

任意荷载作用下梁-柱的新型实用算法

郭春霞¹, 李银山², 孙永涛³, 李子瑞²

(1. 西安建筑科技大学 理学院, 陕西 西安 710055; 2. 河北工业大学 机械工程学院, 天津 300401; 3. 天津大学 机械工程学院, 天津 300072)

摘要: 采用渐进积分法研究了简支梁-柱分别在横向分布力、横向集中力和力偶作用下的弯曲问题。构造了各种荷载作用下梁-柱的四阶微分迭代方程和边界条件。首先选取简支梁只有横向荷载的挠曲线作为梁-柱的初函数, 然后将初函数代入梁-柱的四阶微分迭代方程进行积分, 得到下一次迭代挠度函数, 依次进行迭代积分运算。编程计算出了用轴力放大系数表示的最大挠度、最大转角和最大弯矩的简单多项式解析函数。经过六次迭代, 与精确解相比, 当梁-柱所受的轴向力是欧拉临界力的 1/2 以内时, 误差可以控制在 1% 以内, 达到了令人满意的工程精度要求。

关键词: 渐进积分法; 梁-柱; 最大挠度; 最大转角; 最大弯矩

中图分类号: TU391; O341

文献标志码: A

文章编号: 1006-7930(2023)05-0652-09

A new practical algorithm for beam-column under arbitrary load

GUO Chunxia¹, LI Yinshan², SUN Yongtao³, LI Zirui²

(1. School of Science, Xi'an Univ. of Arch. & Tech., Xi'an 710055, China;

2. School of Mechanical Engineering, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China;

3. School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: The bending of simply supported beam-column under continuous transverse load, transverse concentrated load and coupling is studied by using the method of progressive integration. The fourth order differential iterative equations and boundary conditions of beam-column under various loads are constructed. Firstly, the deflection curve of simply supported beam with only transverse load is selected as the initial function of beam-column. Then, the initial function is substituted into the fourth-order differential iterative equation of beam-column for integration, and the next iterative deflection function is obtained, and the iterative integration operation is carried out in turn. Simple polynomial analytic functions of maximum deflection, maximum angle and maximum bending moment expressed by amplification coefficients are calculated. After six iterations, compared with the exact solution, the error can be controlled within 1% when the axial force is less than half of the Euler critical force, which achieves satisfactory engineering accuracy requirements.

Key words: progressive integral method; beam-column; maximum deflection; maximum angle; maximum bending moment

工程中将同时承受轴向压力和横向荷载的梁称为梁-柱^[1], 梁-柱在工程中的应用非常广泛。例如受风荷载、地震荷载、预应力等轴向压力作用的梁^[2-3], 油气工程中的悬跨管道往往可以简化为有轴向力影响的简支梁模型^[4], 加筋机身蒙皮元件在机身弯曲条件下往往还同时承受轴向压缩荷载^[5], 而作用在梁上的轴向压力, 对梁的弯曲特性有较大的影响。此时, 梁的内力、应力及变形并不与轴向压力的大小成正比^[6], 梁-柱本质上是一

个非线性静不定问题。因此, 准确快速地计算出梁-柱的内力和变形对工程中梁-柱的安全设计具有重要意义。

工程设计人员在设计梁-柱结构时需要计算梁-柱的最大挠度、最大转角和最大弯矩。具有均匀弯曲刚度的梁同时受轴向压力和横向荷载时, 其弯曲变形微分方程是一个四阶线性非齐次微分方程, 其精确解较为复杂。若采用精确解来分析实际问题则存在计算过程复杂繁琐、计算量大的缺

收稿日期: 2022-04-10

修回日期: 2023-08-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(12072222)

第一作者: 郭春霞(1983—), 女, 博士生, 讲师, 主要研究结构动力学理论。E-mail: chunxiaguo@xauat.edu.cn

通信作者: 李银山(1961—), 男, 博士, 教授, 主要研究非线性动力学与控制。E-mail: 2002104@hebut.edu.cn

陷^[7~9]. 关于梁-柱的变形分析及应用, 已有很多文献从不同的角度进行了研究. 陈林靖等^[10]基于综合刚度原理和双参数法推导了考虑桩的纵横弯曲的有限差分解, 采用 MATLAB 程序语言编制了相应的计算程序, 指出对于外露长度和桩顶竖向荷载较大的桩, 重力二阶效应是不容忽视的. 黄文君等^[11]将梁-柱理论的经典解答应用于石油工程中带接头管柱的分析, 完整地描述了带接头梁-柱弯曲的三种状态. 洪迪峰等^[12]结合有限元法和梁-柱的经典解答, 提出了广义纵横弯曲法, 用牛顿迭代法进行数值求解, 分析了非连续性旋转导向钻具的造斜能力. 蔡铭等^[13]采用初始参数法结合传递矩阵求解了幕墙支撑梁-柱问题并结合实际工程进行了稳定性分析. Mohri 等^[14]用能量法推导了双对称工字型截面梁-柱在各种横向荷载和轴力联合作用下的解析解, 并分析了梁-柱的后屈曲行为.

随着计算机的发展, 出现了一系列求解梁-柱问题的新方法. Dado 等^[15]提出了一种基于非线性控制微分方程的积分最小二乘法, 将梁的转角用多项式表示, 可分析棱柱式和非棱柱式悬臂梁-柱的弯曲问题; Arboleda 等^[16]采用经典矩阵法研究了轴向力对双参数弹性地基上梁-柱变形的影响. Hatami 等^[17]利用微分变换法将梁的变形表示为多项式, 研究了悬臂梁-柱弯曲时的挠度; Ressel^[5]利用梁-柱的经典解答, 讨论了两种处理广义梁-柱问题的数值解法. 李晓姣^[18]提出了分析梁-柱问题的辛本征值法. Areizo 等^[19]基于微分变换方法对横向荷载和轴向约束作用下的锥形梁-柱进行了大挠度分析, 提高了计算效率. 连续分段独立一体化积分法是李银山等^[20-22]提出的一种求解力学中有关微分方程问题的有效方法, 与计算机软件相结合, 具有求解精度高、速度快的特点.

