

Winkler 地基板动力学系统的广义化与简化求解

郑 罡¹, 杜宗松², 曹和生², 黎 浩²

(1. 重庆交通大学 省部共建山区桥梁及隧道工程国家重点实验室, 重庆 400074; 2. 重庆交通大学 土木工程学院, 重庆 400074)

摘要: 为简化 Winkler 地基板动力学系统的求解, 对该系统时间、空间坐标进行缩放变换, 建立了与系统参数解耦的广义动力学方程与频率方程, 得到无量纲频率关于板长的预解集, 即: 频率-板长曲面. 分析此曲面特性, 并基于此曲面提出预解-定解简化算法, 通过与文献算例比对, 验证了该算法的正确性与准确性. 研究表明: 任意系统参数值的变化, 仅影响时间、空间还原系数的大小, 因此, 频率-板长曲面具有适用于系统参数值任意变化的一般性, 可作为该系统的一般解; 依托于频率-板长曲面, 仅通过线性转换即可实现对系统频率的定解, 不仅避免了传统方法所涉及的多参数超越方程组的非线性迭代求解问题, 同时也避免了因系统参数变化而导致的重复求解, 实现了该系统求解的简化.

关键词: Winkler 地基板; 动力学系统; 预解集; 简化求解

中图分类号: TU470⁺.1

文献标志码: A

文章编号: 1006-7930(2024)06-0791-06

Generalized and simplified solution of Winkler foundation plate dynamic system

ZHENG Gang¹, DU Zongsong², CAO Hesheng², LI Hao²

(1. State Key Lab of Mountain Bridge and Tunnel Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China;

2. College of Civil Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: In order to simplify the solution of the Winkler foundation plate dynamic system, the time and space coordinates of the system are scaled and transformed, and the generalized dynamic equation and frequency equation that are decoupled from the system parameters are established. The pre-solution set of dimensionless frequency on plate length is obtained, namely: frequency-plate length surface. The characteristics of this surface are analyzed, a pre-solution-definite solution simplification algorithm is proposed based on this surface, and the correctness and accuracy of the algorithm are verified by comparing it with the literature example. The results show that: the change of any system parameter value only affects the size of the time and space reduction coefficient, so the frequency-plate length surface has a generality suitable for arbitrary changes in the system parameter value, which can be used as the general solution of the system; relying on the frequency-plate length surface, the fixed solution of the system frequency can be realized only through linear conversion, which not only avoids the nonlinear iterative solution of the multi-parameter transcendental equation system involved in the traditional method, but also avoids the repeated solution caused by the change of system parameters, and realizes the simplification of the system solution.

Key words: Winkler foundation; kinetic systems; pre-solution set; simplified solution

弹性地基板由于在铁路轨道^[1]、公路路面^[2]、机场跑道^[3]、房建基础^[4]等结构中广泛应用, 受到了各国学者的关注^[5-6]. 为描述结构与地基间的相互作用, 学者们提出了各种弹性地基模型^[7-10], 其中, Winkler 地基板模型由于其形式简单, 参数较少, 至今仍得到比较广泛的应用^[11-13]. 为把握其

自由振动特性, 需对其动力学方程进行准确而便捷的求解.

已有较多文献通过理论研究、数值计算、算法优化等在准确性上取得了积极进展^[14-17]. 但当上述文献系统物理参数改变时则需付出较多时间重新计算. 因此, 如何在保证准确性的前提下进

收稿日期: 2023-03-20

修回日期: 2024-05-13

基金项目: 国家自然科学基金(51978112)

第一作者: 郑 罡(1972—), 男, 博士, 教授, 主要从事斜拉索振动控制、桥梁抗震设计及结构健康监测研究. E-mail: zhenggang@cqjtu.edu.cn

