

钢筋混凝土连续板徐变收缩效应的解析方法

杨应恩¹, 韩春秀², 刘有菊¹

(1. 保山学院 工程技术学院, 云南 保山 678000; 2. 云南民族大学 物理与土木工程系, 云南 昆明 650504)

摘要: 在钢筋混凝土梁板结构中, 混凝土板的徐变和收缩会使次梁产生梁间荷载增量, 导致次梁的梁间荷载发生变化. 计算这种梁间荷载增量的关键在于求解出连续板的徐变收缩重分布支反力, 因此, 提出一种分析钢筋混凝土连续板内力及支反力时变规律的解析方法, 分别导出徐变和收缩各自影响下钢筋混凝土连续单向板次内力和次反力的解析公式. 根据导出的公式编写 Matlab 计算程序, 对一个连续单向板算例进行分析. 结果表明: 混凝土徐变对梁间荷载的改变无贡献, 而混凝土收缩将使板底次梁产生额外的梁间荷载, 其大小与次反力相等, 且与楼板配筋率有关. 采用该方法可较方便地计算出连续板的徐变收缩次内力, 预估收缩导致的梁间荷载增量, 公式推导建立在清晰的力学基础之上, 是对连续板梁结构长期力学效应计算的一种有效补充.

关键词: 钢筋混凝土梁板结构; 连续单向板; 收缩徐变; 次反力; 梁间荷载增量

中图分类号: TU375.2

文献标志码: A

文章编号: 1006-7930(2024)04-0502-10

Analytical calculation method for creep and shrinkage effect of reinforced concrete continuous slabs

YANG Yingen¹, HAN Chunxiu², LIU Youju¹

(1. School of Engineering and Technology, Yunnan Baoshan University, Yunnan Baoshan 678000, China;

2. Department of Physics and Civil Engineering, Yunnan Minzu University, Kunming 650504, China)

Abstract: In the reinforced concrete beam-slab structure, the creep and shrinkage of the concrete slab will cause the load increment on secondary beams, resulting in the change of the load on secondary beams. The key to calculate the load increment between beams is to solve the creep and shrinkage redistribution reaction force of continuous slabs. Therefore, an analytical method for analyzing the time-varying law of internal force and support reaction force of reinforced concrete continuous slabs is proposed in this paper, the analytical formulas of secondary internal force and secondary reaction force of reinforced concrete continuous one-way slabs under the influence of creep and shrinkage are derived respectively. According to the formulas, a MATLAB calculation program is compiled, and an example of a reinforced concrete continuous one-way slabs is analyzed by using this program. The results show that concrete creep has no contribution to the change of inter-beam load, while concrete shrinkage will cause additional inter-beam load on the secondary beam at the bottom of the slab, which is equal to the secondary reaction force and related to the reinforcement ratio of the slab. The creep and shrinkage secondary internal force of the continuous slabs can be calculated expediently, and the load increment on beams caused by shrinkage in the slab-beam structure can be estimated by using this method. The formula derivation is based on clear mechanics, which is an effective supplement to the calculation of long-term mechanical effects of continuous slab-beam structure.

Key words: reinforced concrete beam-slab structure; continuous one-way slabs; shrinkage and creep; secondary reaction force; load increment on beams

钢筋混凝土梁板结构具有传力路径明确、施工方便等特点, 在土木工程中应用十分广泛. 在结构中, 次梁是板的支座, 板的计算模型为连续板. 由于混凝土板的收缩和徐变, 次梁的荷载将

收稿日期: 2022-12-04

修回日期: 2024-03-18

基金项目: 国家自然科学基金(52068068, 51708486); 保山学院自然科学研究项目(ZKJC202001)

第一作者: 杨应恩(1990—), 男, 硕士, 讲师, 主要研究方向为钢筋混凝土结构及组合结构理论计算. E-mail: 534117476@qq.com

通信作者: 韩春秀(1980—), 女, 博士, 副教授, 主要研究方向为组合结构新型理论计算方法研究. E-mail: 593416010@qq.com

发生变化,产生额外的梁间荷载。这是由于在钢筋混凝土连续单向板中,混凝土的收缩和徐变会受到内部配筋约束和外部支座约束双重作用,内部配筋约束将引起截面应力重分布,产生重分布内力,外部支座约束将引起约束力重分布,产生次内力和次反力,截面应力重分布和结构外部约束力重分布相互耦合。在梁板体系中,由于徐变收缩次内力和次反力的存在,即使外荷载恒定不变,连续板的支反力也会随时间而变化,这将直接导致楼板传向次梁的荷载随时间持续变化。这就意味着,次梁由于混凝土板的徐变和收缩产生了额外的梁间荷载。目前,《混凝土结构设计规范》(GB 50010—2010)^[1]仅对受弯构件的长期刚度提出相关规定,现行的系列结构设计规范对钢筋混凝土梁板结构的收缩徐变效应很少提及。如果不能准确计算出这部分额外增加的梁间荷载,则很有可能会低估次梁的配筋,对结构设计不利。因此,研究钢筋混凝土梁板结构的收缩徐变效应有着重要意义。

计算梁板结构中由混凝土板徐变收缩导致的梁间荷载改变量,关键在于求解出钢筋混凝土连续板的徐变收缩重分布支反力以及重分布弯矩(也称“次反力”、“次内力”),而考虑连续板中混凝土收缩、徐变引起的力学效应,需要解决两方面问题:(1)从材料层面出发,寻求能准确预测混凝土收缩和徐变随时间变化的数学模型。针对这一问题,目前国内外已有比较成熟的成果,其中 CEB-FIP 模型^[2]、ACI 209R 模型^[3]、B3/B4 模型^[4]以及 JTG 3362—2018 模型^[5]已被广泛认可和采用;(2)搭建徐变收缩预测模型与结构内力之间的关系,寻求计算结构长期内力的力学方法。

目前,国内外学者对钢筋混凝土梁板结构的研究多集中于防连续倒塌^[6-7]、冲击动力响应^[8]、耐火性能^[9]、板柱节点冲切破坏^[10]等短期荷载效应的研究,涉及梁板结构收缩徐变效应的研究尚不多见。在徐变收缩影响结构的效应分析中,针对组合梁截面应力重分布及长期变形^[11-12],预应力筋的徐变收缩预应力损失^[13],组合箱梁结构的长期应力和变形^[14-15],结构收缩徐变参数敏感性^[16]等方面已取得了一系列实用性成果,但是对钢筋混凝土连续板徐变收缩的重分布次内力和次反力解析计算还了解甚浅。一些研究人员针对单跨板徐变收缩效应展开了相应研究,讨论了单跨