本文在连续分段独立一体化积分法的基础上, 采用渐进积分法研究了梁-柱的弯曲变形问题, 得出了简支梁-柱在各种荷载作用下的最大弯矩和最大挠度、最大转角关于轴力放大系数的表达式, 所得解答为简单的多项式, 便于理解和计算. 并将渐进积分法的计算结果与经典的精确解进行比较验证, 在迭代仅 6 次的情况下即可达到满足工程需要的精度, 大大提高了计算速度.

1 横向分布力作用下的简支梁-柱

1.1 基本方程和边界条件

设长为 l 、抗弯刚度为 EI 的梁, 仅承受横向

分布荷载 $q(x)$. 轴向坐标为 x , 挠度为 v . 梁的小挠度四阶导数微分方程为^[1]

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q(x) \quad (1)$$

设长为 l 、抗弯刚度为 EI 的杆, 仅承受轴向集中荷载 F . 轴向压力作用下杆的四阶导数微分方程为^[1]

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + F \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad (2)$$

欧拉临界力公式为

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \alpha \frac{EI}{l^2} \quad (3)$$

其中: F_{cr} 为临界压力; μ 为与支承有关长度系数; α 为集中力临界力系数.

若略去剪切变形和梁轴线缩短的影响, 由式(1)和式(2)叠加得到, 同时承受横向分布荷载和轴向集中力 F 作用下梁-柱的微分方程为

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + F \frac{d^2 v}{dx^2} = q(x) \quad (4)$$

简支梁边界条件

$$v(0) = 0, EI v''(0) = 0 \quad (5a)$$

$$v(l) = 0, EI v''(l) = 0 \quad (5b)$$

为将方程(4)无量纲化, 令

$$v_0 = \frac{q(x)l^4}{EI}, \quad V = \frac{v}{v_0}, \quad X = \frac{x}{l}, \quad \kappa = \frac{F}{F_{cr}} \quad (6)$$

将式(6)代入式(4), 可得梁-柱的无量纲微分方程

$$\frac{d^4 V}{dX^4} = 1 - \kappa \alpha \frac{d^2 V}{dX^2} \quad (7)$$

本节研究同时承受横向均布荷载 (此时 $q(x) = -q$) 和轴向集中力 F 作用下的直梁, 如图 1 所示.

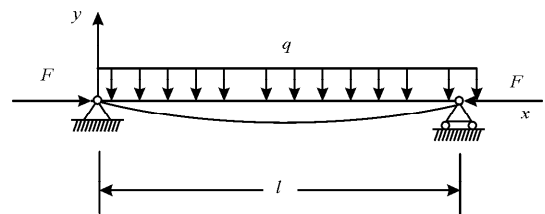


图 1 横向均布荷载作用的简支梁-柱

Fig. 1 Simply supported beam-column under continuous transverse load

由式(7)可知无量纲微分方程为

$$\frac{d^4 V}{dX^4} = -1 - \kappa \alpha \frac{d^2 V}{dX^2} \quad (8)$$

式中

$$\alpha = \pi^2 \quad (9)$$

则无量纲化后边界条件(5)可简写为

$$V(0) = 0, V''(0) = 0 \quad (10a)$$

$$V(1) = 0, V''(1) = 0 \quad (10b)$$

1.2 渐进积分法

为求解微分方程(8), 构造迭代方程如下.

$$V_{[0]}^{(4)} = -1 \quad (11a)$$

$$V_{[k]}^{(4)} = -1 - \kappa\pi^2 V_{[k-1]}'', (k = 1, 2, \dots) \quad (11b)$$

第一次近似: 选取无轴向力作用的简支梁的挠度为初始曲线 $V_{[0]}(X)$.

结合边界条件

$$V_{[0]}(0) = 0, V_{[0]}''(0) = 0 \quad (12a)$$

$$V_{[0]}(1) = 0, V_{[0]}''(1) = 0 \quad (12b)$$

由连续分段独立一体化积分法可得方程(11a)的解为

$$v_{[0]} = -\frac{ql^4}{24EI} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(1 + \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right) \quad (13)$$

将(13)代入(11b), 可求出第一次近似变形曲线. 基本方程为

$$V_{[1]}^{(4)} = -1 - \kappa\pi^2 V_{[0]}'', (0 \leq X \leq 1) \quad (14)$$

边界条件

$$V_{[1]}(0) = 0, V_{[1]}''(0) = 0 \quad (15a)$$

$$V_{[1]}(1) = 0, V_{[1]}''(1) = 0 \quad (15b)$$

由连续分段独立一体化积分法可解出迭代一次后的挠度函数为

$$v_{[1]} = -\frac{ql^4}{720EI} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(60 + 30 \frac{x}{l} - 30 \frac{x^2}{l^2} + 3\kappa\pi^2 + 3\kappa\pi^2 \frac{x}{l} - 2\kappa\pi^2 \frac{x^2}{l^2} - 2\kappa\pi^2 \frac{x^3}{l^3} + \kappa\pi^2 \frac{x^4}{l^4}\right) \quad (16)$$

1.3 弯矩和变形的最大值

由(16)式可求出跨中的最大挠度为

$$v_{[1]}^{\max} = (1 + 1.0034\kappa) \frac{5ql^4}{384EI} = \eta_{[1]}(\kappa) \bar{v}_{\max} \quad (17a)$$

将 $x=0$ 代入方程 $v_{[1]}'(x)$, 可得最大转角为

$$\theta_{[1]}^{\max} = (1 + 0.98696\kappa) \frac{ql^3}{24EI} = \chi_{[1]}(\kappa) \bar{\theta}_{\max} \quad (17b)$$

根据 $EIv''(l/2)$ 可得最大弯矩为

$$M_{[1]}^{\max} = (1 + 1.0281\kappa) \frac{ql^2}{8} = \lambda_{[1]}(\kappa) \bar{M}_{\max} \quad (17c)$$

其中 \bar{v}_{\max} 、 $\bar{\theta}_{\max}$ 、 \bar{M}_{\max} 分别表示无轴力时的挠度、

转角和弯矩的最大值.

$$\bar{v}_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI}, \bar{\theta}_{\max} = \frac{ql^3}{24EI}, \bar{M}_{\max} = \frac{ql^2}{8} \quad (18)$$

$\eta_{[1]}(\kappa)$ 、 $\chi_{[1]}(\kappa)$ 和 $\lambda_{[1]}(\kappa)$ 均为大于 1 的数, 表示轴力对最大挠度、最大转角和最大弯矩的影响, 称为轴力放大系数.