一步提高方法的便捷性就显得尤为重要。无量纲化是有效减少系统参数,提高计算效率的方法之一。就作者掌握的资料,文献[18-20]均使用无量纲方法简化了计算,鉴于所研究问题的不同,无量纲方法也不相同。邢誉峰^[18]通过定义无量纲频率达到时间维度上的无量纲,但其动力学方程并未得到简化,仍为有量纲动力学方程;徐腾飞^[19]通过对板长归一化,达到动力学方程空间维度的无量纲;滕兆春^[20]同时对时间、空间放缩达到动力学方程的完全无量纲化。邢誉峰^[18]在边长固定的情况下,仅需简单的线性变换即可得到任意密度、厚度与抗弯刚度和地基反应模量改变后的真实频率;徐腾飞^[19]在长宽比固定时,通过线性变换即可得到其余物理参数任意改变后的真实频率;滕兆春^[20]经无量纲化后的频率仅依赖于地基参数^[21]与长宽比。由此可见,经无量纲化后,频率受参数的限制更小,且适用范围更广。目前,无量纲方法更多依赖于具体研究的对象,且无法得到完全不受物理参数限制的解。

为使无量纲方法更具一般性,本文通过时空放缩将 Winkler 地基板动力学方程系数广义化,建立与系统参数解耦的动力学方程与频率方程,在这个新的无量纲方程中,所有的系数都能成一个固定的比例。然后,做出无量纲频率—无量纲边长关系曲面,并利用该曲面提出弹性地基板广义化算法,最后通过与文献结果比较,说明了该方法的正确性与准确性。

1 自由振动方程及参数广义化

1.1 弹性地基矩形板自由振动方程

在地基变形服从文克勒假定同时不考虑转动惯量、剪切变形以及小挠度弯曲理论下,考虑将沿 x 和 y 方向长度为 a , 宽度为 b , 厚度为 h 的矩形 Kirchhoff 薄板置于 Winkler 地基上,如图 1 所示。

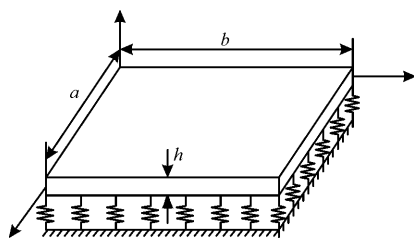


图1 弹性地基上矩形薄板及其坐标

Fig. 1 Thin plate on the Winkler foundation with coordinate convention

其自由振动的动力学方程^[22]为

$$\tilde{D} \nabla^4 \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) + \tilde{K} \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) + \tilde{\rho} \tilde{h} \frac{\partial^2 \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}^2} = 0 \quad (1)$$

式(1)为带有 4 个常系数的偏微分方程。

式中: ∇^4 为 Laplace 双算子, $\tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})$ 为动挠度曲线, \tilde{x} 、 \tilde{y} 、 \tilde{t} 分别为两个空间、一个时间坐标自变量,四个常系数依次对应抗弯刚度 \tilde{D} 、地基反应模量 \tilde{K} 、密度 $\tilde{\rho}$ 以及厚度 \tilde{h} 四个分布参数。在上式及下文的表达中,带波浪线“~”的符号表示有量纲量,不带波浪线符号表示无量纲量。

1.2 参数广义化无量纲动力学方程

1.2.1 参数广义化

为使微分方程形式不依赖任何物理参数,达到最简形式,在时间、空间下放缩,建立新的时空坐标系如下。

$$\tilde{x} = \alpha_x x \quad (2)$$

$$\tilde{y} = \alpha_y y \quad (3)$$

$$\tilde{t} = \alpha_t t \quad (4)$$

式中: α_x 、 α_y 、 α_t 是新参考系下待定的还原系数。

将线性变化式(2)~式(4)代入式(1)可得

$$\begin{aligned} \tilde{D} \left[\frac{\alpha_x \alpha_y}{\alpha_x^4} \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\alpha_x \alpha_y}{\alpha_x^2 \alpha_y^2} \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\alpha_x \alpha_y}{\alpha_y^4} \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} \right] + \\ \tilde{K} \alpha_x \alpha_y w(x, y, t) + \tilde{\rho} \tilde{h} \frac{\alpha_x \alpha_y}{\alpha_t^2} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