简支组合板的时变挠度^[17],单跨矩形薄板的徐变效应计算^[18],考虑非均匀收缩影响的单跨组合板长期挠度计算^[19],单跨钢筋混凝土板中长期挠度试验^[20]及理论计算^[21]等问题,但是并未涉及连续板徐变收缩次内力及次反力的计算和分析。针对超静定结构徐变效应的计算问题,沈蒲生等^[22]提出了力法分析方法,但未考虑结构内部配筋约束的影响。Zhang H 等^[23]对再生骨料混凝土复合连续板进行了试验和有限元建模,分析了非均匀收缩对裂缝、应变及挠度的影响。Qinghe W 等^[24]基于 ABAQUS 提出了非线性有限元模型,量化分析了再生粗骨料对连续组合板时变性能的影响。Gholamhoseini A 等^[25]介绍了连续组合板在干燥收缩和不同持续荷载水平下的长期试验结果,提供了干燥收缩在连续复合板内部作用的长期挠度和重新分布中起主导作用的实验证据。以上研究成果对结构内外约束相互耦合情况下的解析计算问题还有待进一步讨论。

本文通过解析方法对钢筋混凝土连续板徐变收缩次内力及次反力进行求解,解出次反力后即可得到梁间荷载的改变量。求解方法建立在清晰的力学概念之上,以期对钢筋混凝土梁板体系的徐变收缩效应分析提供力学思路,为准确预估连续板长期变形、长期应力以及预估梁间荷载的时变规律提供依据。

1 徐变收缩本构关系及基本假定

根据特劳斯德—巴曾理论,混凝土徐变收缩的应力应变关系^[26]为

$$\epsilon_{c,\varphi} = \frac{\sigma_{c,0}}{E_c} \cdot \varphi_t + \frac{\sigma_{c,\varphi}}{E_c} \cdot (1 + \chi_t \cdot \varphi_t) + \epsilon_{sh}(t) \quad (1)$$

式中: $\epsilon_{c,\varphi}$ 为加载后混凝土的应变增量; $\sigma_{c,0}$ 为加载初始时刻混凝土的应力; E_c 为混凝土弹性模量; $\sigma_{c,\varphi}$ 为混凝土的应力增量; φ_t 为徐变系数; $\epsilon_{sh}(t)$ 为持续时间内的收缩应变增量; χ_t 为老化系数,按式(2)^[27]计算,即

$$\chi_t = \frac{1}{1 - e^{-\varphi_t}} - \frac{1}{\varphi_t} \quad (2)$$

基本假定:

- (1)钢筋混凝土板满足平截面假定,钢筋与混凝土之间变形协调;
- (2)变形前后钢筋和混凝土板具有相同的曲率;
- (3)混凝土的弹性模量为常量;

(4)收缩应变的发展进程与徐变相似;

(5)连续板各支座无相对沉降位移,且可以自由转动。

2 徐变收缩次内力分析

2.1 分析思路及过程

图1为钢筋混凝土连续单向板计算模型,混凝土连续板除了有内部配筋约束外,还有支座带来的外部约束。由于混凝土的收缩和徐变,内部约束会引起截面应力重分布,外部约束会引起支反力重分布,从而连续板的总截面内力 $M_0(t)$ 也将随时间不断变化。连续板任意截面的内力构成中,一部分不随时间变化,为弹性内力 M_0 , 另一部分随时间而变化,即徐变收缩次内力 $M_\varphi(t)$, 这是引起连续板内力随时间变化的原因。

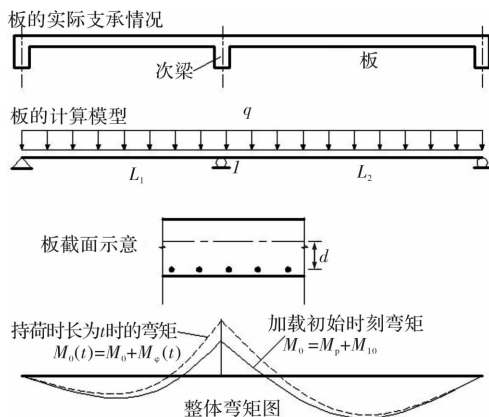


图1 钢筋混凝土连续单向板弯矩变化

Fig. 1 Bending moment variation diagram of reinforced concrete continuous one-way slab

如图2所示,将连续单向板解除多余约束,同时,代之以多余约束力 $X_1(t)$ 。加载初始时刻,多余约束力为 $X_1(0)$,板的任意截面弯矩为 M_0 。持续一段时间 t 之后,随着混凝土收缩和徐变的持续进行,多余约束力将发生改变,改变量为 $X_{1\varphi}$ (即为支座重分布次弯矩), $X_1(0)$ 和 $X_{1\varphi}$ 叠加后即得 $X_1(t)$,此时板中任意截面弯矩为 $M_0(t)$,也是随时间变化的。这样,静定的基本体系在均布荷载 q 、常弯矩 $X_1(0)$ 和支座重分布次弯矩 $X_{1\varphi}$ 共同作用下工作,它们对应的内力分别为静定荷载弯矩 M_p 、弹性次弯矩 M_{10} 和徐变收缩次弯矩 $M_\varphi(t)$ 。基本体系的受力和变形与原结构是等价的,因此,可根据相容条件,即变形前后中间支座两侧截面的相对转角为零,列方程求解多余约束力 $X_1(0)$ 和 $X_{1\varphi}$ 。那么,连续板的弹性次内力和徐变收缩次内力也不难得到。

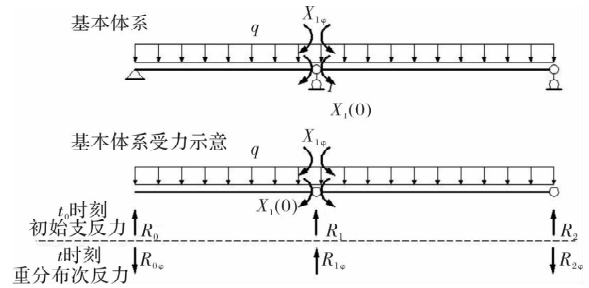


图2 基本体系及受力图

Fig. 2 Basic system and force diagram

将各支点从左至右依次编号为 0、1、2,对应的支反力记为 R_0 、 R_1 、 R_2 ,由于支座重分布次弯矩 $X_{1\varphi}$ 的存在,必将导致连续板各支点的支反力随时间变化,变化量分别为 $R_{0\varphi}$ 、 $R_{1\varphi}$ 、 $R_{2\varphi}$,即产生了重分布次反力。由静力学平衡条件可知,支座重分布次弯矩 $X_{1\varphi}$ 与重分布次反力自相平衡。

$$\begin{cases} R_{1\varphi} - R_{0\varphi} - R_{2\varphi} = 0 \\ X_{1\varphi} - R_{0\varphi} \cdot L_1 = 0 \\ X_{1\varphi} - R_{1\varphi} \cdot L_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

利用(3)式可验证徐变收缩次内力及次反力计算是否正确。后续公式推导结果若为正,则说明与图2假设方向相同,若推导结果带负号,则说明与图2假设方向相反。

如图3所示,在钢筋混凝土梁板体系中,连续板的支座由板底次梁担任,连续板的支反力将反作用于次梁,形成次梁的荷载,此即为梁板体系的传力过程。所以,当连续板由于收缩产生了次反力,这部分次反力将反作用于次梁,使次梁的荷载发生变化,变化量的大小即等于次反力的大小。只要将重分布次反力的表达式求出,即可掌握次梁的荷载变化,在结构设计中加以考虑。