同理可得, 第二次迭代后的最大挠度、最大转角和最大弯矩的放大系数分别为

$$\eta_{[2]}(\kappa) = 1 + 1.0034\kappa + 1.0038\kappa^2 \quad (19a)$$

$$\chi_{[2]}(\kappa) = 1 + 0.98696\kappa + 0.98569\kappa^2 \quad (19b)$$

$$\lambda_{[2]}(\kappa) = 1 + 1.0281\kappa + 1.0316\kappa^2 \quad (19c)$$

依次类推, 可得迭代六次后的最大挠度、最大转角和最大弯矩放大系数

$$\eta_{[6]}(\kappa) = 1 + 1.0034\kappa + 1.0038\kappa^2 + 1.0039\kappa^3 + 1.0039\kappa^4 + 1.0039\kappa^5 + 1.0039\kappa^6 \quad (20a)$$

$$\chi_{[6]}(\kappa) = 1 + 0.98696\kappa + 0.98569\kappa^2 + 0.98555\kappa^3 + 0.98554\kappa^4 + 0.98553\kappa^5 + 0.98553\kappa^6 \quad (20b)$$

$$\lambda_{[6]}(\kappa) = 1 + 1.0281\kappa + 1.0316\kappa^2 + 1.0320\kappa^3 + 1.0320\kappa^4 + 1.0320\kappa^5 + 1.0320\kappa^6 \quad (20c)$$

根据本文的方法, 无论迭代几次, 梁-柱的内力和变形均可表示为类似于式(20)的简单多项式, 很容易求出其数值.

本问题的精确解^[1]如下

$$v_{\max} = \frac{12(2\sec u - 2 - u^2)}{5u^4} \bar{v}_{\max} = \eta(\kappa) \frac{5ql^4}{384EI} \quad (21a)$$

$$\theta_{\max} = \frac{3(\tan u - u)}{u^3} \bar{\theta}_{\max} = \chi(\kappa) \frac{ql^3}{24EI} \quad (21b)$$

$$M_{\max} = \frac{2(1 - \cos u)}{u^2 \cos u} \bar{M}_{\max} = \lambda(\kappa) \frac{ql^2}{8} \quad (21c)$$

式中:

$$u = \frac{\pi}{2} \sqrt{\kappa} \quad (22)$$

本文迭代 6 次的最大挠度、最大转角和最大弯矩与精确解的对比情况如图 2 所示.

从图 2 可以看出, 横向均布荷载作用下的两端铰支梁-柱迭代计算出的最大变形和弯矩均随迭代次数的增加而逐渐趋近于精确解.

利用渐进积分法求解, 迭代六次时最大挠度放大系数 $\eta_{(\kappa)}$ 、最大转角放大系数 $\chi_{(\kappa)}$ 和最大弯矩放大系数 $\lambda_{(\kappa)}$ 的计算结果如表 1 所示, 并与精确解进行了对比.

从表 1 可以看出, 当 $\kappa \in [0, 0.5]$ 时, 即当梁所受的轴向力是欧拉临界力的 1/2 以内时, 本文计算出的结果与精确解的误差在 1% 以内, 且轴力对最大变形和最大内力的影响均随 κ 的增加而增加, 当 $\kappa = 0.5$ 时, 梁的最大变形和内力均约是没有轴向外力时的 2 倍.

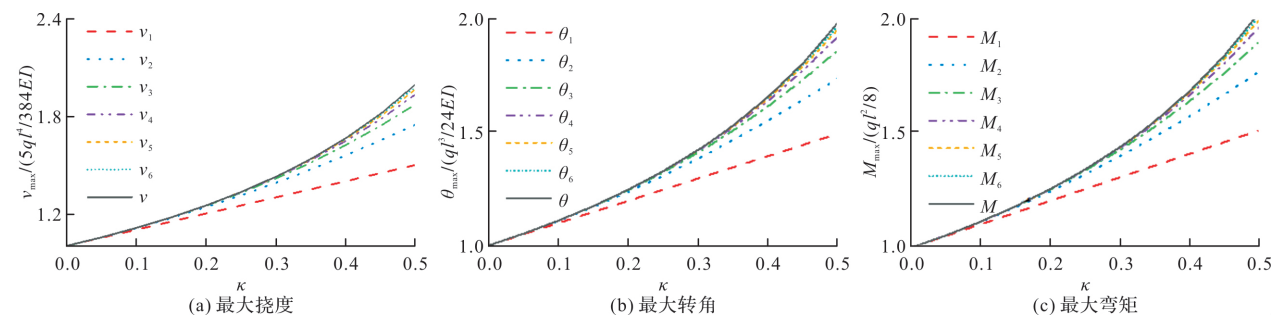


图 2 前六次迭代时最大转角、最大转角和最大弯矩与精确解的对比

Fig. 2 Comparison of the maximum deflection, maximum angle and maximum bending moment with the exact solution in the first six iterations

表 1 放大系数 $\eta(\kappa)$, $\chi(\kappa)$ 和 $\lambda(\kappa)$

Tab. 1 Amplification coefficient $\eta(\kappa)$, $\chi(\kappa)$ and $\lambda(\kappa)$

κ	$\eta_{[6]}(\kappa)$	$\eta(\kappa)$	$\Delta_{\eta}/\%$	$\chi_{[6]}(\kappa)$	$\chi(\kappa)$	$\Delta_{\chi}/\%$	$\lambda_{[6]}(\kappa)$	$\lambda(\kappa)$
0	1	1	0	1	1	0	1	1
0.1	1.111 5	1.111 5	0.000 1	1.109 6	1.109 6	0.000 0	1.114 3	1.114 3
0.2	1.250 9	1.250 9	0.001 4	1.246 7	1.246 7	0.001 3	1.257 2	1.257 2
0.3	1.429 8	1.430 1	0.02	1.422 5	1.422 8	0.022	1.440 8	1.441 1
0.4	1.666 3	1.669 1	0.16	1.654 9	1.657 6	0.16	1.683 6	1.686 4
0.5	1.987 9	2.003 6	0.78	1.970 9	1.986 3	0.78	2.013 8	2.029 9
1	∞	∞	—	∞	∞	—	∞	∞

2 横向集中力作用下的简支梁-柱

2.1 基本方程和边界条件

本节研究同时承受横向集中力 Q 和轴向集中力 F 作用的简支梁-柱, 如图 3 所示.