令

$$\frac{\alpha_x \alpha_y}{\alpha_x^4} \tilde{D} = \frac{\alpha_x \alpha_y}{\alpha_x^2 \alpha_y^2} \tilde{D} = \frac{\alpha_x \alpha_y}{\alpha_y^4} \tilde{D} = \tilde{K} \alpha_x \alpha_y = \tilde{\rho} \tilde{h} \frac{\alpha_x \alpha_y}{\alpha_t^2} = 1 \quad (6)$$

解得

$$\alpha_x = \alpha_y = \left(\frac{\tilde{D}}{\tilde{K}} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (7)$$

$$\alpha_t = \left(\frac{\tilde{\rho} \tilde{h}}{\tilde{K}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

当时间、空间还原系数按上式(7)、式(8)取值时,有量纲动力学方程式(1)即可转化为如下参数广义化形式(后称广义化动力学方程)。

$$\left[\frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} \right] + w(x, y, t) + \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (9)$$

对比式(1)和式(9)可知,通过时空变换后的动力学方程中系统参数均化成了常数,且成固定比例,同时原动力学方程中的抗弯刚度 \tilde{D} 、地基反

应模量 \tilde{K} 、线密度 $\tilde{\rho}h$ 均化为 1, 实现了动力学方程的彻底无量纲化。

1.2.2 通解

按文献[23]中辛几何方法, 利用分离变量法的思路, 假设

$$w(x, y, t) = W(x, y) \exp(i\omega t) \quad (10)$$

式中: $W(x, y) = \phi(x)\psi(y)$; $\phi(x) = e^{\mu x}$; $\psi(y) = e^{\lambda y}$. 将式(10)带入式(9)中可得

$$(\mu^2 + \lambda^2)^2 = (\omega^2 - 1) = k^4 \quad (11)$$

则振型函数的一般形式为

$$\begin{aligned} \phi(x) &= A_2 \cos(\beta_1 x) + B_2 \sin(\beta_1 x) + \\ &C_2 \cosh(\beta_2 x) + D_2 \sinh(\beta_2 x) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \psi(y) &= A_1 \cos(\alpha_1 y) + B_1 \sin(\alpha_1 y) + \\ &C_1 \cosh(\alpha_2 y) + D_1 \sinh(\alpha_2 y) \end{aligned} \quad (13)$$

式中: $A_1 \sim D_1$, $A_2 \sim D_2$ 为复常数, 其值需由边界条件和初始条件确定; 而 α_1 、 α_2 、 β_1 、 β_2 的值由下式确定。

$$\alpha = \sqrt{k^2 - \beta_1^2}, \quad \alpha = \sqrt{k^2 + \beta_1^2} \quad (14)$$

表 1 广义化前后的物理量

Tab. 1 Quantities before and after scaling

物理量	角频率	抗弯刚度	板长(x 方向)	板长(y 方向)	密度	厚度	地基反应模量
符号	$\tilde{\omega}(\omega)$	$\tilde{D}(D)$	$\tilde{a}(a)$	$\tilde{b}(b)$	$\tilde{\rho}(\rho)$	$\tilde{h}(h)$	$\tilde{K}(K)$
量纲	$[T]^{-1}(-)$	$[M][L]^2[T]^{-2}(-)$	$[L](-)$	$[L](-)$	$[M][L]^{-3}(-)$	$[L](-)$	$[M][L]^{-2}[T]^{-2}(-)$
单位	rad/s(-)	kg · m ² /s ² (-)	m(-)	m(-)	kg/m ³ (-)	m(-)	kg/m ² · s ⁻² (-)