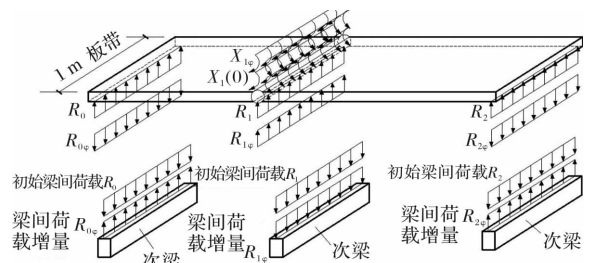


图3 梁间荷载增量与支座次反力关系示意图

Fig. 3 The relationship between load increment on beams and secondary reaction of supports

2.2 初始次内力计算

加载初始时刻,此时徐变收缩次内力 $X_{1\varphi} = 0$,基本体系在常荷载 q 和 $X_1(0)$ 作用下产生弹性变形,如图2所示。在加载前后,中间支座两侧截面的相对转角为零,即相容方程 $\Delta\theta_1 = 0$,将之展开,有

$$X_1(0) \cdot \delta_{11}(0) + \Delta_{1p}(0) = 0 \quad (4)$$

式中: $\delta_{11}(0)$ 为单位力 $X_1(0)=1$ 单独作用于基本体系所产生的中间支座处的相对弹性转角; $\Delta_{1p}(0)$ 为均布荷载 q 单独作用于基本体系所产生的中间支座处的相对弹性转角。

解方程(4)式, 得中间支座初始次内力为

$$X_1(0) = -\frac{\Delta_{1p}(0)}{\delta_{11}(0)} \quad (5)$$

式中的相对弹性转角 $\Delta_{1p}(0)$ 和 $\delta_{11}(0)$ 可根据图4由单位载荷法求出, 即

$$\begin{aligned} \delta_{11}(0) &= \sum \int_0^L -\bar{M}_1(x) \cdot \frac{-\bar{M}_{s0}(x)}{E_s I_s} dx \\ &= \sum \int_0^L -\bar{M}_1(x) \cdot \frac{-\bar{M}_1(x) \cdot \alpha_M}{(1+\beta) \cdot E_s I_s} dx \\ &= \sum \frac{\bar{A}_\omega \cdot \bar{y}_c \cdot \alpha_M}{(1+\beta) \cdot E_s I_s} \quad (6) \\ \Delta_{1p}(0) &= \sum \int_0^L -\bar{M}_1(x) \cdot \frac{M_{s0,p}(x)}{E_s I_s} dx \\ &= \sum \int_0^L -\bar{M}_1(x) \cdot \frac{M_p(x) \cdot \alpha_M}{(1+\beta) \cdot E_s I_s} dx \\ &= \sum -\frac{A_{\omega p} \cdot \bar{y}_{cp} \cdot \alpha_M}{(1+\beta) \cdot E_s I_s} \quad (7) \end{aligned}$$

式中: $\bar{M}_1(x)$ 、 $\bar{M}_{s0}(x)$ 为单位弯矩 $X_1(0)=1$ 单独作用于基本体系时的截面弯矩及内部钢筋弯矩; $M_p(x)$ 、 $M_{s0,p}(x)$ 为均布荷载 q 单独作用于基本体系时的截面弯矩及内部钢筋弯矩; \bar{A}_ω 、 $A_{\omega p}$ 为图4中单位力 $X_1(0)=1$ 和均布荷载 q 分别单独作用于基本体系时的弯矩图面积; \bar{y}_c 为 $\bar{M}_1(x)$ 自乘时对应形心处的竖标; \bar{y}_{cp} 为均布荷载弯矩图 $M_p(x)$ 形心 C 所对应于 $\bar{M}_1(x)$ 图的竖标; E_s 、 I_s 为配筋的弹性模量和惯性矩; β 、 α_M 按式(8)计算。

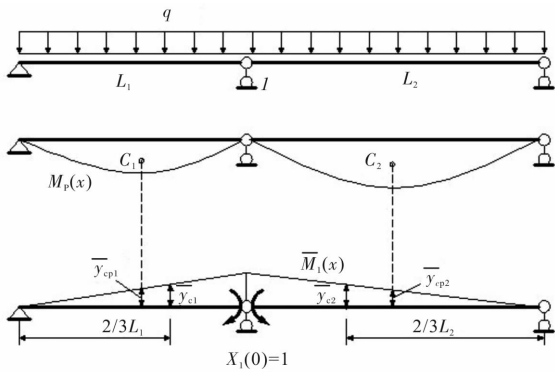


图4 转角位移计算示意图

Fig. 4 Schematic diagram for calculation of rotation angle displacement

$$\begin{cases} \beta = \frac{d^2 \cdot E_c A_c \cdot E_s A_s}{(E_c A_c + E_s A_s)(E_c I_c + E_s I_s)} \\ \alpha_M = \frac{E_s I_s}{E_c I_c + E_s I_s} \end{cases} \quad (8)$$

式中: E_c 、 I_c 为混凝土的弹性模量与惯性矩; A_c 、 A_s

分别为混凝土和配筋的截面面积; d 为混凝土截面形心与配筋截面形心的距离, 如图1所示。

2.3 徐变收缩次内力、次反力计算

2.3.1 仅考虑徐变的次内力、次反力计算

现将收缩效应剔除, 单独讨论混凝土的徐变对次内力的贡献情况。由于现浇楼板多为整体一次性浇筑, 故可认为各板跨混凝土徐变特性相同, 即徐变系数均为 φ_t 。

在加载之后的任意时刻 t , 中间支座处两侧截面的相对转角增量为零, 即相容条件为

$$\Delta\theta_{1\varphi} = 0 \quad (9)$$

相对转角的构成分析: 如图2所示, 静定的基本体系在均布荷载 q 、常弯矩 $X_1(0)$ 和支座重分布次弯矩 $X_{1\varphi}$ 共同作用下工作, 则中间支座在任意时刻 t 的相对转角增量 $\Delta\theta_{1\varphi}$ 的构成: 由均布荷载 q 、常弯矩 $X_1(0)$ 和支座重分布次弯矩 $X_{1\varphi}$ 共同引起, 其各自引起板截面曲率增量分别表示为 $\phi_{sq,p}$ 、 $\phi_{sq,10}$ 和 $\phi_{sq,1\varphi}$ 。钢筋混凝土板在变形后曲率协调, 钢筋曲率和整体板的曲率相等, 因此在计算基本体系中间支座截面相对转角时, 可用钢筋曲率来代替整体板的曲率。因此, 相容方程可展开为

$$\begin{aligned} &\sum \int_0^L \bar{M}_1(x) \cdot \phi_{sq,p}(x) dx + \sum \int_0^L \bar{M}_1(x) \cdot \\ &\phi_{sq,10}(x) dx + \sum \int_0^L \bar{M}_1(x) \cdot \phi_{sq,1\varphi}(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