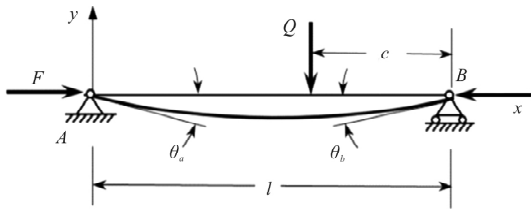


图 3 有一横向集中荷载作用的纵横弯曲梁

Fig. 3 Simply supported vertical and horizontal bending beam under a lateral concentration load

由式(7)可知此时无量纲微分方程为

$$\frac{d^4 V}{dX^4} = -\kappa\alpha \frac{d^2 V}{dX^2} \tag{23}$$

式中

$$\alpha = \pi^2 \tag{24}$$

无量纲边界条件为

2.2 渐进积分法

构造迭代方程如下.

$$V_{[0]}^{(4)} = 0 \tag{26a}$$

$$V_{[k]}^{(4)} = -\kappa\pi^2 V_{[k-1]}'' \quad (k = 1, 2, \dots) \tag{26b}$$

第一次近似: 选取无轴向力作用的梁挠度为初始曲线 $v_{[0]}(x)$. 基本方程

$$V_{1,[0]}^{(4)} = 0, \quad (0 \leq X \leq 1 - C) \tag{27a}$$

$$V_{2,[0]}^{(4)} = 0, \quad (1 - C < X \leq 1) \tag{27b}$$

边界条件和连续光滑条件

$$V_{1,[0]}(0) = 0, V_{1,[0]}''(0) = 0 \tag{28a}$$

$$V_{1,[0]}(1 - C) = V_{2,[0]}(1 - C) \quad V_{1,[0]}'(1 - C) = V_{2,[0]}'(1 - C) \tag{28b}$$

$$V_{1,[0]}''(1 - C) = V_{2,[0]}''(1 - C), \tag{28c}$$

$$V_{1,[0]}'''(1 - C) = V_{2,[0]}'''(1 - C) + f \tag{28c}$$

$$V_{2,[0]}(1) = 0, V_{2,[0]}''(1) = 0 \tag{28d}$$

式中

$$f = \frac{Q}{ql}, C = \frac{c}{l} \tag{29}$$

由连续分段独立一体化积分法解得

$$v_{[0]} = -\frac{Ql^3}{6EI} \frac{cx}{l^2} \left(1 - \frac{c^2}{l^2} - \frac{x^2}{l^2}\right), (0 \leq x \leq l-c) \quad (30a)$$

$$v_{[0]} = \frac{Ql^3}{6EI} \left(1 - \frac{c}{l}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(1 - 2\frac{c}{l} + \frac{c^2}{l^2} - 2\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right), (l-c < x \leq l) \quad (30b)$$

由式(26b)求第一次近似变形曲线,基本方程为

$$V_{1,[1]}^{(4)} = -\kappa\pi^2 V''_{1,[0]}, (0 \leq X \leq 1-C) \quad (31a)$$

$$V_{2,[1]}^{(4)} = -\kappa\pi^2 V''_{2,[0]}, (1-C < X \leq 1) \quad (31b)$$

边界条件和连续光滑条件为

$$V_{1,[1]}(0) = 0, V''_{1,[1]}(0) = 0 \quad (32a)$$

$$V_{1,[1]}(1-C) = V_{2,[1]}(1-C),$$

$$V'_{1,[1]}(1-C) = V'_{2,[1]}(1-C) \quad (32b)$$

$$V''_{1,[1]}(1-C) = V''_{2,[1]}(1-C),$$

$$V'''_{1,[1]}(1-C) = V'''_{2,[1]}(1-C) + f \quad (32c)$$

$$V_{2,[1]}(1) = 0, V''_{2,[1]}(1) = 0 \quad (32d)$$

由连续分段独立一体化积分法解得挠度函数为

$$v_{[1]} = -\frac{Ql^3}{360EI} \frac{cx}{l^2} \left(60 - 60\frac{c^2}{l^2} - 60\frac{x^2}{l^2} + 7\kappa\pi^2 - 10\kappa\pi^2 \frac{c^2}{l^2} + 3\kappa\pi^2 \frac{c^4}{l^4} - 10\kappa\pi^2 \frac{x^2}{l^2} + 10\kappa\pi^2 \frac{c^2 x^2}{l^4} + 3\kappa\pi^2 \frac{x^4}{l^4}\right), (0 \leq x \leq l-c) \quad (33a)$$

$$v_{[1]} = -\frac{Ql^3}{360EI} \left(1 - \frac{c}{l}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(60 - 120\frac{c}{l} + 60\frac{c^2}{l^2} - 120\frac{x}{l} + 60\frac{x^2}{l^2} - 3\kappa\pi^2 + 12\kappa\pi^2 \frac{c}{l} - 18\kappa\pi^2 \frac{c^2}{l^2} + 12\kappa\pi^2 \frac{c^3}{l^3} - 3\kappa\pi^2 \frac{c^4}{l^4} + 12\kappa\pi^2 \frac{x}{l} - 40\kappa\pi^2 \frac{cx}{l^2} + 20\kappa\pi^2 \frac{c^2 x}{l^3} - 18\kappa\pi^2 \frac{x^2}{l^2} - 20\kappa\pi^2 \frac{cx^2}{l^3} - 10\kappa\pi^2 \frac{c^2 x^2}{l^4} + 12\kappa\pi^2 \frac{x^3}{l^3} - 3\kappa\pi^2 \frac{x^4}{l^4}\right) (l-c < x \leq l) \quad (33b)$$