注: 广义化后的物理量包含在大括号中, $[T]$ 、 $[L]$ 和 $[M]$ 分别表示时间、长度和质量的量纲, 表示无量纲或无单位。

可由式(2)~式(4)中的线性变化得出以下关系。

$$\tilde{\omega} = (1/\alpha_i)\omega \quad (20)$$

$$\tilde{D} = \alpha_i^4 \tilde{\rho}h D / \alpha_i^2 \quad (21)$$

$$\tilde{a} = \alpha_i a \quad (22)$$

$$\tilde{b} = \alpha_i b \quad (23)$$

$$\tilde{\rho}h = \tilde{\rho}h \rho h \quad (24)$$

$$\tilde{K} = \tilde{\rho}h K / \alpha_i^2 \quad (25)$$

式(20)~式(25)的每一个方程左边是缩放之前的各物理量, 右边是相应的还原系数, 以及广义化以后的各物理量。其中在式(24)中线密度 ρh 为定值 1, 表示为单位量。

2 隐含于频率方程中的性质

2.1 对称性

通过数值计算求解频率方程组(18)、(19), 得到一阶固有无量纲基频 ω 与无量纲边长 $a(b)$ 的值。然后绘制出无量纲基频-边长曲面, 如图 2 所示。

可发现通过本文的约化后, 得到了不同无量

$$\beta_1 = \sqrt{k^2 - \alpha_1^2}, \quad \beta_2 = \sqrt{k^2 + \alpha_1^2} \quad (15)$$

式中: $k^4 = (\omega^2 - 1)$ 。

1.2.3 频率方程

在广义化的空间下, 考虑边界条件为两邻边简支两邻边固支(SSCC)为

$$\phi(x) = \phi''(x) = 0, \text{ 在 } x=0, a \quad (16)$$

$$\psi(y) = \psi''(y) = 0, \text{ 在 } y=0, b \quad (17)$$

将振型函数的通解式(12)、(13)分别引入边界条件式(16)、(17)中, 可得到频率方程组如下。

$$\alpha_2 \tan(\alpha_1 b) = \alpha_1 \tanh(\alpha_2 b) \quad (18)$$

$$\beta_2 \tan(\beta_1 a) = \beta_1 \tanh(\beta_2 a) \quad (19)$$

由式(18)、式(19)可知, 该方程不含任何系统参数, 各阶无量纲频率 ω_i 仅由无量纲边长 $a(b)$ 决定, 这是与以往频率方程不同之处。

1.2.4 两种坐标下的物理量转化关系

由上文线性变化过程可知, 新的时空坐标系下的各参数物理量已不同, 表 1 给出两个坐标系下的各参数。

纲边长下的无量纲频率, 且此频率不受其他系统参数的影响, 这是以往方法不能得到的。同时此曲面关于平面 $a=b$ 对称, 且边长越短, 其频率越大, 这也与现实中 Winkler 地基上矩形板自由振动频率特征一致, 即: 当参数固定时, 边长越长, 基频越小; 边长越短, 基频越大。

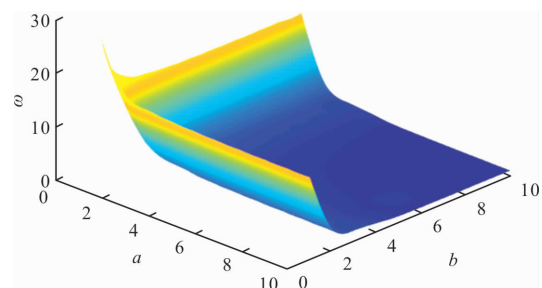


图 2 无量纲基频-边长曲面(SSCC)

Fig. 2 Dimensionless fundamental frequency-edge length curved surface

2.2 单调性

分析式(7)、(22)、(23)可以发现, 地基抗弯刚度仅通过影响无量纲边长而影响无量纲频率; 密度和厚度则不会影响无量纲频率, 而是通过影

响时间还原系数进而影响有量纲频率；地基反应模量则是同时通过影响无量纲边长和时间还原系数来影响有量纲频率。所以本文以文献[19]算例 1 参数为例，作出一边板长 $\bar{a}=1\text{ m}$ 时的解平面，并给出边界条件为 SSCC 的前十阶无量纲频率-边长关系曲线，如图 3 所示。