因为基本体系为静定结构, 对于任意时刻 t 钢筋的截面曲率, 可由钢筋截面弯矩与钢筋截面曲率的线性关系得到, 曲率与弯矩存在下列关系。

$$\frac{\phi_{st}}{\phi_{s0}} = \frac{M_{st}}{M_{s0}} = \frac{M_{s0} + M_{sq}}{M_{s0}} \quad (11)$$

式中: ϕ_{s0} 、 ϕ_{st} 分别为钢筋在初始时刻和 t 时刻的截面曲率; M_{s0} 、 M_{sq} 、 M_{st} 分别为钢筋在初始时刻的弯矩, t 时刻的徐变重分布弯矩和 t 时刻的总弯矩。

根据(11)式可得到常弯矩作用下的钢筋截面曲率为

$$\phi_{st} = \left(1 + \frac{M_{sq}}{M_{s0}}\right) \cdot \phi_{s0} = (1 + \Phi_t) \cdot \phi_{s0} \quad (12)$$

式中: Φ_t 可抽象为考虑构件内部约束后的徐变系数。

根据特劳斯德代数本构关系可推知, 在变弯矩作用下, 徐变曲率与弹性曲率的关系为

$$\phi_{st} = (1 + \chi_t \cdot \Phi_t) \cdot \phi_{s0} \quad (13)$$

将钢筋初始弯矩和徐变重分布弯矩表达式^[28]代入 Φ_t , 可得到 Φ_t 的表达式如下。

$$\Phi_t = \frac{\left[(1 + \chi_t \varphi_t) \beta + \left(\frac{1}{\alpha_s} + \chi_t \varphi_t \right) (1 - \alpha_M) \right] \cdot \varphi_t}{\left[\left(\frac{1}{\alpha_s} + \chi_t \varphi_t \right) \left(\frac{1}{\alpha_M} + \chi_t \varphi_t \right) + (1 + \chi_t \varphi_t) D_2 \cdot d \right] \cdot \alpha_M} \quad (14)$$

因此, 相容方程式(10)可进一步展开为

$$\begin{aligned} & \sum \int_0^L \bar{M}_1(x) \cdot \Phi_t \frac{M_{s0,p}(x)}{E_s I_s} dx + \\ & \sum \int_0^L \bar{M}_1(x) \cdot \Phi_t \frac{M_{s0,10}(x)}{E_s I_s} dx + \\ & \sum \int_0^L \bar{M}_1(x) \cdot (1 + \chi_t \Phi_t) \frac{M_{s0,1\varphi}(x)}{E_s I_s} dx = 0 \quad (15) \end{aligned}$$

式中: $M_{s0,p}(x)$ 、 $M_{s0,10}(x)$ 、 $M_{s0,1\varphi}(x)$ 分别为均布荷载 q 、常弯矩 $X_1(0)$ 和支座重分布次弯矩 $X_{1\varphi}$ 产生的钢筋初弯矩。

式(15)中, Φ_t 和 $(1 + \chi_t \cdot \Phi_t)$ 两项均为时间 t 的函数, 可提到求和符号外。剩下的积分内容分别为均布荷载 q 、常弯矩 $X_1(0)$ 和支座重分布次弯矩 $X_{1\varphi}$ 产生于基本体系中间支座处两侧截面的弹性相对转角, 于是, 相容方程式(15)变为

$$\begin{aligned} & \Phi_t \cdot \Delta_{1p}(0) + \Phi_t \cdot X_1(0) \cdot \delta_{11}(0) + \\ & (1 + \chi_t \Phi_t) \cdot X_{1\varphi} \cdot \delta_{11}(0) = 0 \quad (16) \end{aligned}$$

式(16)为关于支座重分布次弯矩 $X_{1\varphi}$ 的代数方程, 求解可得

$$X_{1\varphi} = \frac{\Phi_t \cdot (X_1(0) \cdot \delta_{11}(0) + \Delta_{1p}(0))}{(1 + \chi_t \Phi_t) \cdot \delta_{11}(0)} \quad (17)$$

将加载初始时刻的相容方程式(4)代入式(17)可得

$$X_{1\varphi} = 0 \quad (18)$$

再由式(3)可得各支座徐变次反力为

$$\begin{cases} R_{0\varphi} = 0 \\ R_{1\varphi} = 0 \\ R_{2\varphi} = 0 \end{cases} \quad (19)$$

式(19)表明, 徐变特性对连续单向板的次内力及次反力均没有贡献, 不改变结构的超静定内力, 也就是说, 混凝土徐变不会导致梁间荷载变化。

2.3.2 考虑收缩的次内力、次反力计算

将混凝土收缩效应纳入考虑, 只需在相容方程中加入收缩相对转角, 这样支座重分布次弯矩 $X_{1\varphi}$ 中即包含了收缩效应。因此, 将相容方程(16)式加入收缩项后变为

$$\begin{aligned} & \Phi_t \cdot (\Delta_{1p}(0) + X_1(0) \cdot \delta_{11}(0)) + (1 + \chi_t \Phi_t) \cdot \\ & X_{1\varphi} \cdot \delta_{11}(0) + \sum \int_0^L -\bar{M}_1(x) \cdot \frac{M_{sq,sh}(x)}{E_s I_s} dx = 0 \quad (20) \end{aligned}$$

式中: $M_{sq,sh}(x)$ 为简支单向板钢筋的收缩重分布弯矩。

相容方程式(20)即为同时考虑徐变和收缩效应的相容方程, 将初始时刻的相容方程式(4)代入上式, 则相容方程中常荷载效应项即被消掉, 只剩下收缩效应。由于简支单向板钢筋的收缩重分布弯矩 $M_{sq,sh}(x)$ 沿跨长方向上保持不变, 与 x 无关, 只与时间有关, 将其写为 $M_{sq,sh}$, 并将其提到求和符号外面。则相容方程式(20)变为

$$(1 + \chi_t \Phi_t) \cdot X_1 \varphi \cdot \delta_{11}(0) - \frac{M_{sq,sh}}{E_s I_s} \sum \int_0^L \bar{M}_1(x) dx = 0 \quad (21)$$

式中: 积分项为单位弯矩 $X_1(0)=1$ 单独作用于基本体系时的弯矩图面积, 用 $\sum \bar{A}_\omega$ 表示。

解方程得

$$X_{1\varphi} = \frac{M_{sq,sh}}{E_s I_s \cdot \delta_{11}(0) \cdot (1 + \chi_t \Phi_t)} \sum \bar{A}_\omega \quad (22)$$

式中: 简支单向板钢筋的收缩重分布弯矩按式(23)计算^[28]

$$M_{sq,sh} = \frac{(1 + \chi_t \varphi_t) d \cdot \frac{\epsilon_{sh,\infty}}{\varphi_\infty} E_c A_c \cdot \varphi_t}{\left(\frac{1}{\alpha_s} + \chi_t \varphi_t \right) \left(\frac{1}{\alpha_M} + \chi_t \varphi_t \right) + (1 + \chi_t \varphi_t) D_2 \cdot d} \quad (23)$$

