengzhen. Study on dynamic characteristics parameters of equal section composite box girder with corrugated steel webs[J]. J. Xi'an Univ. of Arch. & Tech. (Natural Science Edition), 2012, 44(4):468-473.

(编辑 桂智刚)