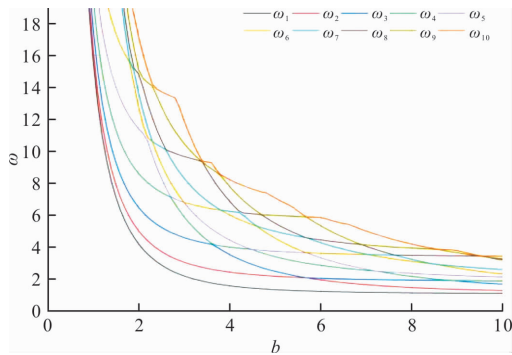


图 3 无量纲频率-边长曲线 (SSCC)

Fig. 3 Dimensionless frequency-edge length curve

可看出，在上述边界条件下，弹性地基上矩形板的无量纲频率均表现为：(1)当一边无量纲边长确定时，板的无量纲频率随着另一边无量纲边长的增加而减小。这也与频率的物理意义：随着边长的增加而减小相一致；(2)当两边边长相等时 (即 $\bar{a}=\bar{b}=1$)，图中会出现多组曲线相交的情况，代表此时存在同频现象。

3 广义化动力学方程算法及算例

3.1 预解-定解算法

由无量纲基频-边长曲面、线性变换式(式(2)~式(4))、频率转换关系式(20)、边长转换关系式(22)、(23)，可建立图 4 所示预解-定解算法。

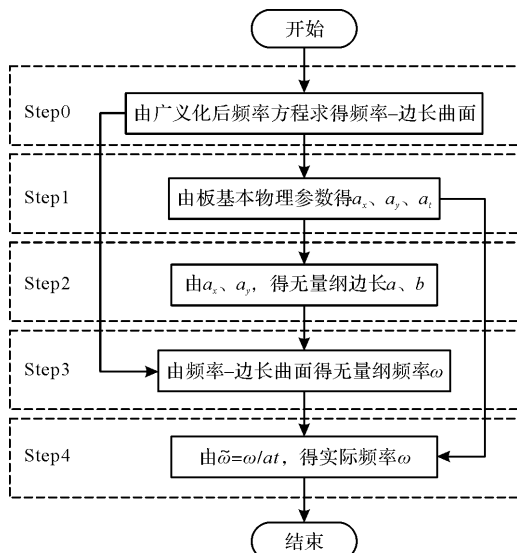


图 4 预解-定解算法流程图

Fig. 4 Flow chart of pre-solution-definite solution algorithm

图 4 所示流程图需经历 5 步即可得到任意条件下的无量纲频率，此算法无需提前知晓具体系统参数而得到无量纲频率，实际频率只需通过简单的线性变换即可。

Step0: 求解广义化后的频率方程式(18)、式(19)，并得到无量纲频率-边长曲面。

Step1: 根据 $\alpha_x=\alpha_y=\sqrt[4]{DK}$ 、 $\alpha_t=\sqrt{\bar{\rho}\bar{h}/K}$ 分别计算空间、时间还原系数。

Step2: 将空间、时间还原系数带入式(22)、式(23)中，计算无量纲边长 a 、 b 。

Step3: 在无量纲基频-边长曲面中，根据无量纲边长定解各阶无量纲频率 ω_i 。

Step4: 根据时间还原系数 α_t ，根据频率转化式(20)得到各阶有量纲频率 $\tilde{\omega}_i$ 。

3.2 算例

考虑一矩形薄板，其参数为： $\bar{a}\times\bar{b}=1\text{ m}\times 1.2\text{ m}$ ， $\bar{h}=0.02\text{ m}$ ， $\bar{\rho}=2\,800\text{ kg/m}^3$ ， $\bar{E}=7.2\times 10^{10}\text{ Pa}$ ， $\bar{\nu}=0.3$ 。在边界条件为四边固支(CCCC)、两邻边简支两邻边固支(SSCC)、一边简支三边固支(SCCC)情况下，求解超越方程得到有量纲频率 $\tilde{\omega}$ 与本文有限元解 $\tilde{\omega}_{FEM}$ ，与文献[19]有限元结果($\tilde{\omega}'_{PEM}$)对比，与文献算例吻合良好。具体结果见表 2、表 3、表 4。其中相对误差 $Er(\tilde{\omega})$ 计算公式如下。

$$Er(\tilde{\omega})=\frac{\tilde{\omega}-\tilde{\omega}'_{FEM}}{\tilde{\omega}}\times 100\% \quad (26)$$