再根据平衡方程(3)式, 可得各支点的重分布次反力

$$\begin{cases} R_{0\varphi} = \frac{X_{1\varphi}}{L_1} \\ R_{1\varphi} = X_{1\varphi} \cdot \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \\ R_{2\varphi} = \frac{X_{1\varphi}}{L_2} \end{cases} \quad (24)$$

由式(22)和式(24)可以看到, 钢筋混凝土连续单向板的重分布次弯矩和次反力与混凝土的收缩特性以及配筋对构件的约束程度有关, 而与初始内力和外荷载无关。另外, 由式(24)可以看到, 两个边支座的重分布次反力与边跨跨度成反比, 跨度小的边跨对应的边支座次反力大, 而跨度大的边跨对应的边支座次反力小, 这与初始支反力的情况刚好相反。

至此, 支座重分布次弯矩 $X_{1\varphi}$ 和各支点的重分布次反力 $R_{0\varphi}$ 、 $R_{1\varphi}$ 、 $R_{2\varphi}$ 表达式均已求出, 根据截面法很容易求得沿板跨分布的收缩次弯矩 $M_\varphi(t)$, 进而得到连续单向板截面弯矩的时变规律。

根据图3梁间荷载增量与支座重分布次反力的关系, 即可得到各支座处梁间荷载增量的数值大小与重分布次反力 $R_{0\varphi}$ 、 $R_{1\varphi}$ 、 $R_{2\varphi}$ 相等, 方向则与之相反。

对于多跨连续板, 分析思路也类似, 将连续板中除两个边支座以外的中间支座解除多余约束, 代之以相应的多余约束力, 对应的相容方程展开

后是一方程组, 联立求解即可得到相应结果。

3 算例分析

某一两跨钢筋混凝土连续单向板, 结构尺寸、配筋及荷载如图 5 所示。

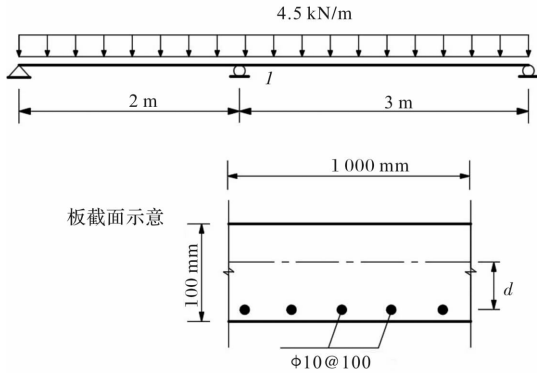


图 5 钢筋混凝土两跨连续单向板配筋及荷载
Fig. 5 Reinforcement quantity and load of rein-forced concrete two span continuous one-way slab

表 1 支座弯矩、支座反力随时间的变化

Tab. 1 Changes of negative bending moment and support reactions force with time

时间/d	徐变系数 φ_t	中间支座弯矩/kN·m			支座反力/kN								
		$X_1(0)$	$X_{1\varphi}$	$X_1(t)$	左边支座反力			中间支座反力			右边支座反力		
					R_0	$R_{0\varphi}$	$R_0(t)$	R_1	$R_{1\varphi}$	$R_1(t)$	R_2	$R_{2\varphi}$	$R_2(t)$
30	0.581	3.94	0.852	4.792	2.53	0.426	2.104	14.53	0.710	15.240	5.44	0.284	5.156
40	0.987	3.94	1.429	5.369	2.53	0.715	1.815	14.53	1.191	15.721	5.44	0.476	4.964
60	1.306	3.94	1.871	5.811	2.53	0.936	1.594	14.53	1.559	16.089	5.44	0.623	4.817
70	1.407	3.94	2.010	5.950	2.53	1.005	1.525	14.53	1.675	16.205	5.44	0.620	4.820
120	1.724	3.94	2.435	6.375	2.53	1.218	1.312	14.53	2.029	16.559	5.44	0.811	4.629
210	2.012	3.94	2.811	6.751	2.53	1.406	1.124	14.53	2.343	16.873	5.44	0.937	4.503
300	2.174	3.94	3.019	6.959	2.53	1.510	1.020	14.53	2.516	17.046	5.44	1.006	4.434
400	2.290	3.94	3.167	7.107	2.53	1.584	0.946	14.53	2.639	17.169	5.44	1.055	4.385
500	2.372	3.94	3.269	7.209	2.53	1.635	0.895	14.53	2.724	17.254	5.44	1.089	4.351
600	2.432	3.94	3.344	7.284	2.53	1.672	0.858	14.53	2.787	17.317	5.44	1.115	4.325
1 000	2.571	3.94	3.517	7.457	2.53	1.759	0.771	14.53	2.931	17.461	5.44	1.172	4.268

表 1 的计算结果均为正值,说明各次内力方向与图 2 所示方向相同. 中间支座重分布次弯矩 $X_{1\varphi}$ 以及各支座重分布次反力 $R_{0\varphi}$ 、 $R_{1\varphi}$ 、 $R_{2\varphi}$ 和徐变无关, 均为收缩引起,其数值与中间支座初始弯矩 $X_1(0)$ 以及各支座初始反力 R_0 、 R_1 、 R_2 无关, 只与混凝土的收缩特性和内部配筋的量有关. 根据支座重分布次弯矩 $X_{1\varphi}$ 与重分布次反力自相平衡,即式(3), 可以对表 1 的计算结果进行校核. 从表 1 计算结果可以看出:

(1)中间支座弯矩: 计算结果为正值, 说明支座重分布弯矩 $X_{1\varphi}$ 的实际方向与图 2 所假设方向一致,

施工方式为整体一次性浇筑, 各板跨具有相同的徐变特性, 取 1 m 板带为计算单元. 板厚为 100 mm, 采用 C30 混凝土, 混凝土弹性模量 $E_c=30\,000\text{ N/mm}^2$, 钢筋等级为 HPB300, 钢筋弹性模量 $E_s=210\,000\text{ N/mm}^2$, 混凝土板形心与钢筋形心距离 $d=31\text{ mm}$. 混凝土板截面面积 $A_c=99\,749\text{ mm}^2$ 、截面惯性矩为 $I_c=83\,332\,328\text{ mm}^4$, 钢筋截面面积 $A_s=785\text{ mm}^2$ 、截面惯性矩为 $I_s=4\,906\text{ mm}^4$, 配筋率为 0.78%. 环境相对湿度为 50%, 加载龄期为 28 d. 通过计算收缩次内力和次反力, 分析中间支座弯矩以及各支座反力的时变特性; 此外, 计算不同配筋率下的支座次反力, 分析收缩次反力对梁板体系结构荷载传递的影响.

采用欧洲 CEB-FIP(1990)模型^[2] 计算混凝土徐变系数 φ_t 和收缩应变终值 $\epsilon_{sh,\infty}$. 支座重分布次弯矩和各支点的重分布次反力计算结果见表 1.