2.3 弯矩和变形的最大值

将 $x = c = l/2$ 代入式(33a), 得迭代一次后的最大挠度为

$$v_{[1]}^{\max} = (1 + 0.986\ 96\kappa) \frac{Ql^3}{48EI} = \chi_{[1]}(\kappa) \bar{v}_{\max} \quad (34a)$$

将 $c = l/2, x = 0$ 代入方程 $v'_{[1]}(x)$, 可得迭代一次后的最大转角为

$$\theta_{[1]}^{\max} = (1 + 1.028\ 1\kappa) \frac{Ql^2}{16EI} = \lambda_{[1]}(\kappa) \bar{\theta}_{\max} \quad (34b)$$

由 $EIv''(l/2)$ 得最大弯矩为

$$M_{[1]}^{\max} = (1 + 0.822\ 47\kappa) \frac{Ql}{4} = \xi_{[1]}(\kappa) \bar{M}_{\max} \quad (34c)$$

式中: $\chi(\kappa)$ 、 $\lambda(\kappa)$ 和 $\xi(\kappa)$ 为轴力放大系数; \bar{v}_{\max} 、 $\bar{\theta}_{\max}$ 、 \bar{M}_{\max} 分别表示无轴力时的挠度、转角和弯矩的最大值。

$$\bar{v}_{\max} = \frac{Ql^3}{48EI}, \bar{\theta}_{\max} = \frac{Ql^2}{16EI}, \bar{M}_{\max} = \frac{Ql}{4} \quad (35)$$

将(33)式代入(26b)式, 进行第二次迭代, 可得最大挠度放大系数、最大转角放大系数和最大弯矩放大系数分别为

$$\chi_{[2]}(\kappa) = 1 + 0.986\ 96\kappa + 0.985\ 69\kappa^2 \quad (36a)$$

$$\lambda_{[2]}(\kappa) = 1 + 1.028\ 1\kappa + 1.031\ 6\kappa^2 \quad (36b)$$

$$\xi_{[2]}(\kappa) = 1 + 0.822\ 47\kappa + 0.811\ 74\kappa^2 \quad (36c)$$

同理迭代六次后可得最大挠度放大系数、最大转角放大系数和最大弯矩放大系数分别为

$$\chi_{[6]}(\kappa) = 1 + 0.986\ 96\kappa + 0.985\ 69\kappa^2 + 0.985\ 55\kappa^3 + 0.985\ 54\kappa^4 + 0.985\ 53\kappa^5 + 0.985\ 53\kappa^6 \quad (37a)$$

$$\lambda_{[6]}(\kappa) = 1 + 1.028\ 1\kappa + 1.031\ 6\kappa^2 + 1.032\ 0\kappa^3 + 1.032\ 0\kappa^4 + 1.032\ 0\kappa^5 + 1.032\ 0\kappa^6 \quad (37b)$$

$$\xi_{[6]}(\kappa) = 1 + 0.822\ 47\kappa + 0.811\ 74\kappa^2 + 0.810\ 70\kappa^3 + 0.810\ 58\kappa^4 + 0.810\ 57\kappa^5 + 0.810\ 57\kappa^6 \quad (37c)$$

本问题的精确解^[1]如下。

$$v_{\max} = \frac{3(\tan u - u)}{u^3} \bar{v}_{\max} = \chi(\kappa) \frac{Ql^3}{48EI} \quad (38a)$$

$$\theta_{\max} = \frac{2(1 - \cos u)}{u^2 \cos u} \bar{\theta}_{\max} = \lambda(\kappa) \frac{Ql^2}{16EI} \quad (38b)$$

$$M_{\max} = \frac{\tan u}{u} \bar{M}_{\max} = \xi(\kappa) \frac{Ql}{4} \quad (38c)$$

式中:

$$u = \frac{\pi}{2} \sqrt{\kappa} \quad (39)$$

迭代六次后, 每次迭代的最大挠度、最大转角、最大弯矩与精确解的对比情况如图 4 所示。利用渐进积分法求解, 迭代六次时最大挠度放大系数 $\chi(\kappa)$ 、最大转角放大系数 $\lambda(\kappa)$ 和最大弯矩放大系数 $\xi(\kappa)$ 的计算结果如表 2 所示, 并与精确解进行了对比。

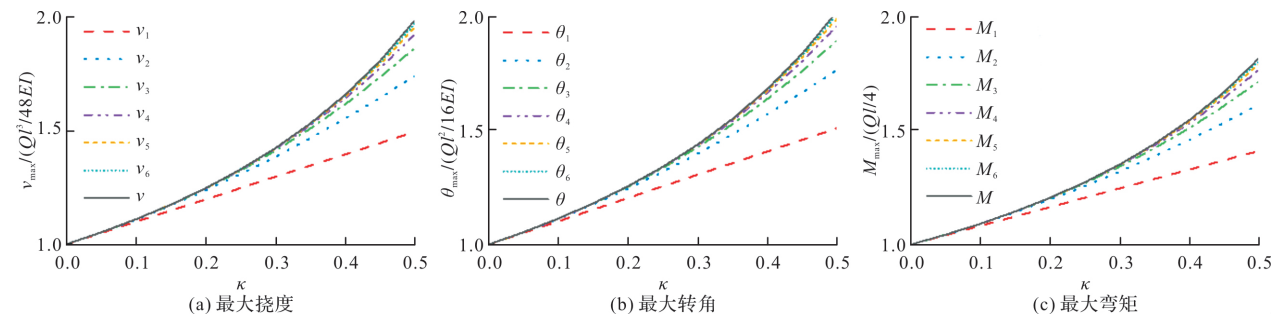


图 4 前六次迭代时最大挠度、最大转角和最大弯矩与精确解的对比

Fig. 4 Comparison of the maximum deflection, maximum angle and maximum bending moment with the exact solution in the first six iterations