表 2 四边固支条件下有限元频率对比

Tab. 2 Finite element frequency comparison under the condition of 4 edge clamped

阶次	α_1	β_1	$\tilde{\omega}$	$\tilde{\omega}_{FEM}$	$\tilde{\omega}'_{FEM}$	$Er(\tilde{\omega})$
1	0.59	0.76	215.54	217.88	217.79	-1.04
2	1.11	0.69	311.84	314.17	314.01	-0.70
3	0.54	1.36	371.71	373.14	372.96	-0.34
4	1.06	1.31	474.04	476.87	476.47	-0.51
5	1.59	0.65	491.72	493.27	492.98	-0.26
6	0.51	1.92	644.76	645.66	645.34	-0.09
7	1.55	1.27	653.27	656.14	655.43	-0.33
8	1.02	1.90	747.90	748.23	747.65	0.03
9	2.06	0.63	748.41	751.32	750.73	-0.31
10	2.03	1.24	907.57	909.94	908.83	-0.14

表 3 两邻边简支两邻边固支条件下频率对比

Tab. 3 Frequency comparison under the condition of 2 edge simple support and other clamped

阶次	α_1	β_1	$\tilde{\omega}$	$\tilde{\omega}_{PEM}$	$\tilde{\omega}'_{FEM}$	$Er(\tilde{\omega})$
1	0.53	0.66	193.31	193.78	193.71	-0.21
2	1.02	0.62	273.50	274.05	273.90	-0.15

续表 3

阶次	α_1	β_1	$\bar{\omega}$	$\bar{\omega}_{\text{PEM}}$	$\bar{\omega}'_{\text{FEM}}$	$Er(\bar{\omega})$
3	0.50	1.23	320.18	320.58	320.43	-0.08
4	0.99	1.21	415.54	416.25	415.92	-0.09
5	1.49	0.60	435.13	435.58	435.33	-0.05
6	0.49	1.79	565.77	566.10	565.82	-0.01
7	1.47	1.19	583.55	584.30	583.69	-0.02
8	0.97	1.78	665.71	666.31	665.69	0.00
9	1.95	0.59	674.36	674.76	674.37	-0.00
10	1.94	1.17	824.23	824.86	823.90	0.04

表 4 一边简支三边固支条件下频率对比

Tab. 4 Frequency comparison under the condition of 1 edge simple support and other clamped

阶次	α_1	β_1	$\bar{\omega}$	$\bar{\omega}_{\text{FEM}}$	$\bar{\omega}'_{\text{FEM}}$	$Er(\bar{\omega})$
1	0.61	0.65	201.11	202.19	202.11	-0.50
2	1.12	0.61	301.04	302.02	301.87	-0.28
3	0.55	1.23	326.10	326.93	326.77	-0.21
4	1.06	1.20	436.79	438.23	437.87	-0.25
5	1.59	0.60	483.62	484.33	484.06	-0.09
6	0.52	1.79	570.06	570.61	570.32	-0.05
7	1.56	1.18	623.82	625.22	624.57	-0.12
8	1.03	1.77	681.70	682.87	682.21	-0.07
9	2.06	0.59	742.09	742.67	742.25	-0.02
10	1.52	1.76	867.81	869.24	868.03	-0.03

4 结论

(1)广义化后的动力学方程适用于任意物理参数的 Winkler 地基板。通过本文方法所得到的广义化动力学方程系数之比固定,不依赖于其物理参数的具体值,对不同弹性地基上矩形板自由振动问题具有统一形式;