混凝土收缩导致了钢筋混凝土连续单向板的中间支座出现重分布次弯矩, 方向与弹性次弯矩一致, 使得负弯矩持续增大. 从计算结果可以看出, 当持荷时长为 1 000 d 时, 中间支座负弯矩值增加了 3.517 kN·m, 相比初始值增加幅度为 89.3%, 将直接导致中间支座截面混凝土应变增加.

(2)支座反力: 各支座次反力计算结果也均为正, 说明各支座处均产生了次反力, 方向与图 2 所假设方向一致. 中间支座次反力方向与初始支座反力方向一致, 使得中间支座反力持续增大; 两个边支座处次反力方向与初始支座反力方向相反,

使得两个边支座处支座反力持续减小. 从表中计算结果可以看到, 当持荷时长为 1 000 d 时, 中间支座次反力为 2.931 kN, 支座反力增加了 20.2%; 左右两个边支座的支座反力分别减小了 1.759 和 1.172 kN, 减大幅度分别为 69.5% 和 21.5%. 在钢筋混凝土梁板体系中, 连续板的支座是次梁, 因此, 支座位置的收缩次反力将反作用于次梁, 使次梁的线荷载产生变化. 那么, 两个边支座处板底次梁的梁间荷载分别减少了 1.759 和 1.172 kN/m, 而中间支座位置处板底次梁的梁间荷载将增加 2.931 kN/m, 增加幅度为 20.2%, 这部分增加的梁间荷载是结构设计时考虑不到的. 如果楼板配筋率增加, 梁间荷载的增加幅度还会更大, 这对于结构设计是不利的.

为了更直观地看到内力及支反力的变化及相互关系, 图 6~图 11 绘出了中间支座重分布次弯矩、跨中截面次弯矩、各支座重分布次反力、中间支座时变负弯矩、各跨跨中时变弯矩以及各支座时变支反力随时间变化的情况, 从图中可以反映出内力及支反力变化的特点.

图 6 和图 7 所示中间支座重分布次弯矩和跨中截面次弯矩均为使板顶受拉的负弯矩, 二者方向相同且均随时间而增长, 且中间支座次弯矩的增长速度较跨中截面次弯矩的增长速度快, 增速快约 2 倍.

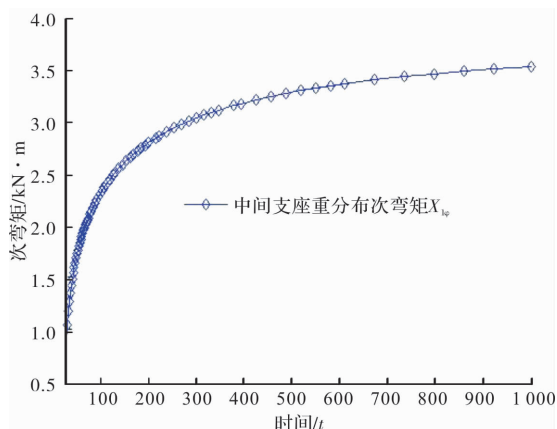


图 6 中间支座重分布次弯矩

Fig. 6 Redistributed secondary bending moment of intermediate support

图 8 所示三个支座重分布次反力曲线中, 中间支座重分布次反力与两个边支座重分布次反力方向相反, 量值均随时间而增长, 次反力数值增长速度以中间支座最快, 跨度较小的左跨边支座次之, 跨度较大的右跨边支座最慢. 图 6、图 7 所示次弯矩曲线和图 8 次反力曲线可看出, 在混凝土的早期龄期次弯矩和次反力增长较快, 当超过

300 d 后次弯矩和次反力虽有所增加, 但增长已趋于缓慢.

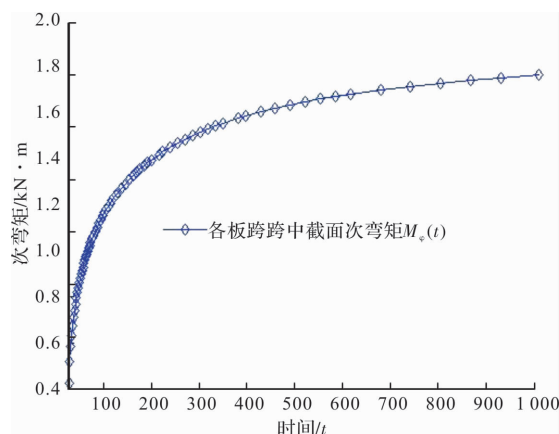


图 7 跨中截面次弯矩

Fig. 7 Secondary bending moment of midspan section for each span

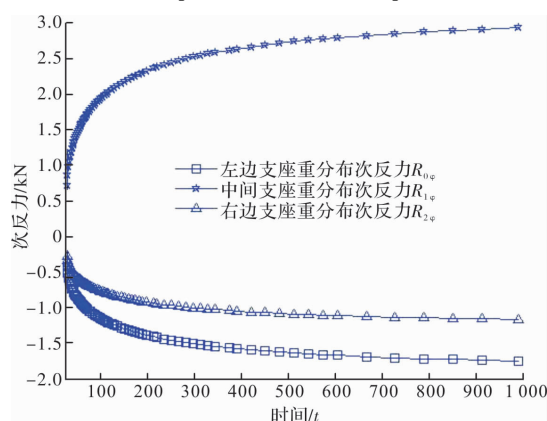


图 8 各支座重分布次反力

Fig. 8 Redistributed secondary reaction forces of each support

图 9 所示支座重分布次弯矩与初始负弯矩方向相同, 重分布次弯矩对支座负弯矩具有加强效应; 如图 10 所示, 跨中次弯矩方向与跨中初始弯矩方向相反, 重分布次弯矩对跨中截面弯矩具有削弱作用.

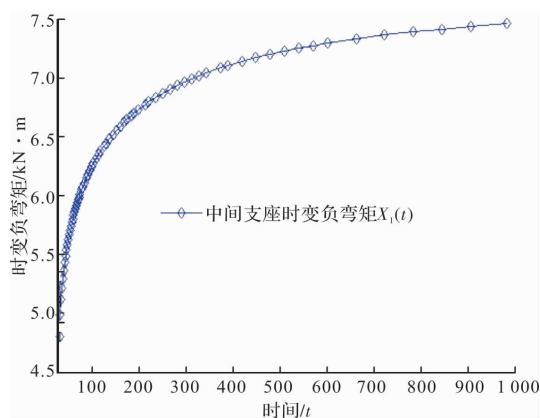


图 9 中间支座时变负弯矩

Fig. 9 Time varying negative bending moment of intermediate support

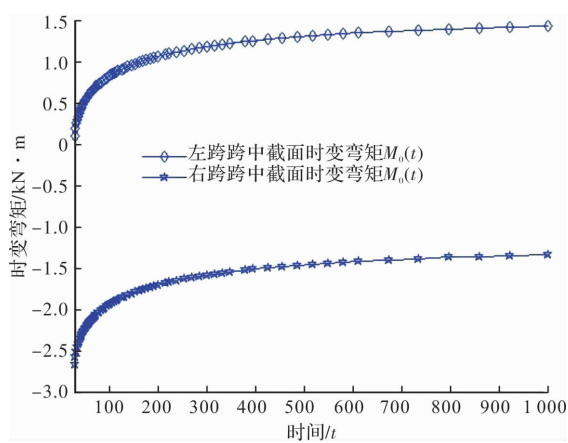


图 10 各跨跨中截面时变弯矩
Fig. 10 Time varying bending moment of midspan section for each span