表 2 放大系数 $\chi(\kappa)$ 、 $\lambda(\kappa)$ 和 $\xi(\kappa)$

Tab. 2 Amplification coefficient $\chi(\kappa)$ 、 $\lambda(\kappa)$ and $\xi(\kappa)$

κ	$\chi_{[6]}(\kappa)$	$\chi(\kappa)$	Δ_χ	$\lambda_{[6]}(\kappa)$	$\lambda(\kappa)$	Δ_λ	$\xi_{[6]}(\kappa)$	$\xi(\kappa)$
0	1	1	0	1	1	0	1	1
0.1	1.109 6	1.109 6	0.000 0	1.114 3	1.114 3	0.000 1	1.091 3	1.091 3
0.2	1.246 7	1.246 7	0.001 3	1.257 2	1.257 2	0.001	1.205 1	1.205 1
0.3	1.422 5	1.422 8	0.022	1.440 8	1.441 1	0.022	1.350 8	1.351 1
0.4	1.654 9	1.657 6	0.16	1.683 6	1.686 4	0.17	1.543 1	1.545 3
0.5	1.970 9	1.986 3	0.78	2.013 8	2.029 9	0.79	1.804 2	1.816 8
1	∞	∞	—	∞	∞	—	∞	∞

从图 4 和表 2 可以看出，当 $\kappa \in [0, 0.5]$ 时，本文的解答与精确解的误差在 1% 以内，说明在这一范围内，渐进积分法的计算结果可以满足实际工程需要，是计算梁-柱问题的一种可靠方法。

3 由力偶引起的简支梁-柱的弯曲

利用渐进积分法也可求解由力偶引起的简支梁-柱的弯曲，方法与前两节相同，只是基本方程和边界条件略有区别，文中不做详细推导，仅对计算过程进行简要说明，并附计算结果。

3.1 基本方程和边界条件

本节研究力偶引起的梁-柱的弯曲问题，如图 5 所示，简支梁-柱若有两个力偶 M_a, M_b 分别作用于杆的 A, B 两端。

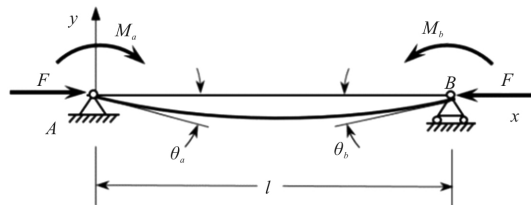


图 5 力偶作用的简支梁-柱

Fig. 5 Simply supported beam-column under couple action

由式(7)可知无量纲微分方程为

$$\frac{d^4 V}{dX^4} = -\kappa\alpha \frac{d^2 V}{dX^2} \tag{40}$$

无量纲边界条件为

$$V(0) = 0, V''(0) = m_a \tag{41a}$$

$$V(1) = 0, V''(1) = m_b \tag{41b}$$

式中

$$\alpha = \pi^2, m_a = \frac{M_a}{ql^2}, m_b = \frac{M_b}{ql^2} \tag{42}$$

3.2 渐进积分法

构造迭代方程，选取无轴向力作用的梁挠度为初始曲线 $V_{[0]}(X)$ 。

由连续分段独立一体化积分法解得

$$v_{[0]} = -\frac{M_a l^2}{6EI} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(2 - x + \frac{M_b}{M_a} - \frac{M_b}{M_a} \frac{x}{l}\right) \tag{43}$$

第一次近似变形挠度函数为

$$\begin{aligned} v_{[1]} = & -\frac{M_a l^2}{360EI} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(120 - 60 \frac{x}{l} + 60 \frac{M_b}{M_a} + \right. \\ & 60 \frac{M_b}{M_a} \frac{x}{l} + 8\kappa\pi^2 + 8\kappa\pi^2 \frac{x}{l} - 12\kappa\pi^2 \frac{x^2}{l^2} + \\ & \left. 3\kappa\pi^2 \frac{x^3}{l^3} + 7\kappa\pi^2 \frac{M_b}{M_a} + 7\kappa\pi^2 \frac{M_b}{M_a} \frac{x}{l} - \right. \end{aligned}$$

$$3\kappa\pi^2 \frac{M_b}{M_a} \frac{x^2}{l^2} - 3\kappa\pi^2 \frac{M_b}{M_a} \frac{x^3}{l^3} \quad (44)$$

3.3 弯矩和变形的最大值

为讨论方便, 假设 $M_b = M_a = M_0$, 则最大挠度出现在跨中截面

$$v_{[1]}^{\max} = (1 + 1.028 \ 1\kappa) \frac{M_0 l^2}{8EI} = \lambda_{[1]}(\kappa) \bar{v}_{\max} \quad (45a)$$

最大转角为

$$\theta_{[1]}^{\max} = (1 + 0.822 \ 47\kappa) \frac{M_0 l}{2EI} = \xi_{[1]}(\kappa) \bar{\theta}_{\max} \quad (45b)$$

最大弯矩为

$$M_{[1]}^{\max} = (1 + 1.233 \ 7\kappa) M_0 = \zeta_{[1]}(\kappa) \bar{M}_{\max} \quad (45c)$$

式中: $\lambda(\kappa)$ 、 $\xi(\kappa)$ 和 $\zeta(\kappa)$ 为放大系数; \bar{v}_{\max} 、 $\bar{\theta}_{\max}$ 、 \bar{M}_{\max} 分别表示无轴力时的挠度、转角和弯矩的最大值。

$$\bar{v}_{\max} = \frac{Ql^3}{48EI}, \bar{\theta}_{\max} = \frac{Ql^2}{16EI}, \bar{M}_{\max} = \frac{Ql}{4} \quad (46)$$