(2)本文导出的频率方程具有统一的标准形式。在给定边界条件下,一次性绘制的频率-板长函数曲面适用于物理参数不同的所有 Winkler 地基上的矩形板,确保了频率方程在不同情况的适用性;

(3)预解-定解简化算法有效地提高了计算效率。与传统算法相比,预解-定解算法仅涉及一次求解,当参数改变时只需线性变换即可得到真实频率,避免了传统方法所涉及的多参数超越方程组的非线性迭代求解问题以及因系统参数改变而重复迭代计算的情况。

参考文献 References

[1] 李雪宁,刘俊卿. 无拉力弹性地基板振动分析的一种方法[J]. 西安建筑科技大学学报(自然科学版),2006

(1):135-139.

LI Xuening, LIU Junqing. A method for vibration analysis of non-tensile elastic foundation[J]. J. Xi'an Univ. of Arch. & Tech. (Natural Science Edition), 2006(1):135-139.

[2] 薛治国,张博,孙宝印,等. 热环境下弹性地基板屈曲路径和振动特性研究[J]. 科学技术与工程,2022,22(16):6393-6399

XUE Zhiguo, ZHANG Bo, SUN Baoyin, et al. Post-buckling paths and vibration characteristics of a plate resting on the elastic foundation in thermal environment[J]. Science Technology and Engineering,2022,22(16):6393-6399.

[3] KUMAR Y. Free vibration analysis of isotropic rectangular plates on Winkler foundation using differential transform method[J]. International Journal of Applied Mechanics & Engineering, 2013, 18(2):589-597.

[4] 王克林,黄义. 弹性地基上四边自由矩形板[J]. 计算结构力学及其应用,1985(2):47-58.

WANG Kelin, HUANG Yi. Four-sided free rectangular slabs on elastic foundations [J]. Computational Structural Mechanics and Its Applications, 1985 (2): 47-58.

[5] QING X,PING X,LI Z J, et al. Bending and free vibration and analysis of laminated plates on Winkler foundations based on meshless layerwise theory [J]. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2022,29(27):6168-6187.

[6] LI W, ZHANG X,DU J, et al. An exact series solution for the transverse vibration of rectangular plates with general elastic boundary supports[J]. Journal of Sound and Vibration,2008,321(1):254-269.

[7] 邢誉峰,徐腾飞. 双参数弹性地基上正交各向异性矩形薄板自由振动的精确解[J]. 振动工程学报,2014,27(2):269-274.

XING Yufeng, XU Tengfei. Accurate solution of free vibration of orthotropic rectangular sheet on biparametric elastic foundation[J]. Journal of Vibration Engineering,2014,27(2):269-274.

[8] 何芳社,悦峰. 横观各向同性双参数地基上矩形薄板的弯曲[J]. 西安建筑科技大学学报(自然科学版),2018,50(5):755-760.

HE Fangshe, YUE Feng. The bending of rectangular thin plate on the transversely isotropic two-parameter elastic foundation[J]. J. Xi'an Univ. of Arch. & Tech. (Natural Science Edition),2018,50(5):755-760.

[9] FU D, DENG B, YANG M, et al. Analytical solution of overlying pipe deformation caused by tunnel excavation based on Pasternak foundation model[J]. Scientific