图 11 所示中间支座次反力方向与初始支反力方向相同，次反力对中间支座反力具有加强效应，这将导致中间支座位置处板底次梁的梁间荷载持续增加；两个边支座次反力与初始支反力方向相反，次反力对边支座反力具有削弱作用，对应位置的板底次梁的梁间荷载将随时间持续减小。另外，三个支座的次反力相比较来看，以中间支座处的次反力数值最大，因此，该处对应板底次梁的梁间荷载增量也最多，受收缩影响的程度最大。

值得注意的是，中间支座处的收缩重分布次弯矩和次反力会随着配筋率的变化而不同。为了分

析配筋率对次弯矩和次反力的影响，计算连续板在持荷时长为 1 000 d 不同配筋率下中间支座的收缩次弯矩和各个支座次反力，计算结果列于表 2。

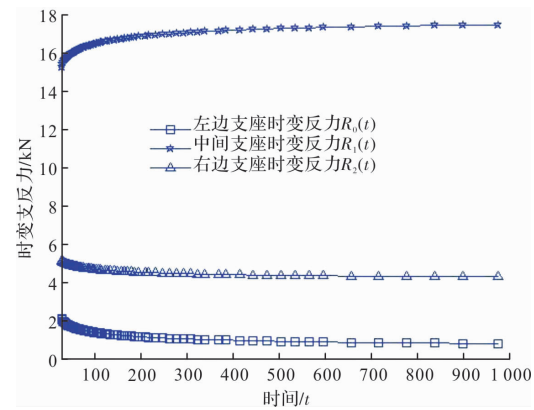


图 11 各支座时变支反力
Fig. 11 Time varying reaction forces of each support
表 2 计算结果可以看出如下规律：

(1)中间支座重分布次弯矩：中间支座重分布次弯矩随配筋率的增加而增大，次弯矩的增大速率略低于配筋率，当配筋率为 0.98% 时收缩产生的中间支座次弯矩即超过了由外荷载产生的弹性弯矩，而当配筋率为 2.2% 时中间支座次弯矩则达到了弹性弯矩的近 2 倍。如果结构设计时未对收缩次弯矩加以考虑，可能对结构设计不利，如中间支座位置板面开裂等；

表 2 不同配筋率的连续板在 1 000d 后的支座次弯矩和次反力

Tab. 2 Secondary bending moment and secondary reaction forces of continuous slab with different reinforcement ratio after 1 000 days

配筋率 $\rho/\%$	配筋截面面积 A_s/mm^2	配筋截面惯性矩 I_s/mm^4	中间支座次弯矩 $X_{1\varphi}/\text{kN}\cdot\text{m}$	左边支座次反力 $R_{0\varphi}/\text{kN}$	中间支座次反力 $R_{1\varphi}/\text{kN}$	右边支座次反力 $R_{2\varphi}/\text{kN}$
0.30	302	1 206	1.468	0.734	1.223	0.489
0.50	503	2 010	2.361	1.181	1.968	0.787
0.78	785	4 906	3.517	1.758	2.931	1.172
0.98	981	5 888	4.259	2.130	3.549	1.420
1.13	1 131	10 174	4.797	2.399	3.998	1.600
1.33	1 331	12 209	5.477	2.739	4.564	1.826
1.51	1 508	13 227	6.046	3.023	5.038	2.015
1.62	1 616	14 244	6.397	3.189	5.316	2.126
1.81	1 811	22 617	6.954	3.477	5.795	2.318
2.20	2 199	26 387	8.012	4.006	6.677	2.671

(2)各支座重分布次反力：各支座的重新分布次反力均随配筋率的增加而增大，且各支座次反力数值随配筋率的增大速率相等。当配筋率为 0.98% 时，中间支座重新分布次反力达到了 3.549 kN，这是 1 m 板带产生的数值，那么板底次梁将对应增加

3.549 kN/m 的梁间荷载，这已相当于结构设计中梁间恒载的 28% 左右。当配筋率为 2.2% 时，梁间荷载将增加 6.677 kN/m。对于压型钢板—混凝土连续楼板，其含钢率更大，将会产生更大的重新分布次反力。因此，这种重新分布次反力导致的次梁

荷载变化,应该引起重视,在结构设计时加以考虑。

4 结论

(1)基于钢筋截面弯矩与截面曲率的线性关系,引入考虑构件内部约束后的徐变系数 Φ_t ,可以分解连续板截面内力重分布与支座外部约束力重分布的耦合关系,使相容方程的积分式可解。该解析方法建立在清晰的力学基础之上,结果能较好地反映配筋混凝土连续板的力学特性;

(2)对于各板跨徐变特性相同的配筋混凝土连续单向板,徐变导致的次内力为零,混凝土的徐变对连续单向板超静定内力的改变没有贡献,不会导致次内力的产生,也不会导致梁间荷载的改变;

(3)由于混凝土收缩的影响,连续板的中间支座截面弯矩会大大超过初始弹性弯矩,可能导致板面开裂,这在结构设计时应予以考虑;

(4)收缩次内力、收缩次反力与初始内力和外荷载无关,只与混凝土的收缩特性以及内部配筋的约束程度有关。配筋率越大,重分布次内力、次反力的值越大,连续单向板的超静定内力改变量越大;

(5)在钢筋混凝土梁板结构中,次梁将由于混凝土板的收缩而产生额外的梁间荷载,这部分增加的梁间荷载大小就等于连续单向板的支座重分布次反力,在结构设计时需要加以考虑。