依次进行迭代, 迭代六次后可得最大挠度放

大系数、最大转角放大系数和最大弯矩放大系数分别为

$$\lambda_{[6]}(\kappa) = 1 + 1.028 \ 1\kappa + 1.031 \ 6\kappa^2 + 1.032 \ 0\kappa^3 + 1.032 \ 0\kappa^4 + 1.032 \ 0\kappa^5 + 1.032 \ 0\kappa^6 \quad (47a)$$

$$\xi_{[6]}(\kappa) = 1 + 0.822 \ 47\kappa + 0.811 \ 74\kappa^2 + 0.810 \ 69\kappa^3 + 0.810 \ 58\kappa^4 + 0.810 \ 57\kappa^5 + 0.810 \ 57\kappa^6 \quad (47b)$$

$$\zeta_{[6]}(\kappa) = 1 + 1.233 \ 7\kappa + 1.268 \ 3\kappa^2 + 1.272 \ 7\kappa^3 + 1.273 \ 2\kappa^4 + 1.273 \ 2\kappa^5 + 1.273 \ 2\kappa^6 \quad (47c)$$

本问题的精确解^[1]如下,

$$v_{\max} = \frac{2(1 - \cos u)}{u^2 \cos u} \bar{v}_{\max} = \lambda(\kappa) \frac{M_0 l^2}{8EI} \quad (48a)$$

$$\theta_{\max} = \frac{\tan u}{u} \bar{\theta}_{\max} = \xi(\kappa) \frac{M_0 l}{2EI} \quad (48b)$$

$$M_{\max} = \sec u \bar{M}_{\max} = \zeta(\kappa) M_0 \quad (48c)$$

迭代六次后, 每次迭代的最大挠度、最大转角、最大弯矩与精确解的对比情况如图 6 所示。

利用渐进积分法求解, 迭代六次时最大挠度放大系数 $\lambda(\kappa)$ 、最大转角放大系数 $\xi(\kappa)$ 和最大弯矩放大系数 $\zeta(\kappa)$ 的计算结果如表 3 所示, 并与精确解进行了对比。

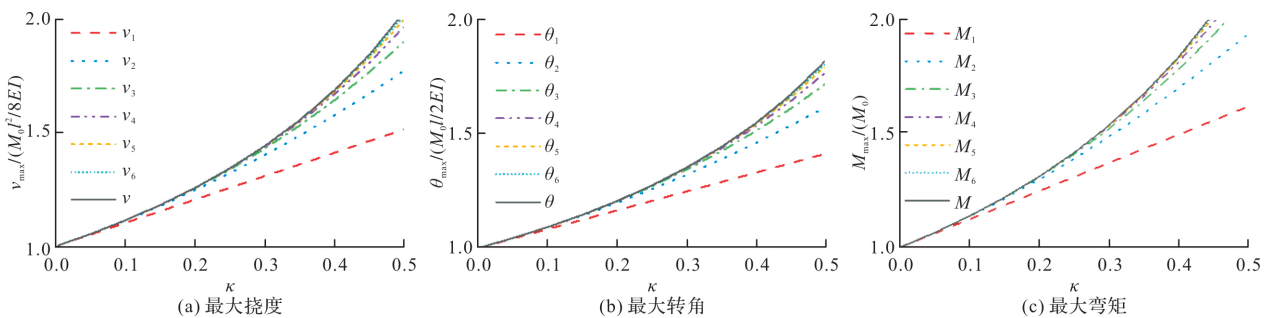


图 6 前六次迭代时最大挠度、最大转角和最大弯矩与精确解的对比

Fig. 6 Comparison of the maximum deflection, maximum angle and maximum bending moment with the exact solution in the first six iterations

表 3 放大系数 $\lambda(\kappa)$ 、 $\xi(\kappa)$ 和 $\zeta(\kappa)$

Tab. 3 Amplification coefficient $\lambda(\kappa)$ 、 $\xi(\kappa)$ and $\zeta(\kappa)$

κ	$\lambda_{[6]}(\kappa)$	$\lambda(\kappa)$	$\Delta\lambda$	$\xi_{[6]}(\kappa)$	$\xi(\kappa)$	$\Delta\xi$	$\zeta_{[6]}(\kappa)$	$\zeta(\kappa)$
0	1	1	0	1	1	0	1	1
0.1	1.114 3	1.114 3	0.000 1%	1.091 3	1.091 3	0.000 0%	1.137 5	1.137 5
0.2	1.257 2	1.257 2	0.001%	1.205 1	1.205 1	0.001%	1.310 2	1.310 2
0.3	1.440 8	1.441 1	0.022%	1.350 8	1.351 1	0.019%	1.533 0	1.533 4
0.4	1.683 6	1.686 4	0.17%	1.543 1	1.545 3	0.14%	1.828 7	1.832 2
0.5	2.013 8	2.029 9	0.79%	1.804 2	1.816 8	0.69%	2.232 3	2.252 2
1	∞	∞	—	∞	∞	—	∞	∞

从图6和表3可以看出,当 $\kappa \in [0, 0.5]$ 时,本文的解答与精确解的误差在1%以内,说明在这一范围内,渐进积分法的计算结果可以满足实际工程需要,是计算梁-柱问题的一种可靠方法。

4 结论

(1)本文从力学模型研究入手,建立了小挠度简支梁-柱在各种荷载作用下求解的通用模型,推导出梁-柱变形的一般方程和程序化求解内力和变形的通用程序,用Maple语言开发出相应的求解程序;

(2)采用渐进积分法求解了横向分布力、横向集中力和力偶等三种荷载情况下简支梁-柱的变形问题,得出了最大挠度、最大转角和最大弯矩的简单多项式表达式;

(3)关于梁-柱的弯曲问题,以铁摩辛柯为代表的复杂三角函数的精确解,需查表使用,不便于工程应用;有限单元法只能得到数值解,无法得到解析式。本文用渐进积分法进行求解,采用横向均布载荷作用下满足基本方程和边界条件的梁弯曲函数作为初函数,开始迭代计算,得到结果是简单的多项式函数。由于采用计算机求解计算速度快,荷载和刚度不需要简化,可以得到解析解,求解过程简洁方便、快速准确;

(4)本文提出的渐进积分法对实际工程中的梁-柱计算具有重要的指导意义。此方法可以推广到任意荷载和一般边界条件的梁-柱,另文介绍。

参考文献 References

- [1] TIMOSHENKO S P, GERE J M. Theory of Elastic Stability[M]. New York: McGraw-Hill, 1961.
- [2] 徐腾飞, 向天宇, 赵人达. 变截面 Euler-Bernoulli 梁在轴力作用下固有振动的级数解[J]. 振动与冲击, 2007, 11: 99-101.
XU Tengfei, XIANG Tianyu, ZHAO Renda. Series solution of natural vibration of the variable cross-section Euler-Bernoulli beam under axial force[J]. Journal of vibration and shock, 2007, 11: 99-101.
- [3] 曹卫平, 赵呈, 葛欣, 等. 砂土中水平受荷斜桩性状模型试验研究[J]. 西安建筑科技大学学报(自然科学版),

2020, 52(2): 168-176.