- ic Reports, 2023, 13: 921.
- [10] 卢正, 姚海林, 吴莎, 等. 黏弹性地基板在矩形变速荷载作用下的振动分析[J]. 岩土力学, 2010, 31(11): 3613-3618.
- LU Zheng, YAO Hailin, WU Sha, et al. Vibration analysis of a plate on viscoelastic foundation under moving rectangular loads with variable speeds[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, 31(11): 3613-3618.
- [11] WATTS G, SINGHA M K, PRADYUMNA S. Non-linear bending analysis of isotropic plates supported on Winkler foundation using element free Galerkin method[J]. Int. J. of Struct. and Civil Eng. Research, 2015, 4(4): 301-306.
- [12] 李连祥, 陈天宇, 白璐, 等. 基坑开挖对既有复合地基单桩的位移性状影响分析[J]. 西安建筑科技大学学报(自然科学版), 2019, 51(4): 486-492.
- LI Liangxiang, CHEN Tianyu, BAI Lu, et al. Analysis of horizontal displacement of single pile of existing composite foundation subjected to pit-excavation[J]. J. Xi'an Univ. of Arch. & Tech. (Natural Science Edition), 2019, 51(4): 486-492.
- [13] 谈至明, 成林燕. 考虑地基水平摩阻的 Winkler 地基上板模型解析[J]. 力学季刊, 2023, 44(1): 101-112.
- TAN Zhiming, CHENG Linyan. Analysis of Winkler foundation superplate model considering horizontal friction of foundation[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2023, 44(1): 101-112.
- [14] ZHONG Y, YIN J H. Free vibration analysis of a plate on foundation with completely free boundary by finite integral transform method[J]. Mechanics Research Communications, 2008, 35(4): 268-275.
- [15] 李欣业, 王立辉, 郭全梅, 等. 弹性地基板振动分析的一种解析方法[J]. 河北工业大学学报, 2002(5): 66-69.
- LI Xinye, WANG Lihui, GUO Quanmei, et al. An analytical method for vibration analysis of elastic foundation[J]. Journal of Hebei University of Technology, 2002(5): 66-69.
- [16] 李善倾, 袁鸿. Winkler 地基上固支薄板自由振动问题的准 Green 函数方法[J]. 应用数学和力学, 2011, 32(3): 253-262.
- LI Shanqing, YUAN Hong. Quasi-Green function method for free vibration problem of solid support sheet on Winkler[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2011, 32(3): 253-262.
- [17] 覃霞, 曾治平, 彭林欣. 弹性地基上矩形加肋板自由振动分析的无网格法[J]. 应用力学学报, 2017, 34(6): 1027-1033, 1214.
- QIN Xia, ZENG Zhiping, PENG Linxin. Meshless method for free vibration analysis of rectangular ribbed plate on elastic foundation[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2017, 34(6): 1027-1033, 1214.
- [18] XING Y, LIU B. New exact solutions for free vibrations of rectangular thin plates by symplectic dual method[J]. Acta Mechanica Sinica, 2009, 25(2): 265-270.
- [19] 徐腾飞, 邢誉峰. 弹性地基上矩形薄板自由振动的精确解[J]. 工程力学, 2014, 31(5): 43-48.
- XU Tengfei, XING Yufeng. Exact solutions for free vibrations of rectangular thin plates on the Winkler foundation[J]. Engineering Mechanics, 2014, 31(5): 43-48.
- [20] 滕兆春, 马鹏超, 蒲育. 弹性地基上矩形板自由振动的 GDQ 法求解[J]. 甘肃科学学报, 2012, 24(2): 97-100.
- TENG Zhaochun, MA Pengchao, PU Yu. Free vibration of rectangular plates on elastic foundations by using GDQ method[J]. Journal of Gansu Science, 2012, 24(2): 97-100.
- [21] 滕兆春, 丁树声, 郑鹏君. 弹性地基上变厚度矩形板自由振动的 GDQ 法求解[J]. 应用力学学报, 2014, 31(2): 236-241, 311.
- TENG Zhaochun, DING Shusheng, ZHENG Pengjun. GDQ method solution of free vibration of rectangular plate with variable thickness on elastic foundation[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2014, 31(2): 236-241, 311.
- [22] 徐芝伦. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- XU Zhilun. Elasticity[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006.
- [23] 钟万勰. 分离变量法与哈密顿体系[J]. 计算结构力学及其应用, 1991(3): 229-240.
- ZHONG Wanxie. Method of separation of variables and Hamiltonian system[J]. Computational Structural Mechanics and Application, 1991(3): 229-240.

(编辑 李睿奇)