参考文献 References

- [1] 中华人民共和国住房和城乡建设部. 混凝土结构设计规范: GB 50010—2010[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2010.
Ministry of Housing and Urban-Rural Development of the People's Republic of China. Code for design of concrete structures: GB 50010—2010 [S]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2010.
- [2] Comité Euro-International Du Béton. CEB-FIP Model Code1990[S]. Lausanne: Thomas Thelford, 1993.
- [3] ACI COMMITTEE 209. ACI 209 R-29 Prediction of creep, shrinkage and temperature effects in concrete structures [S]. Detroit: American Concrete Institute, 1992.
- [4] BAZANT Z P, BAWEJA S. Creep and shrinkage prediction model for analysis and design of concrete structures-model B3[J]. Materials and Structure, 1995, 28(6): 357-365.
- [5] 中华人民共和国交通运输部. 公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计规范: JTG 3362—2018[S]. 北京: 人民交通出版社, 2018.
Ministry of Transport of the People's Republic of China. Specifications for design of highway reinforced concrete and prestressed concrete bridges and culverts: JTG 3362—2018 [S]. Beijing: China Communication Press, 2018.
- [6] YU J, LUO L, FANG Q. Structure behavior of reinforced concrete beam-slab assemblies subjected to perimeter middle column removal scenario[J]. Engineering Structures, 2020, 208: 110336.
- [7] KANG S B, WANG S, GAO S. Analytical study on one-way reinforced concrete beam-slab sub-structures under compressive arch action and catenary action[J]. Engineering Structures, 2020, 206: 110032.
- [8] 李圣童, 汪维, 梁仕发, 等. 长时爆炸冲击波荷载作用下梁板组合结构的动力响应[J]. 爆炸与冲击, 2022, 42(7): 138-149.
LI Shengtong, WANG Wei, LIANG Shifa, et al. Dynamic response of beam-slab composite structures under long-lasting explosion shock wave load[J]. Explosion and Shock Waves, 2022, 42(7): 138-149.
- [9] 陈恺峰, 刘栋栋. 地铁运用库钢筋混凝土梁板耐火性能分析[J]. 建筑结构, 2020, 50(S2): 544-547.
CHEN Kaifeng, LIU Dongdong. Fire resistance performance analysis of the reinforced-concrete beams and slabs in metro service depot[J]. Building Structure, 2020, 50(S2): 544-547.
- [10] 王朋, 于彬, 史庆轩, 等. 钢筋混凝土板柱节点冲切破坏模型及承载力分析[J]. 西安建筑科技大学学报(自然科学版), 2020, 52(6): 852-859.
WANG Peng, YU Bin, SHI Qingxuan, et al. Punching failure models and bearing capacity analysis of reinforced concrete slab-column connections[J]. J. Xi'an Univ. of Arch. & Tech. (Natural Science Edition), 2020, 52(6): 852-859.
- [11] 韩春秀, 周东华, 姚凯程, 等. 一种计算组合梁徐变和收缩效应的新方法[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2017, 45(8): 99-104.
HAN Chunxiu, ZHOU Donghua, YAO Kaicheng, et al. A new algorithm for creep and shrinkage effects of composite beams[J]. Journal of Huazhong University of Science & Technology (Natural Science Edition), 2017, 45(8): 99-104.
- [12] ZHANG H, QUAN L, WANG L, et al. Analyses on long-term behavior of composite steel-concrete beams with weak interface using a state space approach[J]. Engineering Structures, 2021, 30(3): 563-581.

- [13] SZYDOWSKI R S, ABUZEK B. Experimental evaluation of shrinkage, creep and prestress losses in lightweight aggregate concrete with sintered fly ash[J]. *Materials*, 2021, 14(14): 3895.
- [14] WANG G M, ZHU L, JI X L, et al. Finite beam element for curved steel-concrete composite box beams considering time-dependent effect [J]. *Materials*, 2020, 13(15): 3253.
- [15] ZHU L, ZHAO G Y, SU R K L, et al. Time-dependent creep and shrinkage analysis of curved steel-concrete composite box beams[J]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2021, 30(3): 563-581.
- [16] 黄新, 贾焯, 李建慧, 等. 超宽混凝土主梁斜拉桥收缩徐变效应分析[J]. *西安建筑科技大学学报(自然科学版)*, 2019, 51(2): 155-159.
HUANG Xin, JIA Yang, LI Jianhui, et al. Analysis on the shrinkage and creep effects of super wide concrete girder cable-stayed bridge[J]. *J. Xi'an Univ. of Arch. & Tech. (Natural Science Edition)*, 2019, 51(2): 155-159.
- [17] GHOLAMHOSEINI A, GILBERT R I, BRADFORD M, et al. Time-dependent deflection of composite concrete slabs[J]. *ACI Structural Journal*, 2014, 111(4): 765.
- [18] 胡狄, 翁运新, 余志武. 钢筋混凝土矩形薄板徐变效应分析[J]. *工程力学*, 2011, 28(3): 185-190.
HU Di, WENG Yunxin, YU Zhiwu. Analysis of creep effect on reinforced concrete thin plates[J]. *Engineering Mechanics*, 2011, 28(3): 185-190.
- [19] 魏盟, 王庆贺, 王玉银, 等. 考虑非均匀收缩影响的钢筋混凝土组合板长期挠度设计方法研究[J]. *建筑结构学报*, 2017, 38(S1): 9-16.
WEI Meng, WANG Qinghe, WANG Yuyin, et al. Design method for long-term deflections of composite steel-concrete slabs considering non-uniform shrinkage effects[J]. *Journal of Building Structures*, 2017, 38(S1): 9-16.
- [20] PARK H G, HWANG H J, HONG G H, et al. Immediate and long-term deflections of reinforced concrete slabs affected by early-age loading and low temperature[J]. *ACI Structural Journal*, 2012, 109(3): 413-422.
- [21] AL-NU'MAN B S. Analytical model for estimating long-term deflections of two-way reinforced concrete slabs[J]. *Journal of Engineering and Sustainable Development*, 2018, 11(1): 1-12.
- [22] 沈蒲生, 方辉. 超静定结构徐变效应的力法分析方法[J]. *铁道科学与工程学报*, 2006 (1): 1-5.
SHEN Pusheng, FANG Hui. Creep analysis of statically indeterminate structure by force method [J]. *Journal of Railway Science and Engineering*, 2006 (1): 1-5.
- [23] ZHANG H, GENG Y, WANG Y Y, et al. Long-term behavior of continuous composite slabs made with 100% fine and coarse recycled aggregate[J]. *Engineering Structures*, 2020, 212: 110464.
- [24] W Qinghe, L Yongze, Z Huan, et al. Time-dependent behavior of multi-span continuous steel-rac composite slabs considering the loading distribution effects[J]. *Engineering Mechanics*, 2021, 38(2): 198-210.
- [25] GHOLAMHOSEINI A, GILBERT R I, BRADFORD M. Long-term behavior of continuous composite concrete slabs with steel decking[J]. *ACI Structural Journal*, 2018, 115(2): 439-449.
- [26] TROST H. Auswirkungen des superpositionsprinzips auf krieche-und relaxations probleme bei beton-und spannbeton[J]. *Beton-und Stahlbetonbau*, 1967, 62(10): 230-261.
- [27] 周履, 陈永春. 收缩徐变[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1994.
ZHOU Lv, CHEN Yongchun. Shrinkage and creep [M]. Beijing: China Railway Press, 1994.
- [28] 杨应恩, 李鹤翔, 杨天元. 钢筋混凝土板徐变收缩应力重分布计算[J]. *低温建筑技术*, 2019, 41(8): 80-84.
YANG Yingen, LI Hexiang, YANG Tianyuan. Calculation for stress redistribution of creep and shrinkage in reinforced concrete slabs[J]. *Low Temperature Architecture Technology*, 2019, 41(8): 80-84.

(编辑 李睿奇)