- CAO Weiping, ZHAO Cheng, GE Xin, et al. Model tests on behaviors of horizontally loaded single batter piles in sand[J]. J. of Xi'an Univ. of Arch. & Tech. (Natural Science Edition), 2020, 52(2): 168-176.
- [4] 邢静忠, 柳春图. 轴向力作用下埋设于线弹性土壤中的悬跨管道振动分析[J]. 工程力学, 2010, 27(3): 193-197.
XING Jingzhong, LIU Chuntu. Vibration analysis of spanning pipeline buried in linear elastic soil with axial force[J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(3): 193-197.
- [5] RUSSELL S G. Informal numerical methods for generalized beam-column problems[C]. 55th AIAA/ASME/ASCE/AHS/SC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. National Harbor, Maryland, 2014: 0160.
- [6] 陆健伟, 鲍四元, 沈峰. 阶梯柱屈曲的改进 Fourier 级数分析[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(12): 1229-1237.
LU Jianwei, BAO Siyuan, SHEN Feng. Buckling analysis of stepped columns based on the improved Fourier series method[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2021, 42(12): 1229-1237.
- [7] KÁRMÁN T V, BIOT M A. Mathematical methods in engineering[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1940.
- [8] 刘鸿文. 高等材料力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1985.
LIU Hongwen. Advanced material mechanics [M]. Beijing: Higher Education Press, 1985.
- [9] HILDEBRAND, FRANCIS B. Advanced calculus for applications[M]. 2nd ed. Prentice Hall Publishers, 1976.
- [10] 陈林靖, 余其凤, 戴自航. 纵横弯曲桩计算的综合刚度和双参数法的有限差分解[J]. 岩石力学与工程学报, 2016, 35(3): 613-622.
CHEN Linjing, YU Qifeng, DAI Zihang. Finite difference solution based on composite stiffness and bi-parameter method for calculating vertical and horizontal bending piles[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2016, 35(3): 613-622.
- [11] 黄文君, 高德利. 受井眼约束带接头管柱的纵横弯曲分

- 析[J]. 西南石油大学学报, 2015, 37(5): 152-158.
- HUANG Wenjun, GAO Deli. Deflection analysis of a tubular string with connectors constrained in a well-bore[J]. Journal of Southwest Petroleum University, 2015, 37(5): 152-158.
- [12] 洪迪峰, 唐雪平, 苏义脑, 等. 非连续性旋转导向钻具组合的广义纵横弯曲法[J]. 石油学报, 2014, 35(3): 543-550.
- HONG Difeng, TANG Xueping, SU Yinao, et al. Generalized beam-column method for non-continuous rotary steering drilling of bottom-hole assembly[J]. Acta Petrolei Sinica, 2014, 35(3): 543-550.
- [13] 蔡铭, 毛伙南, 郭金基, 等. 幕墙支撑杆的纵横弯曲计算和稳定性分析[J]. 中山大学学报, 2007, 46(2): 16-19.
- CAI Ming, MAO huonan, GUO Jinji, et al. Vertical and horizontal bending calculation and stability analysis of curtain wall strut bar[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2007, 46(2): 16-19.
- [14] MOHRI F, BOUZERIRA C, POTIER-FERRY M. Lateral buckling of thin-walled beam-column elements under combined axial and bending loads[J]. Thin-Walled Structures, 2008, 46(3): 290-302.
- [15] DADO M, AL-SADDER S. A new technique for large deflection analysis of non-prismatic cantilever beams. Mech Res Commun 2005, 32(6): 692-703.
- [16] ARBOLEDA-MONSALVE L G, ZAPATA-MEDINA D G, ARISTIZABAL-OCHOA J D. Timoshenko beam-column with generalized end conditions on elastic foundation: Dynamic-stiffness matrix and load vector [J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 310(4-5): 1057-1079.
- [17] HATAMI M, VAHDANI D D, GANJI D S. Deflection prediction of a cantilever beam subjected to static co-planar loading by analytical methods [J]. HBRC Journal, 2014, 10(2): 191-197.
- [18] 李晓姣. 梁力学问题的辛本征值分析方法[D]. 大连: 大连理工大学, 2018.
- LI Xiaojiao. Symplectic eigenvalue analysis method for mechanical problems of beams[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2018.
- [19] AREIZA-HURTADO M, ARISTIZÁBAL-OCHOA J D. Large-deflection analysis of prismatic and tapered beam-columns using the Differential Transform Method[J]. Structures. 2020, 28: 923-932.
- [20] 李银山. 材料力学(上册)[M]. 北京: 人民交通出版社, 2014.
- LI Yinshan. Mechanics materials (Vol. 1) [M]. Beijing: China Communications Press, 2014.
- [21] 李银山. 材料力学(下册)[M]. 北京: 人民交通出版社, 2015.
- LI Yinshan. Mechanics materials (Vol. 2) [M]. Beijing: China Communications Press, 2015.
- [22] 李银山, 孙凯, 贾佩星. 复杂荷载下多层刚架的快速解析求解[J]. 工程力学, 2017, 34: 11-18.
- LI Yinshan, SUN Kai, JIA Peixing. A fast analytical solution for multi-story frames under complicated loads [J]. Engineering Mechanics, 2017, 34: 11-18.

(编辑 桂智刚)